제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

2. 함수 $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

9 + 4

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{4} (2a_k - k) = 0$ 일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2S = 10 S = 5

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & (x < 1) \\ x^2 - 3x + a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1 = a - 2

5. 함수 $f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$3 \quad -1$

$1 \quad 3$

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_a b=3,\quad \log_3 \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$

을 만족시킬 때, $\log_9 ab$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

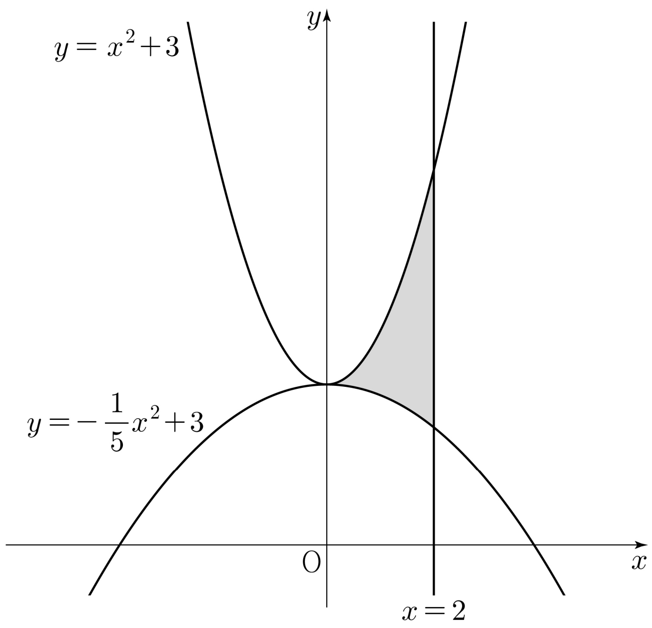
$\log_a \sqrt{3}a = 3$

$a^3=\sqrt{3}a \quad a^2=\sqrt{3}$

$\log_9 \sqrt{3}a^2 =$

7. 두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{33}{10}$ ⑤ $\frac{16}{5}$



$$\int_0^2 \frac{6}{5}x^2\,dx = \frac{2}{5}x^3\Big|_0^2$$

8. $\sin\theta + 3\cos\theta = 0$이고 $\cos(\pi - \theta) > 0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$-\cos\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta < 0$

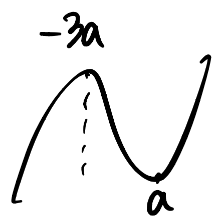
9. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 4$$

라 하자. 직선 $y = 5$가 곡선 $y = f(x)$에 접할 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2$
$= 3(x^2 + 2ax - 3a^2)$
$= 3(x-a)(x+3a)$



$f(-3a) = \cancel{-27a^3 + 27a^3} + 27a^3 + 4$

$a = \frac{1}{3}$.

$f(2) = 8 + 4 - 2 + 4$

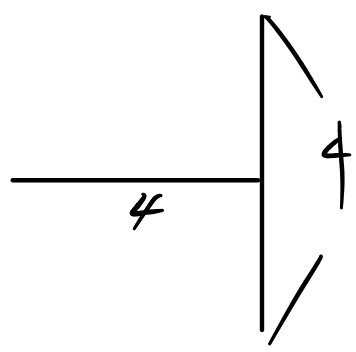
10. 상수 $a\,(a > 1)$에 대하여 곡선 $y = a^x - 2$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 B, 곡선 $y = a^x - 2$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC}$이고 삼각형 AOC의 넓이가 8일 때, $a \times \overline{OB}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $2^{\frac{13}{6}}$ ② $2^{\frac{7}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$ ④ $2^{\frac{8}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{17}{6}}$

$A(t,\ a^t - 2)$
$B(t,\ 0)$
$C(t,\ -2)$

$a^t = 4$

$t = 4$



$a^4 = 4$

$a = 2^{\frac{1}{2}}$ $\quad 2^{\frac{1}{2}+2}$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-kt+4$$

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}kt^2 + 4t$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{13}{3}$이다.

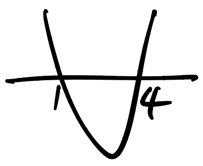
ㄴ. $k=3$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

$t^2-3t+4=0$

ㄷ. $k=5$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$(t-1)(t-4)$



$x(1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6}$

$x(2) = \frac{8}{3} - 10 + 8 = \frac{2}{3}$

$\frac{11}{6} + \frac{11}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{9}{3}$

12. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2(a_1+a_4+a_7)=a_4+a_7+a_{10}=6$$

3

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ $\frac{30}{7}$ ⑤ $\frac{32}{7}$

$2k = k \cdot r^3 = 6$

$k=3,\ r^3=2.$

$2 \times (a_1 + 2a_1 + 4a_1) = 6$

$2 \times 7a_1 = 6$

$a_1 = \frac{3}{7}$

13. 함수 $f(x)=x^2-4x-3$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -6)$에서의 접선을 l이라 하고,
함수 $g(x)=(x^3-2x)f(x)$에 대하여
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선을 m이라 하자.
두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 21 ② 28 ③ 35 ④ 42 ⑤ 49

