해원수학
HAEWON MATH ACADEMY

2019학년도 9월 고1 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수학 영역

해원수학 김성민T

5지선다형

1. 두 다항식 $A=x^2+5x+4$, $B=x^2+2$에 대하여 $A-B$는? [2점]

① $5x-2$ ② $5x+2$ ③ x^2+5x
④ x^2+5x-2 ⑤ x^2+5x+2

2. $(2+i)+(2-3i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $1+i$ ② $2-2i$ ③ $2+2i$ ④ $4-2i$ ⑤ $4+2i$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 중근을 갖도록 하는 상수 a의 값은? [2점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

4. 다항식 x^3-x^2+3을 $x-2$로 나눈 나머지는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$8-4+3$

5. 직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식이 $2x+y+a=0$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$2(x-2)+(y+1)+5=0$

$2x+y+2=0$

6. 이차방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? [3점]

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

$\begin{cases} \alpha+\beta=-6 \\ \alpha\beta=7 \end{cases}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=36-14=22$

7. 다항식 $P(x)$에 대하여 등식

$$x^3+3x^2-x-3=(x^2-1)P(x)$$

가 x에 대한 항등식일 때, $P(1)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$x^2(x+3)-(x+3)$

$=(x^2-1)\underbrace{(x+3)}_{P(x)}$　$P(1)=4$

8. 연립방정식

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2-xy+2y=4 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=x-1$

$x^2-x^2+x+2x-2=4$

$3x=6$

$x=2$

$y=1$

9. 기울기가 5인 직선이 이차함수 $f(x)=x^2-3x+17$의 그래프에 접할 때, 이 직선의 y절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=5x+k$

$x^2-8x+\underbrace{17-k}_{16}=0$

$k=1$

10. 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{2a}{1-i}+3i=2+bi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$a(1+i)+3i$

$=a+(3+a)i=2+bi$

$a=2$

$b=5$

11. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 6으로 같다. 이차다항식 $f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

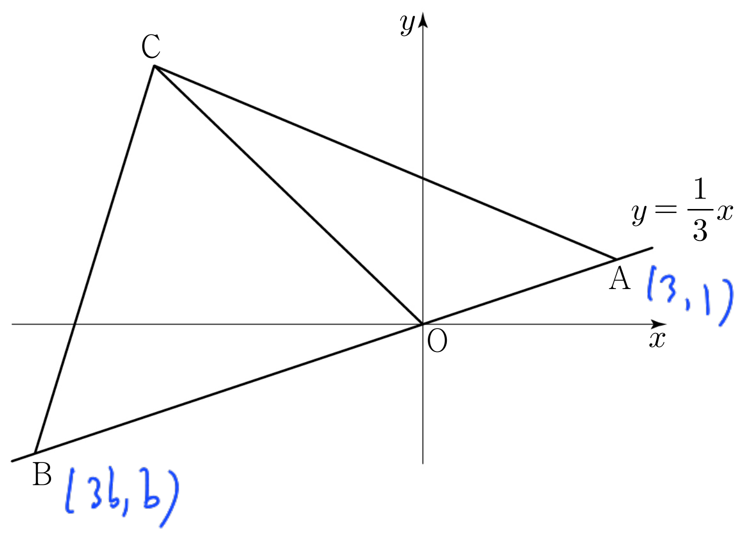
$f(1)=f(3)=6$

$f(x)=(x-1)(x-3)+6$

$f(4)=3\times1+6=9$

12. 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 두 점 $A(3,\ 1)$, $B(a,\ b)$가 있다. 제2사분면 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비가 $2:1$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a<0$이고, O는 원점이다.) [3점]

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4



$\frac{1}{3}a=b$

$BO:OA=2:1$

$O\left(\frac{6+3b}{3}, \frac{2+b}{3}\right)=(0,0)$

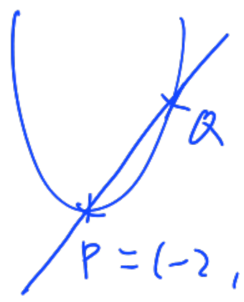
$b=-2$

$a=-6$

13. 이차함수 $f(x)=x^2+4x+3$ 의 그래프와 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 가 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점일 때, 선분 PQ 의 길이는? (단, k 는 상수이다.) [3점]

