제 2 교시

수학 영역

해원수학 김성민T

5지선다형

1. 두 다항식

$$A=x^2-xy+y^2,\ B=x^2+xy-y^2$$

에 대하여 $A+B$는? [2점]

① $2x^2$ ② $2y^2$ ③ $2xy$
④ x^2+y^2 ⑤ $2x^2+xy$

2. 등식 $(1+2i)+(1+i)=a+bi$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 이차부등식 $(x-1)(x-5)\le 0$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+a=0$이 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4-a\ge 0$

5. 다항식 $P(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지가 $2x+5$일 때, $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$P(1)=7$

6. 등식 $a(x+1)^2+b(x-1)^2=5x^2-2x+5$가 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$-1 \Rightarrow 4b=12,\ b=3$

$1 \Rightarrow 4a=8,\ a=2$

7. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 등식 $2z+\bar{z}=3+5i$가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$2a+2bi$

$a-bi$

$3a+bi$ $a=1$

$b=5$

8. 직선 $2x+3y+6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 y절편은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

$2y+3x+6=0$

$y=-3$

9. 다항식 $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$이 $(x+2)(x-1)(x^2+ax+b)$로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^2+x=t$

$(t+3)(t-2)$

$(x^2+x+3)(x^2+x-2)$

$(x+2)(x-1)(x^2+x+3)$

10. 원 $x^2+y^2=16$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원이 점 $(4,\ a)$를 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(x-4)^2+y^2=16$

$(4, a)$ $a=4$

11. 좌표평면 위의 서로 다른 세 점 $A(-1,\ a)$, $B(1,\ 1)$, $C(a,\ -7)$이 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a의 값은? [3점]

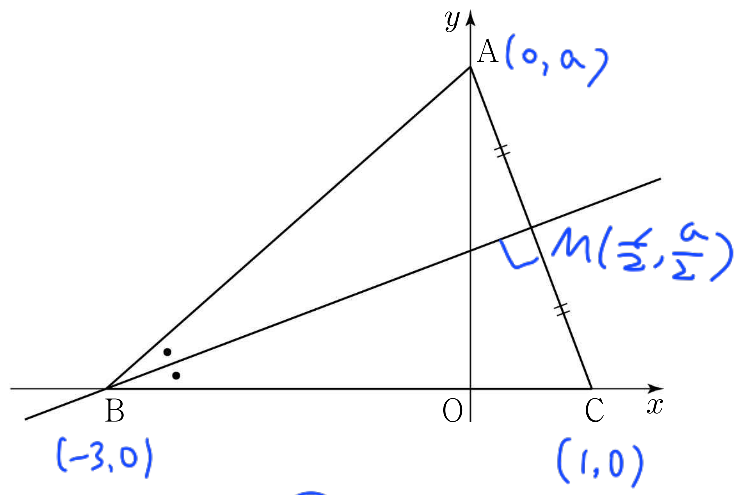
① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

$\frac{1-a}{2} = \frac{-8}{a-1}$

$(a-1)^2=16$

$a-1=4$

12. 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(0,\ a)$, $B(-3,\ 0)$, $C(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]



① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

BC : BA = CM : AM = 1 : 1

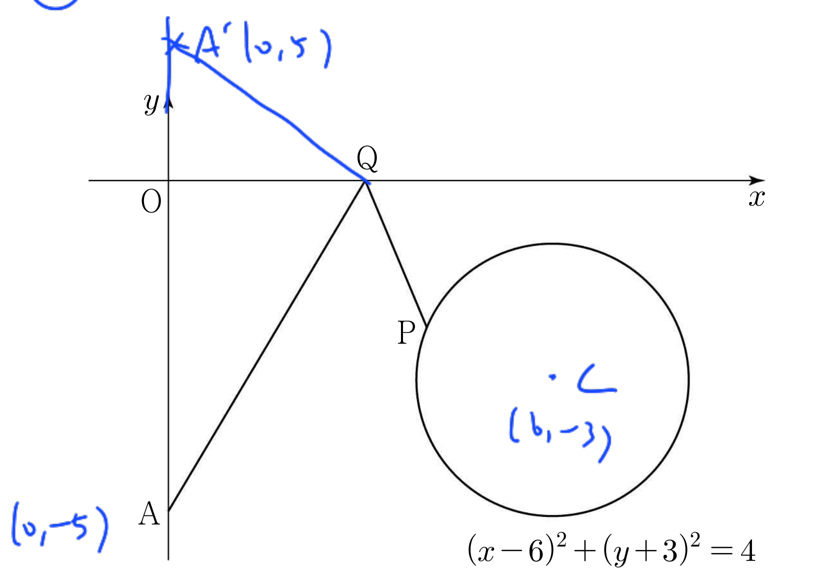
BC = BA => 이등변, $\angle BMC = 90°$

$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{7}{2}} \times \frac{-a}{1} = -1$

