$h(x)=f(x)-f'(4)x$라 하면 $f(x)-f'(4)x \le f(g(x))-f'(4)g(x)$ 에서 $h(x) \le h(g(x))$이다. 집합 $\{x|h'(x)>0\}$ 를 만족하는 x에선 $g(x) \ge x$ 이다. $g(x) \le x$임으로 $g(x)=x$ $h'(x)=3(x-4)(x-a)$라 하자 $a \ge 4$ 라면 $x \le 4$에서 $g(x)=x$임으로 $|g(x)|=|x|$,$x=0$에서 미분 불가능하여 (가) 조건에 모순된다. $a<4$ 이다.

$g'(\frac{1}{x}) \times g'(x) \le 0$에서 $g'(-1)^2 \le 0$, $g'(1)^2 \le 0$ $g'(1)=g'(-1)=0$ 이다. $g(x)=\begin{cases} x & (x \le c, x \ge 4) \\ p(x) & (c<x<4) \end{cases}$ (단 $c< -1$)

$g'(x) \le 0$ (단 $\frac{1}{c} \le x<0, 0<x \le \frac{1}{4}$) 를 만족한다. $g(x)$는 x축을 지남으로 $g(b)=g'(b)=0$ $(c<b<4)$ 이면서 $\lim_{x \to b+} g'(x)>0$, $\lim_{x \to b-} g'(x)>0$ 인 b가 존재해야한다.

집합 $\{-1,1,b\}=\{g(1)+2, f(1), f(1)-1\}$임으로 $g(1)+2 \ne f(1) \ne f(1)-1$ 를 만족하며 $g'(k)=0$ 인 k의 개수는 3개이다. $\frac{1}{4}<x<1$ 에서 $g'(x)>0$ 라면 $\lim_{x \to 1+} g'(x)<0$ 임으로 다시 증가 해야한다. $\frac{1}{4}<x<1, 1<x<4$,$x=-1, x=1$ 에서 $g'(x)=0$ 인 점이 있어야 함으로 k의 개수가 4개 이상이 돼서 모순이다.

$\frac{1}{4}<x<1$ 에서 $g'(x)<0$ 이다. 같은 논리로 $-1<x<\frac{1}{c}$ 에서도 $g'(x)<0$, $g'(x)<0$ $(-1<x<1)$ 이다.

$g(x)$는 $x=-1$ 에서 극대 $x=1$에선 극소

$b< -1$ 인 경우 $0 \le g(1)<g(-1)$ 이다. $g(1)+2>0$임으로 $g(1)+2=1$ $g(1)=-1$ 임으로 모순이다.

$-1<b<1$인 경우 $\lim_{x \to b+} g'(x)<0$, $\lim_{x \to b-} g'(x)<0$ 임으로 모순이다.

$b>1$ 이며 $g(1)<g(-1)< -1$ 이다. $g(1)+2<1$ 임으로 $g(1)+2=-1$ $g(1)=-3$ 이다. $f(1)=1$ 인 경우 $b=0$임으로 모순 $f(1)=2$ $b=2$ 이다.

$M(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(g(t))}{x-g(t)}$라 하면 $M(t)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(g(t))}{x-g(t)} & (x\neq g(t))\\ f'(t) & (x=g(t))\end{cases}$ $g(1)=-3$ 임으로 $M(1)=\frac{f(1)-f(-3)}{4}$이다.

$\frac{f(x)-f(g(x))}{x-g(x)}\leq f'(4)$ 임으로 $M(1)\leq f'(4)$, $t=4$에서 $M(4)=f'(4)$이다. $0<t\leq 4$에서 $M(1)$은 최댓값을 가짐으로 $M(1)=f'(4)$

$(1,f(1))\,(-3,f(-3))\,(d,f(d))$ 를 지나는 직선을 $px+q$라 하면 $f(x)=(x+3)(x-1)(x-d)+px+q$ 이다.

$g(x)=0$이라면 $g'(x)=0$ 이여야 함으로 $g(2)=0$이외에 영점은 존재할수 없다. $f(-2)=2$ 이다.

$f(1)=p+q=2$, $f(-2)=3d-2p+q+6=2$, $f'(4)=10(4-d)+21+p=p$ $d=\frac{61}{10}$, $p=\frac{81}{10}$, $q=-\frac{61}{10}$ 이다.

$f(x)=(x+3)(x-1)(x-\frac{61}{10})+\frac{81}{10}x-\frac{61}{10}$ $f(6)=\frac{486-(61+45)}{10}=\frac{380}{10}=38$ 답은 1번이다. $g(x)$의 거시적 그래프는 다음과 같다