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

$(x+2)^2-1$



$x^2+2x+3-k=0$

$x=-2 \Rightarrow 4-4+3-k=0$

$k=3$

$x(x+2)=0$

$x=-2, 0$

$(-2,-1), (0,3)$

$\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

14. x 에 대한 이차부등식

$$x^2-(n+5)x+5n \le 0$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 3 이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

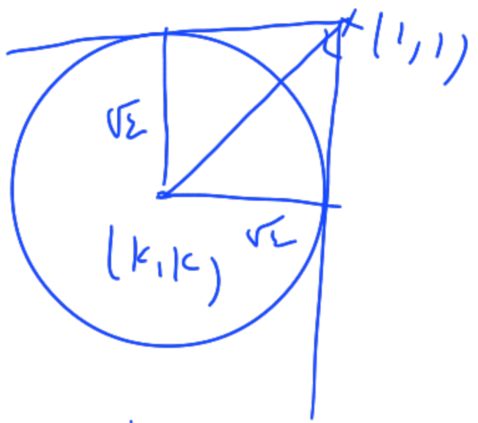
$(x-5)(x-n) \le 0$

$\begin{cases} n \le x \le 5 & n=3 \\ 5 \le x \le n & n=7 \end{cases}$ 10

15. 원 $C_1 : x^2+y^2=2$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 점 A(1, 1)에서 원 C_2에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 k의 값은? (단, $k>2$) [4점]

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $1+2\sqrt{2}$ ④ $3+\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

$(x-k)^2+(y-k)^2=2$



(k,k)~(1,1) : 2

$\sqrt{2(k-1)^2}=2$

$(k-1)^2=2$

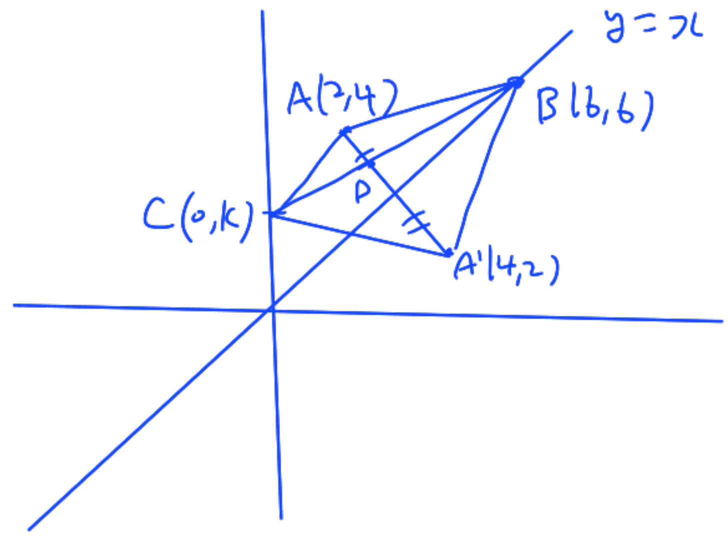
$k-1=\pm\sqrt{2}$

$k=1+\sqrt{2}$ ($\because k>2$)

16. 좌표평면 위에 두 점 A(2, 4), B(6, 6)이 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하자. 점 C(0, k)가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은? [4점]

(가) $0<k<3$
(나) 삼각형 A′BC의 넓이는 삼각형 ACB의 넓이의 2배이다.

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$



AD:DA′=1:2

$D\left(\frac{4+4}{3}, \frac{2+8}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$

$\frac{6-\frac{10}{3}}{6-\frac{8}{3}}=\frac{6-k}{6}$

$\frac{8}{10}=\frac{6-k}{6}$

$60-10k=48$, $10k=12$, $k=\frac{6}{5}$

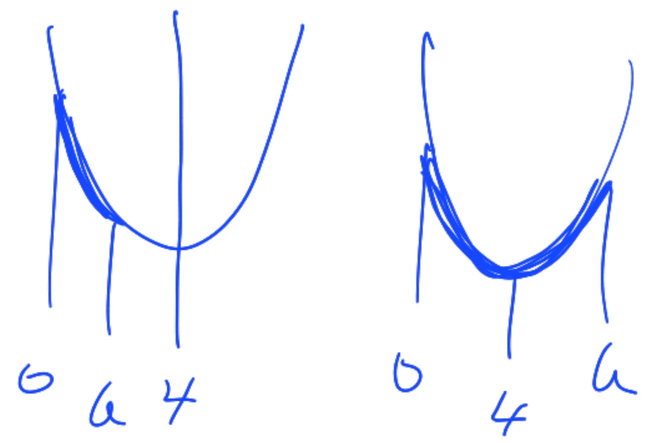
17. 양수 a에 대하여 $0 \le x \le a$에서 이차함수

$$f(x)=x^2-8x+a+6$$

의 최솟값이 0이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f(x) = (x-4)^2+a-10$