$f(1)=-6.\ f'(1)=-2$

$-1 \quad -6$

$1 \quad -2$

$g'(1)=-4$

$l: y=-2x-4$

$m: y=-4x+10$

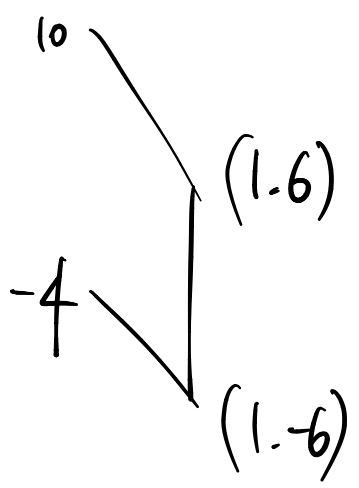
$-2x-4=-4x+10$

$2x=14 \quad x=7$

$(7.\ -18)$

$\frac{1}{2}\times 6\times 12=36$?

씨발.



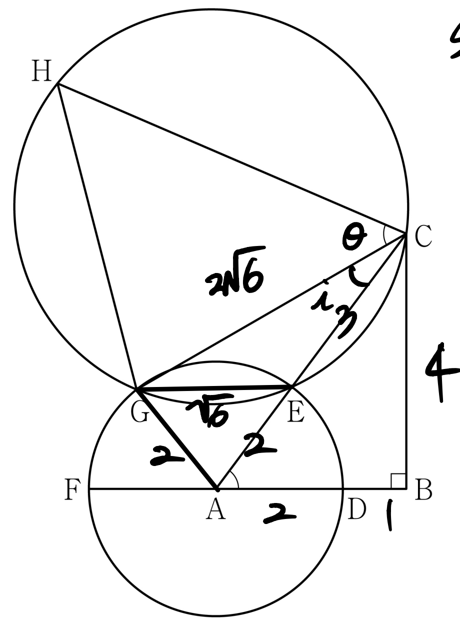
$\frac{1}{2}\times 7\times 14=49$

(나중에 발견) 넓이 36 나온 삼각형이랑 구해야 되는 삼각형이 6:7 닮음이라 정답 49 얻을 수도 있네.

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{\mathrm{CG}}=2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle\mathrm{HCG}=\angle\mathrm{BAC}$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는? [4점]

$\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$



① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{38\sqrt{10}}{25}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$ ④ $\frac{32\sqrt{15}}{25}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

$\cos i=\frac{24+25-4}{2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 5}=\frac{9}{4\sqrt{6}}$

$\sin i=\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{6}}$

$\overline{GE}^2=24+9-\cancel{2\cdot 2\sqrt{6}}\cdot 3\cdot\frac{9}{\cancel{4\sqrt{6}}}=6$

$2R=\frac{24}{\sqrt{15}}=\frac{4\times(\mathrm{Ans})}{4}$

$(\mathrm{Ans})=\frac{4\times 6\times 4}{5\times\sqrt{15}}$

$=\frac{32\sqrt{15}}{25}$

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x\ge 0) \end{cases}$$

연속

이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1\le x<1) \\ ax-a & (x\ge 1) \end{cases}$$

연속

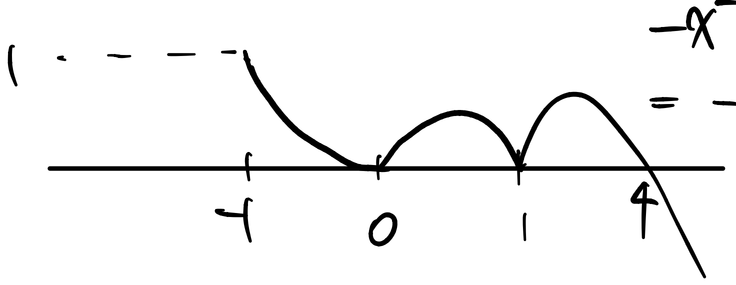
이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x \left(g(t)-f(t)\right)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자. $a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은? [4점]

$a>0$ $k=4$

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

$$h'(x)=g(x)-f(x)=\begin{cases} x^2+ax+a & (-\infty,\ -1) \\ x^2 & (-1,\ 0) \\ -x^2+x & (0,\ 1) \\ ax-a-x^2+x & (1,\ \infty) \end{cases}$$

$-x^2+5x-4$
$=-(x-1)(x-4)$



$$h(3)=\int_0^1(-x^2+x)\,dx+\int_1^3(-x^2+5x-4)\,dx$$

$=\frac{7}{2}$ (계산과정 드러워서 지움)

(Ans) $=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=n^2a_n+1$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

9

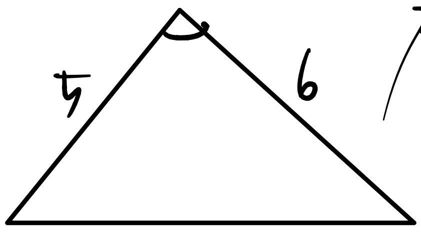
$a_2=a_1+1=2$
$a_3=4a_2+1=9$

17. 함수 $f(x)=4x^3-2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=4$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