$\frac{-a^2}{7} = -1$, $a^2 = 7$　$a = \sqrt{7}$

13. 원 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점 P와 x축 위의 점 Q가 있다. 점 A$(0,\ -5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



$\overline{AQ}+\overline{QP}$

$=\overline{A'Q}+\overline{QP}$

$\geq \overline{A'C}-\overline{CP}$

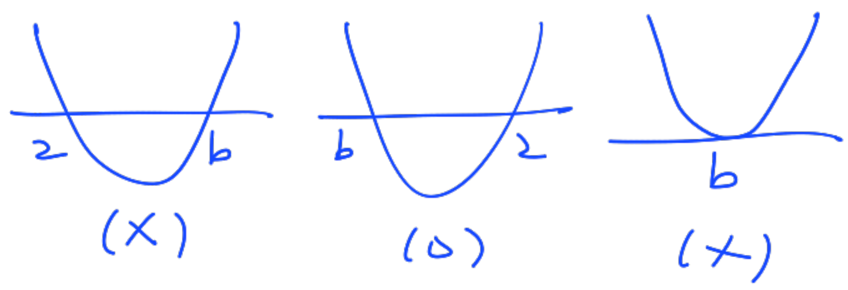
$(0,5)\sim(6,-3)$

$\sqrt{36+64}-2=8$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-2)(x-b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=6$ (나) x의 값의 범위가 $x>2$일 때, $f(x)>0$이다.

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26



$f(0)=2ab=2a=6,\ a=3$

$f(4)=3\times2\times3=18$

15. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(k-1)x^2-k=0$의 한 허근을 z라 할 때, $z+\overline{z}=-2$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

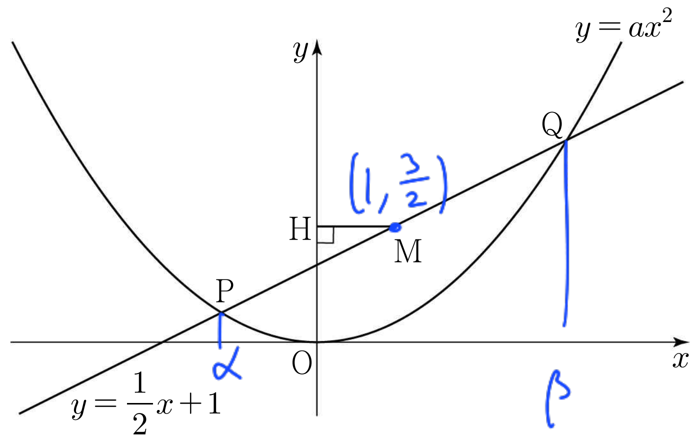
$x=1 \rightarrow 1+k-1-k=0$

$(x-1)(x^2+kx+k)=0$

$z+\overline{z}=-k=-2$

$k=2$

16. 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점 M에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 MH의 길이가 1일 때, 선분 PQ의 길이는? [4점]



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$ax^2-\frac{1}{2}x-1=0.$

$\alpha+\beta=2=\frac{1}{2a}, \ a=\frac{1}{4}$

$\alpha\beta=\frac{-1}{a}=-4$

$P(\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1), \ Q(\beta, \frac{1}{2}\beta+1)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}|\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{4+16}$

$=5$

17. 이차항의 계수가 1 인 이차다항식 $P(x)$ 와 일차항의 계수가 1 인 일차다항식 $Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 다항식 $P(x+1)-Q(x+1)$ 은 $x+1$ 로 나누어떨어진다. (나) 방정식 $P(x)-Q(x)=0$ 은 중근을 갖는다.