$a<4$

$f(a)=a^2-7a+6=0$

$a=1, 6$

$\boxed{a=1}$

$a \ge 4$

$f(4)=a-10=0$

$\boxed{a=10}$

18. 0이 아닌 실수 m에 대하여 직선 $l : y=\frac{1}{m}x+2$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 다음은 삼각형 OBH가 m의 값에 관계없이 이등변삼각형임을 보이는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

$\frac{a}{m}+2=4,\ a=2m$

점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$는 직선 $l : y=\frac{1}{m}x+2$ 위의 점이므로

$a=$ (가) $2m$ $\mathrm{B}(2m, 0)$

직선 BH는 직선 l에 수직이므로

직선 BH의 방정식은 $y=-m(x-$ (가) $)$ $2m$

직선 l과 직선 BH가 만나는 점 H의 좌표는

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2m^3-2m}{(\text{나})},\ \dfrac{4m^2}{(\text{나})}\right)$ m^2+1 m^2+1

$\frac{1}{m}x+2=-mx+2m^2$

$\left(m+\frac{1}{m}\right)x=2m^2-2$

$x=\dfrac{2m^3-2m}{m^2+1}$

선분 OH의 길이는

$\sqrt{\left(\dfrac{2m^3-2m}{(\text{나})}\right)^2+\left(\dfrac{4m^2}{(\text{나})}\right)^2}$

$=\dfrac{|2m|}{(\text{나})}\sqrt{m^4+(\text{다})\times m^2+1}$ 3

$\sqrt{\dfrac{4m^6+4m^2-8m^4+16m^4}{(m^2+1)^2}}=\dfrac{|2m|}{m^2+1}\sqrt{m^4+2m^2+1}$

$=|$ (가) $|$

이므로 선분 OH의 길이와 선분 OB의 길이가 서로 같다.

따라서 삼각형 OBH는 m의 값에 관계없이

이등변삼각형이다.

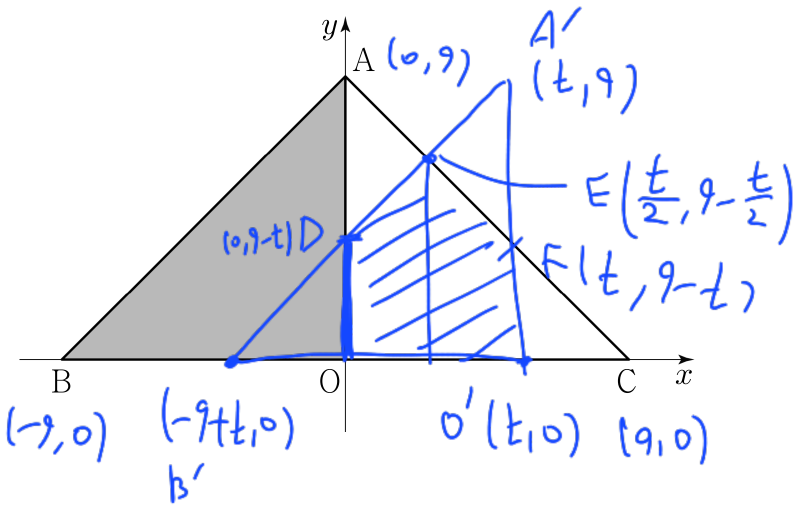
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)\times g(k)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

$4\times5=20$

19. 좌표평면 위에 세 점 A(0, 9), B(−9, 0), C(9, 0)이 있다. 실수 t $(0 < t < 18)$에 대하여 세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O′, A′, B′이라 하자. 삼각형 OCA의 내부와 삼각형 O′A′B′의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S(t)$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33



AB : $y = x + 9$

A′B′ : $y = x - t + 9$, $D(0, 9-t)$

AC : $y = -x + 9$

$E\left(\frac{t}{2}, 9 - \frac{t}{2}\right)$

$F(t, 9-t)$

$S(t) = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(9 - t + 9 - \frac{t}{2}\right) \times \frac{t}{2}$