16

x^4-x^2+4

18. $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$이고 $\cos(\angle BAC)=-\frac{3}{5}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]



$\frac{1}{2}\times 5\cdot 6\cdot\frac{4}{5}$

12

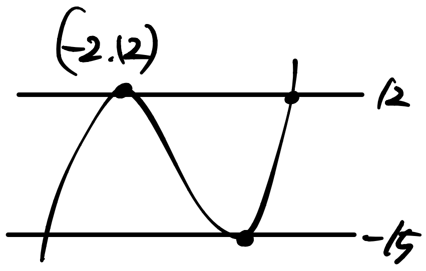
$-16+12+24-8$

19. $-2\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-k\le 2x^3+3x^2-12x-8\le k$$

가 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

$y'=6x^2+6x-12$
$=6(x-1)(x+2)$



$y(1)=2+3-20=-15$

15

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1=7$
- 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10$$

이다.

$7+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{6}+10$

다음은 $\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$의 값을 구하는 과정이다.

$\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{3}+3,\ a_2=1+9=10$

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{(가)}$$

$\frac{1}{6}\cdot(2n+1)-\frac{1}{6}=\frac{n}{3}$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{(가)}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$=n$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\ (n\ge 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_2=\boxed{(나)}\ 10\qquad\cdots\cdots ㉡$$

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$
$$=\boxed{(다)}$$

이다.

$17+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)=17+35=52$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{p\times q}{f(12)}$의 값을 구하시오. [4점]

$f(n)=\frac{n}{3}$

$\frac{10\times 52}{4}=130$

우당탕탕 풀더니 가독성 너무 안 좋아서 다듬음

최초 풀이에서 내용적으로 크게 다를 건 없음.

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

$f(t)=0$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.
>
> $g(0)=g(2)=0 \Rightarrow f(0)=f(2)=0$
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다. $=A \in \mathbb{N}$

$g(-1)>0,\ g(1)<0$

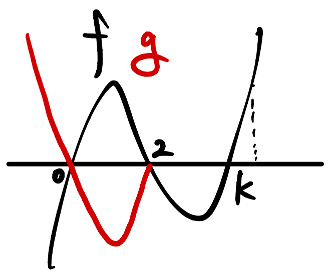
$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

$1 \in A\,? \Rightarrow g(1)>0\,?$ 아님. $1 \notin A$

$2 \in A\,? \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{g(x)}{x-2}<0\,?$ 모름.

$n\ (n>2) \in A \Leftrightarrow g(n)<0$

$g(n)<0$ 인 $n>2$가 1개 or 2개

(i) 

$t=2.\ \ 3<k\leq 4$

$A=\{2.\ 3\}$

$f(x)=ax(x-2)(x-k),\quad g(x)=\begin{cases} -f(x) & x<2 \\ f(x) & x\geq 2 \end{cases}$

$g(-1)=a\cdot 3\cdot(k+1)=3 \Rightarrow a=\frac{3}{14}$

$-\frac{7}{2}g(1)=\frac{7}{2}\cdot a\cdot(k-1)=2$ $\qquad \frac{7}{2}\times\frac{3}{14}\times\frac{8}{3}=2$ 맞네.

$\frac{6k+6}{7k-7}=\frac{3}{2}$ or $\frac{2}{3}$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$21k-21=12k+12$

$9k=33$

$\boxed{k=\frac{11}{3}}$ or 안 되겠지 씨발.

$\Uparrow$

$(3.\ 4]$

$g(-5)=\frac{3}{14}\times 5\times 7\times\frac{26}{3}=65$

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\,b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$A(a.b)\quad A'(b.a)\quad B(bk.ak)$

$a+bk=\frac{77}{4}\qquad ak+b=\frac{133}{4}$

$(a+b)(k+1)=\frac{105}{2}$

$\boxed{b=\log_{16}(8a+2)}$

$ak=4^{bk-1}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow ak+\frac{1}{2}=4^{bk-1}$

$\Rightarrow bk-1=\log_4\left(ak+\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{bk=\log_4(4ak+2)}$

$k=2$

$2a+4b=\frac{154}{4}$

$2a+b=\frac{133}{4}$

$3b=\frac{21}{4}$

$b=\frac{7}{4}$

$a=\frac{63}{4}$

$420+21$

$\frac{441}{16}$

457

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

21번 케이스 분류 다 따져보려다 알게 된 것.

$f(x) = ax(x-2)(x-k)$ $(a>0)$라 하자.

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\right\}$ ~~이다~~. $A \in \mathbb{N}$

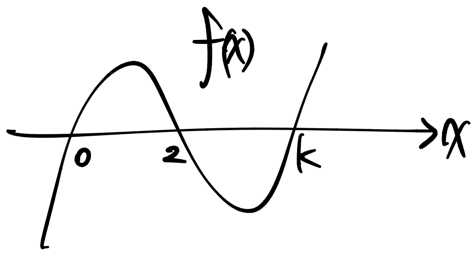
$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

$f(x)$가 $(2, \infty)$에서 단조증가하면 (즉, $k \leq 2$이면)

$1 \notin A$. $\forall n\ (n>2) \notin A$이므로 $(\because \forall n > 2,\ g(n) > 0)$

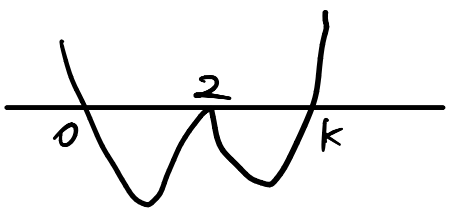
$n(A) = 2$일 수 없다.