다항식 $P(x)+Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 12 일 때, $P(2)$ 의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$P(0)-Q(0)=0, \quad P(0)=Q(0)$

$P(x)-Q(x)=x^2$

$P(x)=x^2+x+b$

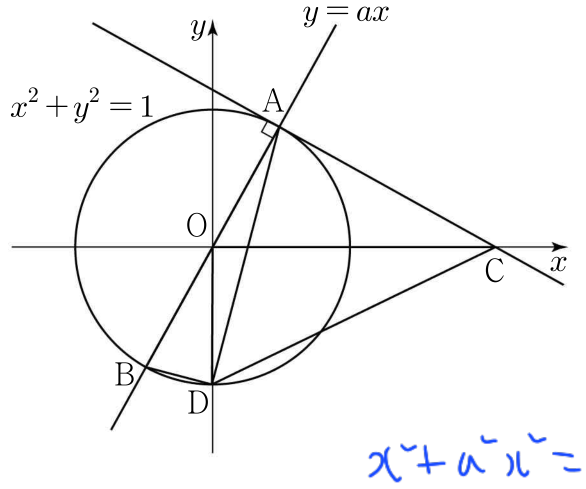
$Q(x)=\quad x+b$

$P(2)+Q(2)=12$

$8+2b=12, \quad b=2$

$P(2)=4+2+2=8$

18. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=ax\ (a>0)$ 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B 라 하고, 점 A 를 지나고 직선 $y=ax$ 에 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 C 라 하자.
다음은 점 D$(0,\ -1)$ 에 대하여 두 삼각형 DAB 와 DCO 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}=2$ 를 만족시키는 상수 a 의 값을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이고, 점 A 의 x 좌표는 양수이다.)



$x^2+a^2x^2=1, \quad x^2=\dfrac{1}{a^2+1}$

원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=ax$ 가 만나는 점 A 의 좌표는 A((가) , $a\times$ (가)) 이다. $\quad \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ 점 A 를 지나고 직선 $y=ax$ 에 수직인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{a}x+$ (나) $\quad y=-\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ 이다. $\quad \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a} \quad =-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{a^2+1}}$ 점 C 는 직선 l 과 x 축이 만나는 점이므로 점 C 의 좌표는 $\quad =-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ C$\left(\sqrt{a^2+1},\ 0\right)$ 이다. 점 D$(0,\ -1)$ 과 직선 AB 사이의 거리를 d 라 하면 $S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times d,\ S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{OC}}$ $\quad (0,-1) \sim ax-y=0$ 따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}=2$ 를 만족시키는 양수 a 의 값은 $\quad \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ $a=$ (다) $\quad \dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2\times\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=\dfrac{a^2+1}{2}=2$ 이다. $\quad \sqrt{3}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$ 라 하고, (다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $f(k)\times g(k)$ 의 값은? [4점] $\quad a^2=3 \quad a=\sqrt{3}$

① $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

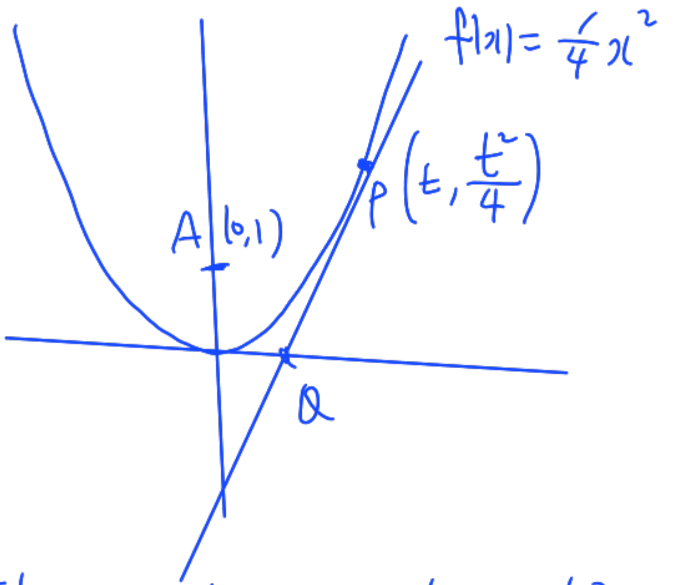
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

19. 좌표평면 위에 점 A(0, 1)이 있다. 이차함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{4}\right)$ $(t>0)$을 지나고 기울기가 $\frac{t}{2}$인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $t=2$일 때, 점 Q의 x좌표는 1이다.
ㄴ. 두 직선 PQ와 AQ는 서로 수직이다.
ㄷ. 선분 QA를 3 : 2로 외분하는 점 R가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 삼각형 RQP의 넓이는 $6\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$y=\frac{t}{2}(x-t)+\frac{t^2}{4}$, $y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}$, $Q\left(\frac{t}{2},0\right)$