$= \left(18 - \frac{3t}{2}\right) \times \frac{t}{2}$

$= -\frac{3}{4}t^2 + 9t$

$= -\frac{3}{4}(t-6)^2 + 27$

20. 9 이하의 자연수 n에 대하여 다항식 $P(x)$가

$$P(x) = x^4 + x^2 - n^2 - n$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $P(\sqrt{n}) = 0$

ㄴ. 방정식 $P(x) = 0$의 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 모든 정수 k에 대하여 $P(k) \neq 0$이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은 31이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $P(\sqrt{n}) = n^2 + n - n^2 - n = 0$ (ok)

$P(-\sqrt{n}) = n^2 + n - n^2 - n = 0$

ㄴ. $P(x) = (x^2 - n)(x^2 + 1 + n)$

$x^2 = -n - 1 < 0$ 허근

ㄷ. $P(k) = (k^2 - n)(k^2 + n + 1) \neq 0$

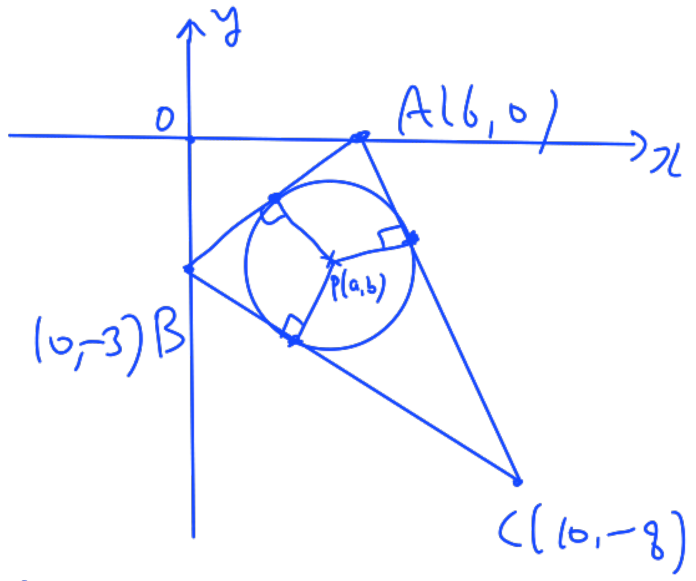
$k^2 \neq n$

$n = 2, 3, 5, 6, 7, 8$

31

21. 좌표평면 위의 세 점 A(6, 0), B(0, −3), C(10, −8)에 대하여 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6



AB : $y=\frac{1}{2}x-3 \rightarrow x-2y-6=0$

BC : $y=-\frac{1}{2}x-3 \rightarrow x+2y+6=0$

CA : $y=-2x+12 \rightarrow 2x+y-12=0$

$\frac{|a-2b-6|}{\sqrt{5}}=\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{5}}=\frac{|2a+b-12|}{\sqrt{5}}$

$\begin{cases} b=-3 \\ a=0\ (\times) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b=18 \\ a+b=2 \end{cases}$

$\begin{cases} b=-3 \\ a=15 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-3 \\ a=5 \end{cases}$ $(a<10)$

$P(5,-3)$ $OP=\sqrt{34}$

단답형

22. $(x+3)(x^2+2x+4)$의 전개식에서 x의 계수를 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$4x+6x$

23. 이차함수 $f(x)=-x^2-4x+k$의 최댓값이 20일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{16}$

$f(x)=-(x+2)^2+\underbrace{k+4}_{20}$

24. 원 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

25. 이차함수 $f(x)=x^2-2x+k$ 의 그래프와 직선 $y=3x+1$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 k 의 최솟값을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$x^2-5x+k-1=0$

$D=25-4(k-1)<0$

$k-1>\frac{25}{4}$

$k>\frac{29}{4}$

26. 연립부등식

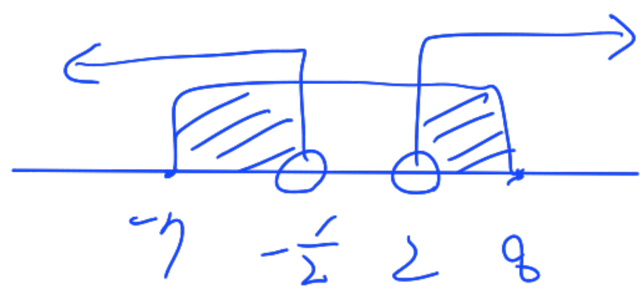
$$\begin{cases} x^2-x-56\le 0 \\ 2x^2-3x-2>0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{13}$

$$\begin{cases} (x+7)(x-8)\le 0 \\ (2x+1)(x-2)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7\le x\le 8 \\ x<-\frac{1}{2},\ x>2 \end{cases}$$