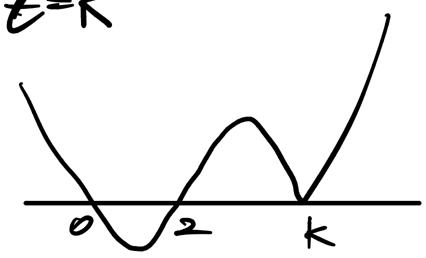
그러니까 $k > 2$가 바로 나온다.



여기서 $g(-1) > 0$, $g(1) < 0$이 되려면

$t=2$ 또는 $t=k$





⇒ 이 경우 $A = \emptyset$

22. 곡선 $y = \log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$와 곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$일 때, $a \times b = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=1$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{17}{20}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

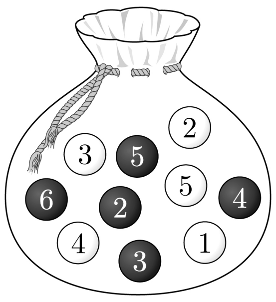
$\frac{2}{5}+x-\frac{1}{10}=1$

$x=1+\frac{1}{10}-\frac{4}{10}$

25. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{7}{15}$　② $\frac{8}{15}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{11}{15}$

1 − 다른색 다른 숫자



$_5C_1 \times {}_5C_1$

-4

$1 - \frac{7}{15}$

26. 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $1.2 \le m \le a$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.1　② 5.2　③ 5.3　④ 5.4　⑤ 5.5

$a - 1.2 = 2 \times 2.58 \times \frac{5}{6}$

$= \frac{25.8}{6} + 1.2$

$= 4.3 + 1.2$

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{|2x-1|}{12} & (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ a & (x=4)\end{cases}$$

일 때, $\mathrm{V}\left(\frac{1}{a}X\right)$의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

0	1	2	3	4
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$

$36\ V(X) = ?$

$E(X) = \dfrac{1+6+15+8}{12} = \dfrac{5}{2}$

×1 ×2 ×3 ×4

$E(X^2) = \dfrac{1+12+45+32}{12} = \dfrac{15}{2}$

$V(X) = \dfrac{15}{2} - \dfrac{25}{4} = \dfrac{5}{4}$

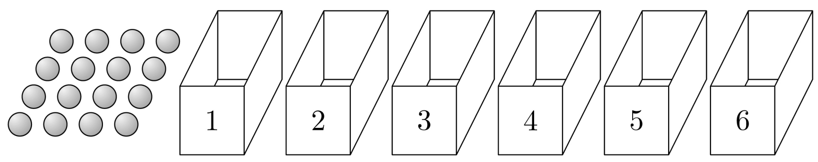
28. 16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 홀수이면
> 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
> k가 짝수이면
> k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

$k=2 \Rightarrow 1.2$ / $k=4 \Rightarrow 1.2.4$ / $k=6 \Rightarrow 1.2.3.6$

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$



분모 = (1345) 홀수 번 (26) 홀수 번

$= 4 \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{2}{6}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 \times \left(\frac{2}{6}\right)$

분자 = 6 3번 홀수 1번 or 4 1번 홀수 2번 6 1번

$= 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{3}{6}\right) + \frac{4!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{3}{6}\right)^2$

$\frac{4}{6^4}$ 약분 $\Rightarrow \dfrac{3+3^3}{32+128}$

$= \dfrac{30}{160} = \dfrac{3}{16}$

단답형

29. 6 이하의 자연수 a에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같으면 $\frac{a}{6} \times \frac{10}{32}$
> 동전을 5번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고,
> 나온 눈의 수가 a보다 크면 $\frac{6-a}{6} \times \frac{1}{8}$
> 동전을 3번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다.

이 시행을 19200번 반복하여 기록한 수가 3인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X) = 4800$일 때, $\mathrm{P}(X \le 4800 + 30a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k이다. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

$p = \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$ ∴ $\frac{a}{6} \times \frac{10}{8} + \frac{6-a}{6} \times \frac{4}{8} = 1$

$10a + 24 - 4a = 48$

$a = 4$

$B\left(19200, \frac{1}{4}\right)$ $\sigma^2 = 4800 \times \frac{3}{4} = 60^2$

$4800 + 30a = m + 2\sigma$

977

30. 비어 있는 주머니 10개가 일렬로 놓여 있고, 공 8개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(i) (ii)

> (가) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.
> (나) 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

(i) 1.1.1.1.2.2.0.0.0.0.