ㄱ. $t=2 \Rightarrow Q(1,0)$

ㄴ. PQ 기 $=\frac{\frac{t^2}{4}}{\frac{t}{2}}=\frac{2t^2}{4t}=\frac{t}{2}$

AQ 기 $=\frac{-1}{\frac{t}{2}}=-\frac{2}{t}$ 곱 $=-1$

ㄷ. $Q\left(\frac{t}{2},0\right)$ $A(0,1)$

$R(-t,3)$

$t=2\sqrt{3}$

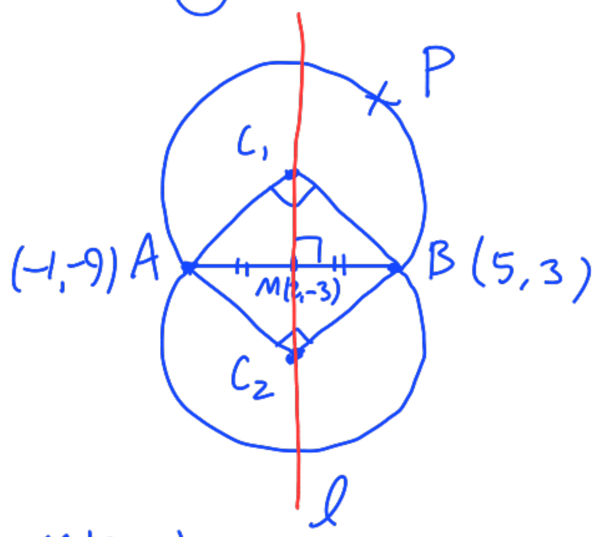
$\frac{1}{4}t^2=3$, $t^2=12$, $R(-2\sqrt{3},3)$

$R(-2\sqrt{3},3)$ $P(2\sqrt{3},3)$, $Q(\sqrt{3},0)$

$S=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 3=6\sqrt{3}$

20. 좌표평면 위의 두 점 A(−1, −9), B(5, 3)에 대하여 ∠APB = 45°를 만족시키는 점 P가 있다. 서로 다른 세 점 A, B, P를 지나는 원의 중심을 C라 하자. 선분 OC의 길이를 k라 할 때, k의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



M(2,-3)

AB기울기 $=\frac{3-(-9)}{5-(-1)}=2$

l : 기울기 $-\frac{1}{2}$, M(2,-3) 지남

$y=-\frac{1}{2}(x-2)-3$

$y=-\frac{1}{2}x-2$ 위의점 C

$C(2a,-a-2)$

$\overline{CM}=\overline{AM}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

$CM^2=(2a-2)^2+(-a+1)^2=AM^2=45$

$5a^2-10a+5=45$

$a^2-2a-8=0$ $a=-2,4$

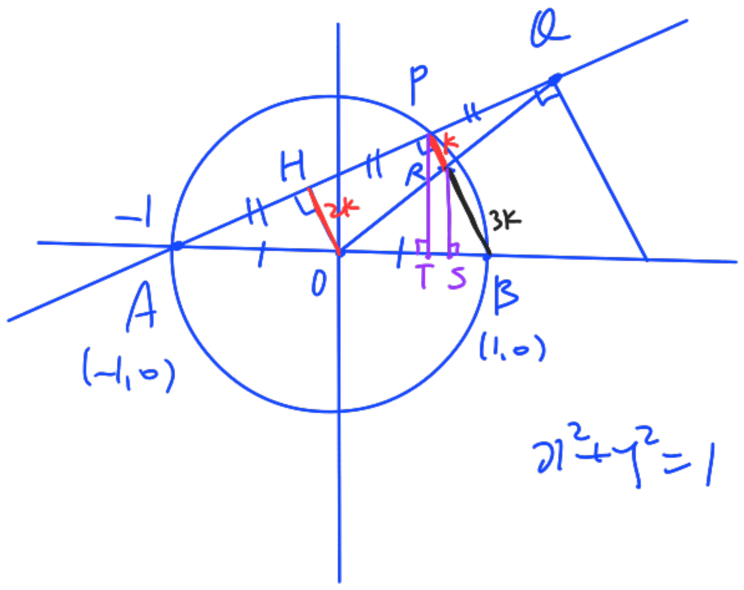
$C_1(-4,0)$, $C_2(8,-6)$

$\overline{OC_1}=4$, $\overline{OC_2}=10$

∴ 최소 : 4

21. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원 C가 있다. 점 A를 지나고 기울기가 $m\ (0<m<1)$인 직선이 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 할 때, 선분 AP를 $3:1$로 외분하는 점을 Q, 선분 BP와 선분 OQ가 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OBR의 넓이가 $\frac{9}{26}$일 때, 상수 m의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$