$-7\le x\le -1$ 7개

$3\le x\le 8$ 6개

13개

27. 직선 $y=x$ 위의 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원 중에서 직선 $3x-4y+12=0$과 접하는 원의 개수는 2이다. 두 원의 중심을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{50}$

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$(a,a) \sim 3x-4y+12=0$

$\frac{|-a+12|}{5}=a$

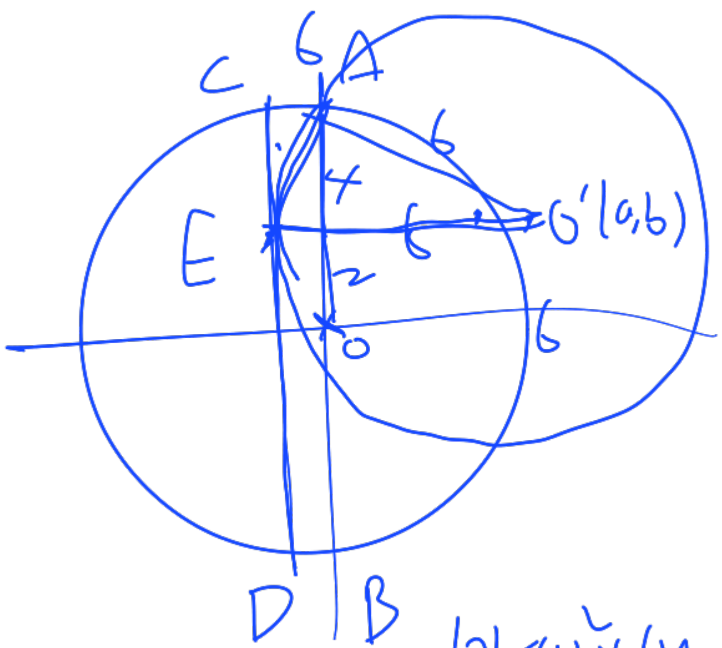
$|-a+12|=5a$

$6a=12,\ a=2$

$4a=-12,\ a=-3$

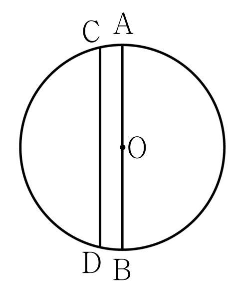
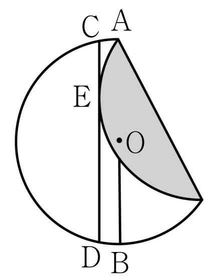
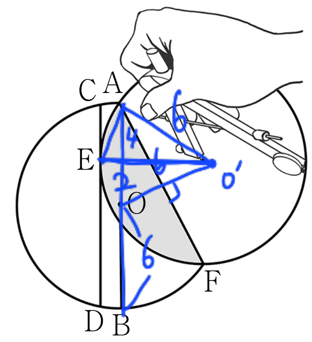
$(2,2),(-3,-3)$ $\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$

$\overline{AB}^2=50$



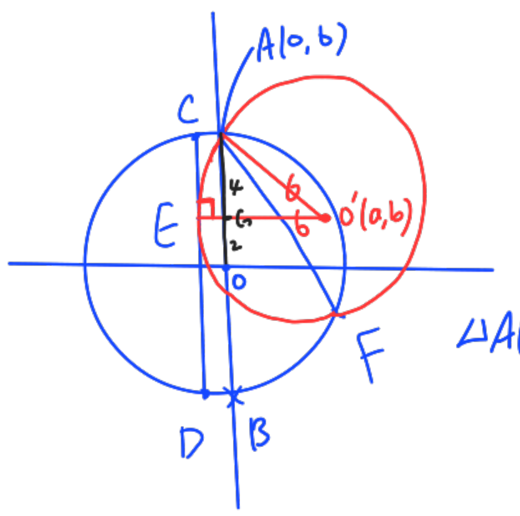
$(x-a)^2+(y-2)^2=36$

28. 반지름의 길이가 6인 원 모양의 종이가 있을 때, 다음과 같은 방법으로 새로운 원을 그린다.