V0V0V0V0V

빈 주머니 열 다섯 자리 중 2 주머니 두 자리 선택 $\Rightarrow {}_5C_2$

남은 세 자리에 1 주머니 4개 넣기 $\Rightarrow {}_3H_4$

(i) : ${}_5C_2 \times {}_3H_4 = 150$

(ii) 1 1 1 1 1 1 2 0 0 0

V0V0V0V

빈 주머니 열 네 자리 중 2 주머니 한 자리 선택 $\Rightarrow {}_4C_1$

남은 세 자리에 1 주머니 6개 넣기 $\Rightarrow {}_3H_6$

(ii) : ${}_4C_1 \times {}_3H_6 = 4 \times 28 = 112$

262

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{2x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-\sin^{3}x}\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$\int \sqrt{\sin x \cos^{2}x}\,dx$$

$$\int_{0}^{1}\sqrt{t}\,dt \qquad \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}$$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

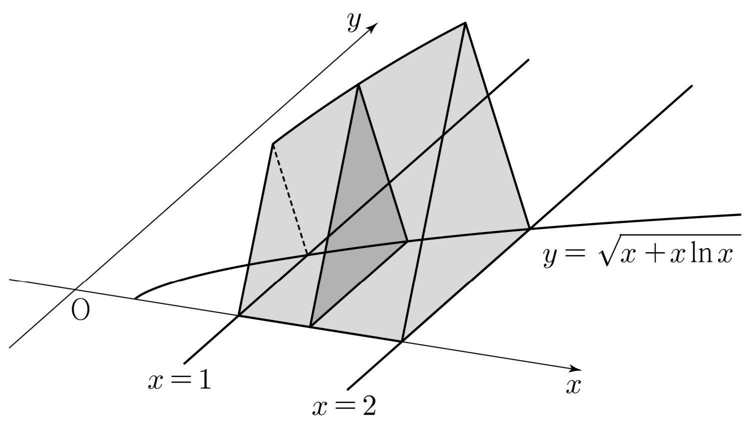
$$\sqrt{9n^2-5}+2n < a_n < 5n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$a_n = 5n$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+x\ln x}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$ ② $\frac{\sqrt{3}(5+12\ln 2)}{24}$ ③ $\frac{\sqrt{3}(1+12\ln 2)}{16}$

④ $\frac{\sqrt{3}(1+2\ln 2)}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}(1+9\ln 2)}{12}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 (x+x\ln x)\,dx$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\int_1^2 \underset{v'}{x}\,\underset{u}{\ln x}\,dx$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times I=?$$

$$I=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{2\sqrt{3}\ln 2}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$\frac{3\sqrt{3}+8\sqrt{3}\ln 2}{16}$$

$f'(x) = x-1+\frac{1}{x+1}$

$f'(s) = s-1+\frac{1}{s+1} = \frac{s^2}{s+1} > 0$

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = e^{4t}(1+\sin^2 \pi t),\quad y = e^{4t}(1-3\cos^2 \pi t)$$

를 C라 하자. 곡선 C가 직선 $y = 3x - 5e$와 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$ ② $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$ ③ $\frac{3\pi}{\pi+8}$ ④ $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$ ⑤ $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

$e^{4t}(3+3\sin^2 \pi t) - 5e$

$= e^{4t}(1-3\cos^2 \pi t)$

$e^{4t} \times 5 = 5e \qquad t = \frac{1}{4}$

$$\frac{\frac{dy}{dt} = e^{4t}(6\pi\cos \pi t \sin \pi t) + 4e^{4t}(1-3\cos^2 \pi t)}{\frac{dx}{dt} = e^{4t}(2\pi\cos\pi t \sin \pi t) + 4e^{4t}(1+\sin^2 \pi t)}$$

(답 맞는데 28번 공간을 위해 계산 과정 지움)

$f(3) = \frac{3}{2} + 2\ln 2 \qquad f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2$

$I' = \int_1^3 f(x)\,dx$

$= \frac{26}{6} - \frac{8}{2} + x\ln x - x \Big|_2^4$

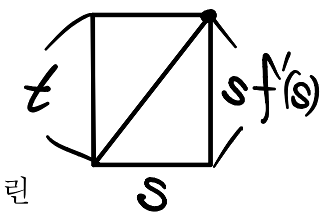
$= \frac{1}{3} + 4\ln 4 - 2\ln 2 - 2$

$= 6\ln 2 - \frac{5}{3}$

28. 함수

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))\ (s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$의 값은? [4점]



① $\frac{161}{12}+\ln 3$ ② $\frac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\frac{53}{4}+\ln 2$ ④ $\frac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\frac{157}{12}+\ln 2$

$\frac{1}{2} = \frac{s^3}{s+1}\Big|_{s=1} \qquad \frac{27}{4} = \frac{s^3}{s+1}\Big|_{s=3} \qquad g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad g\left(\frac{27}{4}\right) = 3$

$f'(g(t)) \cdot g(t) = t \qquad h(x) := g^{-1}(x)$

$h(1) = \frac{1}{2} \quad h(3) = \frac{27}{4}$

$x f'(x) = h(x)$

$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt = \int_1^3 x \cdot h'(x)\,dx$