$\triangle QPR \backsim \triangle QHO\ (1:2)\ \overline{PR}=k \rightarrow \overline{HO}=2k$

$\triangle AOH \backsim \triangle ABP\ (1:2)\ \overline{OH}=2k \rightarrow \overline{BP}=4k,\ \overline{BR}=3k$

$\triangle OBR=\frac{1}{2}\times1\times\overline{RS}=\frac{9}{26},\ \overline{RS}=\frac{9}{13},\ \triangle BRS \backsim \triangle BPT$ 이므로 $(3:4)$

$\overline{PT}=\frac{9}{13}\times\frac{4}{3}=\frac{12}{13}$

$P\left(a,\frac{12}{13}\right)$ 원 위의 점 $\Rightarrow a^2+\frac{144}{169}=1$

$a^2=\frac{25}{169},\ a=\frac{5}{13}$

$m=\frac{\overline{PT}}{\overline{AT}}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}+1}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

단답형

22. $(x^2+2x+5)^2$의 전개식에서 x의 계수를 구하시오. [3점]

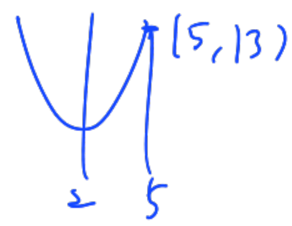
$\boxed{20}$

$2x\times5=10x$

$5\times2x=10x$

23. $0\le x\le5$일 때, 이차함수 $f(x)=(x-2)^2+4$의 최댓값을 구하시오. [3점]

$\boxed{13}$



24. 이차함수 $y=x^2+ax+9$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$a^2-36=0$

25. 좌표평면 위의 세 점 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(-4,\ 4)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(p,\ q)$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$x^2+y^2+ax+by=0$

$36+6a=0,\ a=-6$

$16+16-4a+4b=0$

$56+4b=0$

$b=-14$

$x^2+y^2-6x-14y=0$

$(x-3)^2+(y-7)^2=$

$(3,7)$

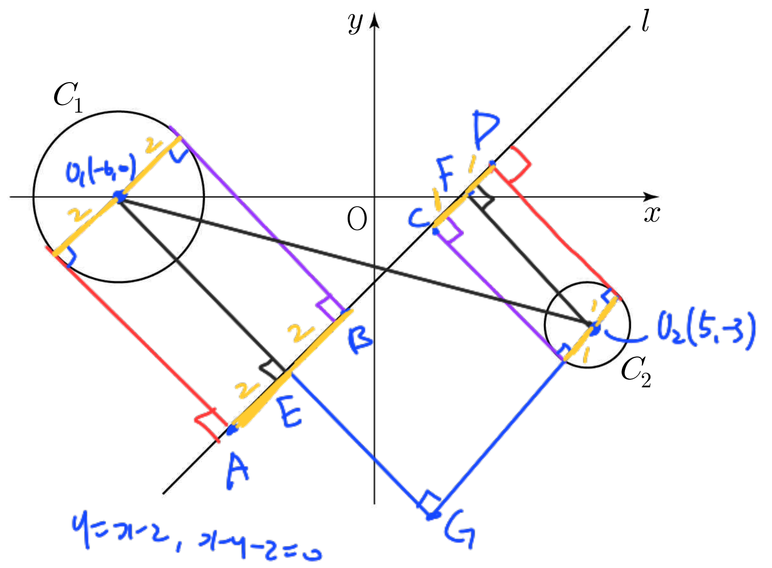
26. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+5 \le 9 \\ |x-3| \le 7 \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{7}$