I		원의 중심 O를 지나는 직선을 그렸을 때, 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 원과 두 점에서 만나도록 직선 AB와 평행한 직선을 그렸을 때, 원과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.
II		점 A를 지나는 현을 접는 선으로 하여 직선 CD에 접하도록 종이를 접고, 그 접점을 E라 하자.
III		점 A를 지나는 현이 원과 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 F라 하자. 세 점 A, E, F를 지나는 새로운 원을 그린다.

원의 중심 O를 좌표평면의 원점으로 하고, 두 점 A, B를 지나는 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 그렸을 때, 세 점 A, E, F를 지나는 원의 중심을 $O'(a, b)$라 하자. 삼각형 AEO'의 넓이가 12일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 무시한다.) [4점]

$\boxed{24}$



$\triangle AEO'=\frac{1}{2}\times\overline{EO'}\times\overline{AG}=12$

$\frac{1}{2}\times 6\times\overline{AG}=12,\ AG=4$

$OG=2=b$

$(x-a)^2+(y-2)^2=36$ A(0,6) 지남

$a^2+16=36,\ a^2=20$

$b^2=4$) $\underline{24}$

29. 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(0,\ 2+2\sqrt{2})$, $B(-2,\ 0)$, $C(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 선분 BD와 선분 CE가 만나는 점을 F라 할 때, 사각형 AEFD의 둘레의 길이를 l이라 하자. $l^2=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]

$\boxed{96}$

<1번해>

$\overline{AD}=a,\ \overline{DF}=b,\ \overline{AF}=4$

$a^2+b^2=16,\ D(\sqrt{2},\sqrt{2})$

$\triangle AFD=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}ab$

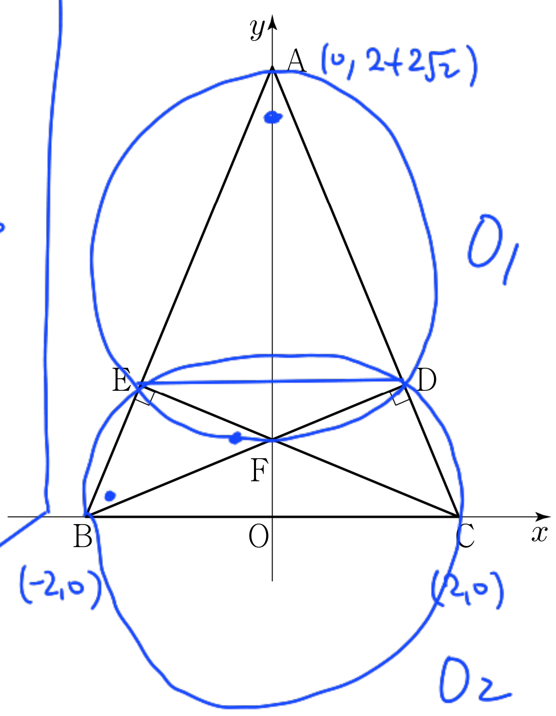
$ab=4\sqrt{2}$

$l=2(a+b)$

$l^2=4(a^2+b^2+2ab)$

$=4(16+8\sqrt{2})$

$=64+32\sqrt{2}$



부지(AC: $y=(-1-\sqrt{2})x+(2+2\sqrt{2})$

BD: $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)(x+2)$, $F(0,\ 2\sqrt{2}-2)$

$\overline{AF}=(2+2\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-2)=4,\ \overline{BC}=4$

O_1 지름: $AF=4$, O_2 지름 $BC=4$

지름 같은 원 ⇒ $\overline{ED}$ 공통현

원주각 일치

⇒ $\angle EAD=\angle EBD=45^\circ$

$\triangle EBF$: 직각이등변 $\triangle$, $\overline{EB}=\overline{EF}$

$AE+EF=AB$

$AD+DF=AC$

$AB+AC=2AB=l$

$l^2=4\overline{AB}^2=4(4+4+8+8\sqrt{2})$

$=64+32\sqrt{2}$

30. 좌표평면 위에 $0<\frac{b}{2}<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 세 원