$= x\,h(x)\Big|_1^3 - \int_1^3 h(x)\,dx$

$= 3 \cdot \frac{27}{4} - \frac{1}{2} - \int_1^3 x f'(x)\,dx$

$= \frac{79}{4} - x f(x)\Big|_1^3 + \int_1^3 f(x)\,dx$

$= \frac{79}{4} - 3f(3) + f(1) + I'$

$= \frac{79}{4} - 3\left(\frac{3}{2}+2\ln 2\right) - \frac{1}{2} + \ln 2 + 6\ln 2 - \frac{5}{3}$

$= \frac{79}{4} - \frac{9}{2} - 6\ln 2 - \frac{1}{2} + 7\ln 2 - \frac{5}{3}$

$= \frac{157}{12} + \ln 2$

단답형

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

$a_n = an$

> 어떤 자연수 k에 대하여
>
> $$b_{k+i} = \frac{1}{a_i} - 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$
>
> 이다.

$= \frac{1-ai}{ai}$

$b_{k+1} = \frac{1-a}{a} = 3$

$b_{k+2} = \frac{1-2a}{2a} = 1$

$b_{k+3} = \frac{1-3a}{3a} = \frac{1}{3}$

부등식

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30$$

$a = \frac{1}{4}$ $\quad r = \frac{1}{3}$

이 성립할 때, $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $a_1 \neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{1}{2} \times \frac{9b_2}{8}$

$\boxed{\frac{9b_2}{16} = ?}$

$0 < \frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} - 16 < 30$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ $\quad 16 < \frac{3b_1}{2} < 46$

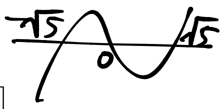
$= \frac{1}{16} \quad \frac{1}{n(n+1)} = 16 \quad \frac{32}{3} < b_1 < 46 \times \frac{2}{3}$

$b_1 = 27 \quad b_2 = 9$

97

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x(x^2-5)$



> (가) $|x| \leq 1$일 때, $4 \times \left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이다.
>
> (나) $|x| > 1$일 때, $\left|f^{-1}(x)\right| = e^{|x|-1} + 1$이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$이 $m = a,\ m = b\ (a < b)$에서 불연속일 때,

$g(a) \times \left(\lim_{m \to a+} g(m) \right) + g(b) \times \left(\frac{\ln b}{b} \right)^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) [4점]

$$h(x) := f^{-1}(x) = \begin{cases} -\left(e^{-x-1}+1\right) & (x < -1) & := h_1(x) \\ -\frac{x(x^2-5)}{2} & (-1 < x < 1) & := h_2(x) \\ e^{x-1}+1 & (x > 1) & := h_3(x) \end{cases}$$

기울기가 $\frac{1}{m}$이고 (0.1) 지나는 직선과 $y = f^{-1}(x)$

잠깐 멈추고 묻는 값 확인 : 아 씨발 그려야 됨?

(0.1)에서 $y = f^{-1}(x)$에 그을 수 있는 접선 개수 2

접선 기울기 각각 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ $(a < b)$

로 생각하고 싶음.

할 일 : $h(x) - 1 = xh'(x)$ 실근 찾기

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

단답형

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 자연수 k에 대하여
>
> $$b_{k+i} = \frac{1}{a_i} - 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$
>
> 이다.

부등식

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30$$

이 성립할 때, $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $a_1 \neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$h(x) := f^{-1}(x) = \begin{cases} -\left(e^{-x-1}+1\right) & (x<-1) & := h_1(x) \\ -\frac{x(x^2-5)}{2} & (-1<x<1) & := h_2(x) \\ e^{x-1}+1 & (x>1) & := h_3(x) \end{cases}$$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\frac{1}{2}x(x^2-5)$ $\frac{1}{2}$ 1 -4 1 2

> (가) $|x| \leq 1$일 때, $4 \times \left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이다.
>
> (나) $|x| > 1$일 때, $\left|f^{-1}(x)\right| = e^{|x|-1}+1$이다.