$\begin{cases} x \le 2 \\ -7 \le x-3 \le 7 \\ -4 \le x \le 10 \end{cases}$

$-4 \le x \le 2$

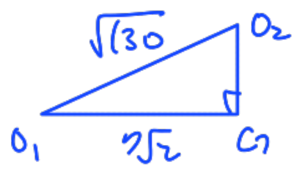
27. 좌표평면 위에 두 원 $C_1 : (x+6)^2+y^2=4$, $C_2 : (x-5)^2+(y+3)^2=1$과 직선 $l : y=x-2$가 있다. 원 C_1 위의 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H_1, 원 C_2 위의 점 Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H_2라 하자. 선분 H_1H_2의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, 두 수 M, m의 곱 Mm의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{23}$



$O_1(-6,0)$, $O_2(5,-3)$

$\overline{O_1E} = \frac{|-6-2|}{\sqrt2} = 4\sqrt2$, $\overline{O_2F} = \frac{|5+3-2|}{\sqrt2} = 3\sqrt2$, $\overline{O_1O_2} = \sqrt{121+9} = \sqrt{130}$

$\overline{O_1G} = \overline{O_1E} + \overline{O_2F} = 7\sqrt2$



$\overline{O_2G} = \sqrt{130-98} = 4\sqrt2 = \overline{EF}$

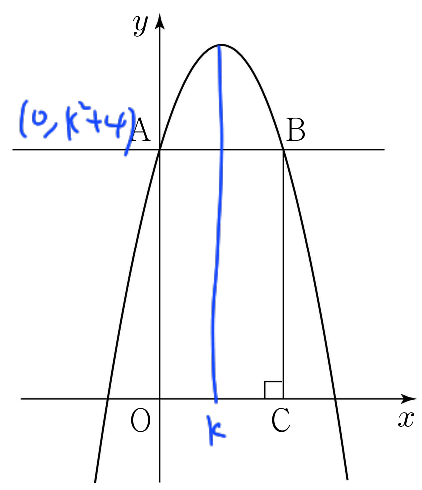
$M = \overline{AD} = \overline{EF} + (2+1)$

$m = \overline{BC} = \overline{EF} - (2+1)$

$Mm = (4\sqrt2+3)(4\sqrt2-3) = 23$

28. 그림과 같이 이차함수 $f(x)=-x^2+2kx+k^2+4$ $(k>0)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 사각형 OCBA의 둘레의 길이를 $g(k)$라 할 때, 부등식 $14 \le g(k) \le 78$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{15}$