$C_1: x^2+y^2=a^2$, $\quad O_1(0,0)\quad a$

$C_2: (x-b)^2+y^2=(b-a)^2$, $\quad O_2(b,0)\quad b-a$

$C_3: (x-b+a)^2+y^2=b^2$ $\quad O_3(b-a,0)\quad b$

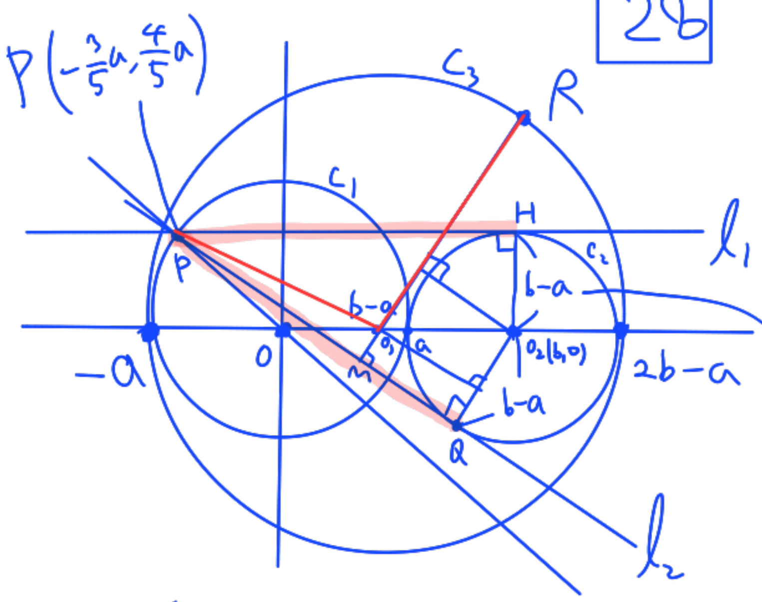
이 있다. 직선 $y=-\frac{4}{3}x$와 원 C_1이 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 P라 하고, 점 P에서 원 C_2에 그은 두 접선을 l_1, l_2라 하자. 직선 l_1은 x축에 평행하고, 직선 l_2는 원 C_2 위의 점 Q에서 접한다. 원 C_3 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값이 240일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{28}$

$b<2a$

$b-a<a$

$P\left(-\frac{3}{5}a,\ \frac{4}{5}a\right)$



$y=-\frac{4}{3}x$ & $x^2+y^2=a^2$ $\qquad y=-\frac{4}{3}x$

$x^2+\frac{16}{9}x^2=\frac{25}{9}x^2=a^2,\ x=-\frac{3}{5}a,\ y=\frac{4}{5}a=b-a$

$\boxed{b=\frac{9}{5}a}$, $O_2\left(\frac{9}{5}a,0\right)$, $O_3\left(\frac{4}{5}a,0\right)$

$PQ=PH=b-\left(-\frac{3}{5}a\right)=b+\frac{3}{5}a=\frac{12}{5}a$

$l_2: y=m\left(x+\frac{3}{5}a\right)+\frac{4}{5}a$, $O_2\sim l_2$ 거리 $=b-a=\frac{4}{5}a$

$5mx-5y+3ma+4a=0 \sim O_2\left(\frac{9}{5}a,0\right)$

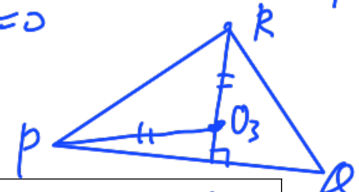
$\frac{|9am+3ma+4a|}{\sqrt{25m^2+25}}=\frac{4}{5}a$, $|12ma+4a|=4a\sqrt{m^2+1}$

$|3m+1|=\sqrt{m^2+1}$

$9m^2+6m+1=m^2+1,\ m(8m+6)=0,\ m=-\frac{3}{4}$

$l_2: y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{20}a,\ 15x+20y-7a=0$

$O_3\left(\frac{4}{5}a,0\right)\sim 15x+20y-7a=0$



$\frac{|5a|}{\sqrt{15^2+20^2}}=\frac{a}{5}$

넓이 최대 높이 $=b+\frac{a}{5}=2a$

$S=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}a\times2a=240$

$a^2=100,\ a=10$

$b=\frac{9}{5}a=18$

$a+b=28$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.