$h_2'(1) = 1$

$h_3'(1) = 1$

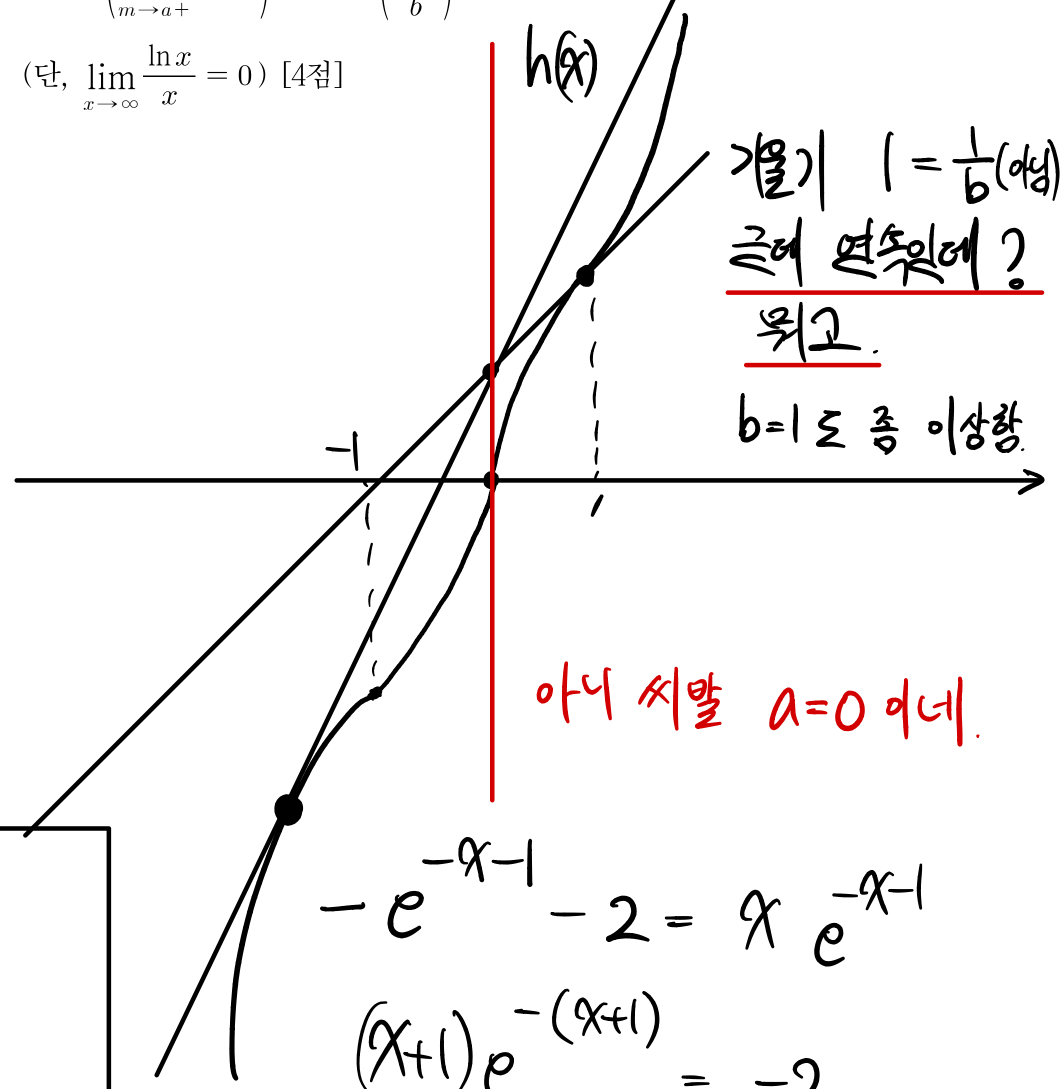
실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b\,(a<b)$에서 불연속일 때,

$$g(a) \times \left(\lim_{m \to a+} g(m) \right) + g(b) \times \left(\frac{\ln b}{b} \right)^2$$

의 값을 구하시오.

기울기 $\frac{1}{a}$ 아니고 $\frac{1}{b}$

(단, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) [4점]



기울기 $1 = \frac{1}{b}$(아님)

근데 연속인데? 뭐고

b=1 도 좀 이상함.

아니 씨발 a=0 이네.

$$-e^{-x-1} - 2 = x e^{-x-1}$$

$$(x+1)e^{-(x+1)} = -2$$

$$\frac{x+1}{e^{x+1}} = -2$$

$$\frac{x+1}{e^{x+1}} = -2 \text{ 일 때 } \frac{1}{b} = \frac{1}{e^{x+1}}$$

$$\ln b = -(x+1)$$

$$\left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = 4$$

$g(b) = 2$.

$g(a) = 1$

$\lim_{m \to a^+} g(m) = 3$ (0.1) 지나고 기울기 조나큰 양수

$\therefore$ (Ans) $= 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ -1)$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 포물선 $y^2=12(x-2)$의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

25. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}\left(3,\ -\frac{3}{2},\ -2\right)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

B $\left(-3,\ -\frac{3}{2},\ -2\right)$

C $\left(-3,\ \frac{3}{2},\ 2\right)$

26. 양수 a에 대하여 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ 위의 점 $(a,\ \sqrt{2}a)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=8$일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

F $(0,\ \sqrt{2}a)$ 주축 $2a$.

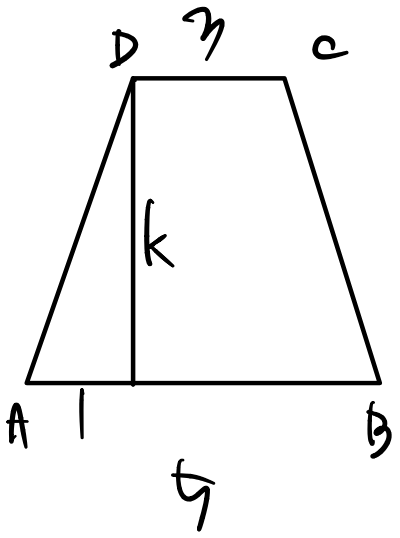
$\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{\sqrt{2}a}x}{\cancel{a^2}} = +1$ P $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$