$y = -(x-k)^2 + 2k^2 + 4$

$\overline{AB} = 2k$

$\overline{OA} = k^2+4$

$g(k) = 2k^2+4k+8$

$14 \le 2k^2+4k+8 \le 78$

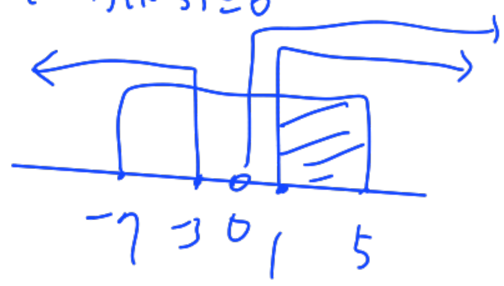
$k^2+2k-3 \ge 0$, $(k+3)(k-1) \ge 0$

$k^2+2k-35 \le 0$, $(k+7)(k-5) \le 0$

$k \le -3$, $k \ge 1$

$-7 \le k \le 5$

$k > 0$



$k = 1\ 2\ 3\ 4\ 5$

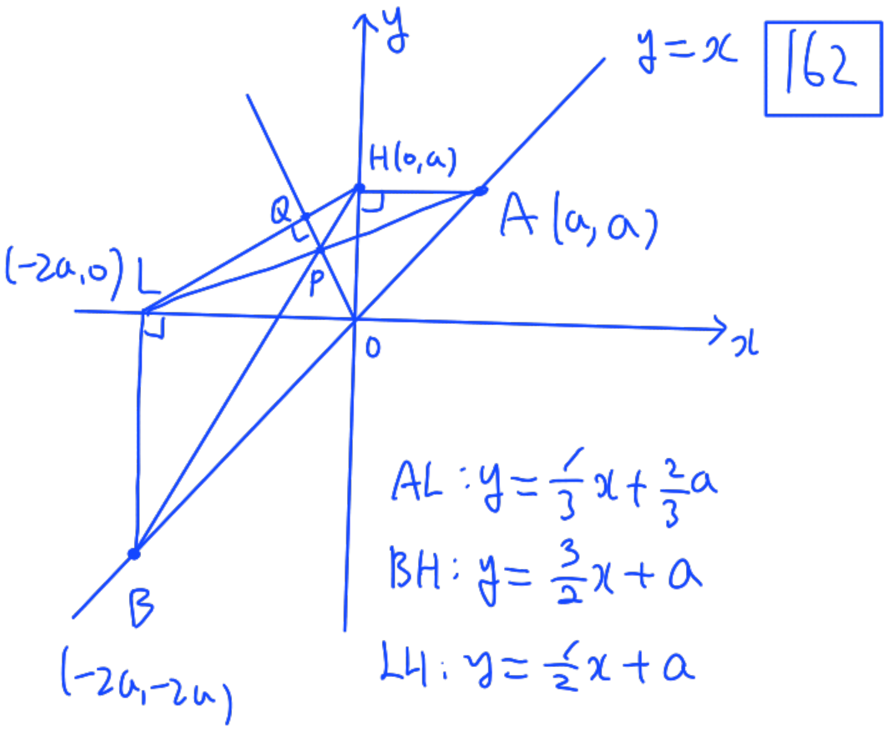
15

29. 제1사분면 위의 점 A와 제3사분면 위의 점 B에 대하여 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있다.
> (나) $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 L이라 하자. 직선 AL과 직선 BH가 만나는 점을 P, 직선 OP가 직선 LH와 만나는 점을 Q라 하자. 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 넓이가 $\frac{81}{2}\pi$일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{162}$



$AL : y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}a$

$BH : y=\frac{3}{2}x+a$

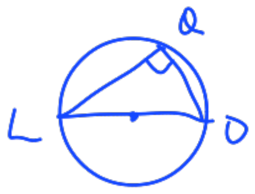
$LH : y=\frac{1}{2}x+a$

$P\left(-\frac{2}{7}a, \frac{4}{7}a\right)$

OP 기울기 $=\dfrac{\frac{4}{7}a}{-\frac{2}{7}a}=-2$

LH 기울기 $=\frac{1}{2}$

곱 $-1 \Rightarrow$ 수직



지름 $=\overline{OL}=2a$, 반지름: a

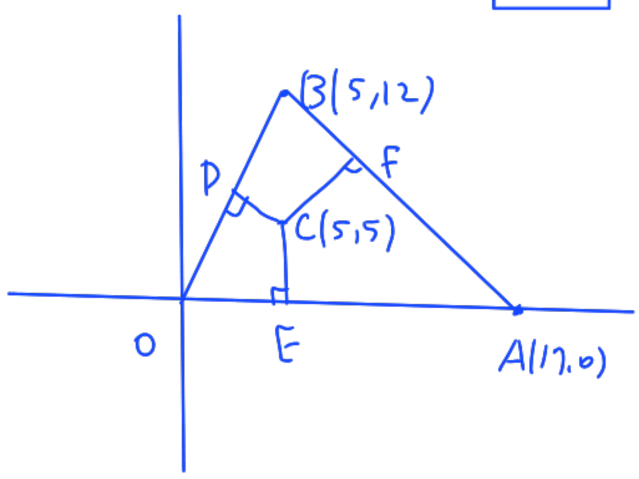
$\pi a^2=\frac{81}{2}\pi$, $a^2=\frac{81}{2}$

$\overline{OA}\times\overline{OB}=\sqrt{2}a\times 2\sqrt{2}a$

$=4a^2=162$

30. 좌표평면 위에 세 점 A(17, 0), B(5, 12), C(5, 5)가 있다. 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 삼각형 OAB와 서로 다른 세 점에서만 만나도록 하는 모든 r의 값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{35}$



$OB : y=\frac{12}{5}x$, $(5,5)\sim 12x-5y=0$ $\frac{35}{13}$

$CE=5$ $CD=\frac{35}{13}=2.\times\times$

$AB : y=-x+17$, $(5,5)\sim x+y-17=0$

$CF=\frac{7}{\sqrt{2}}=4.\times\times$

$CO=5\sqrt{2}$, $CB=7$, $CA=13$

$CD<CF<CE<CB<CO<CA$

$r=\frac{7}{\sqrt{2}}$, $5\sqrt{2}$

$\frac{7}{\sqrt{2}}\times 5\sqrt{2}=35$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.