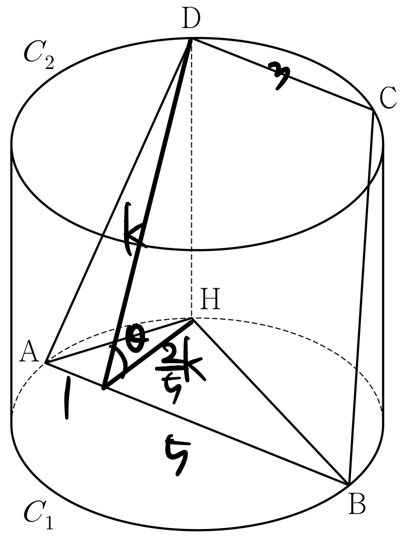
$\cancel{\frac{\sqrt{2}a}{2}} \times \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{2}a = 8$

$a^2 = 8 \times \frac{2}{3}$

최초 풀이 (교과 외)

27. 그림과 같이 지름의 길이가 5인 두 원 C_1, C_2를 두 밑면으로 하는 원기둥이 있고, 원 C_1 위의 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B와 원 C_2 위의 $\overline{CD}=3$인 두 점 C, D에 대하여 $\overline{AD}=\overline{BC}$이다. 점 D에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 ABH의 넓이의 4배일 때, 이 원기둥의 높이는? [3점]





① $3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{21}$ ⑤ $\sqrt{22}$

$4k = 4 \times k$

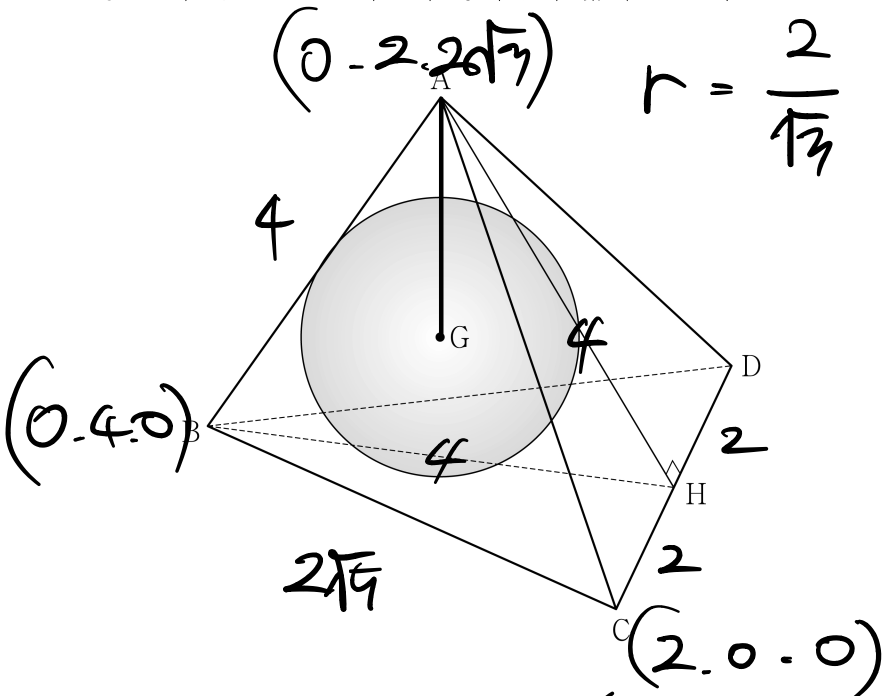
$k = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{2k}{5}$

$\cos\theta = \frac{2}{5}$

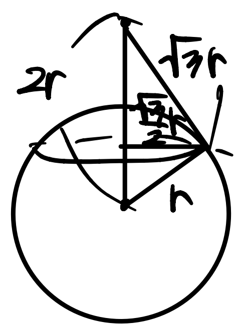
$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{BC}=\overline{BD}=2\sqrt{5}$인 사면체 ABCD가 있고, 점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발 H에 대하여 두 평면 ABH와 BCD는 서로 수직이고 $\overline{AH}=4$이다. 삼각형 ABH의 무게중심을 G라 하고, 점 G를 중심으로 하고 평면 ACD에 접하는 구를 S라 하자. $\angle APG = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 T라 할 때, 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

$r = \frac{2}{\sqrt{3}}$



① $\frac{\pi}{7}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{5}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$



$\frac{3}{4}r^2 = \pi$

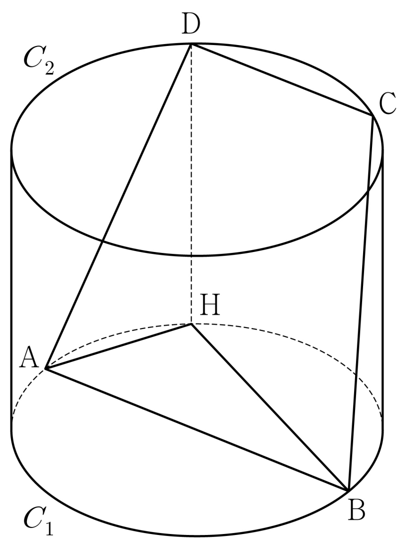
$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4\sqrt{3}} = 1$

$(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$

$\frac{1}{4}$

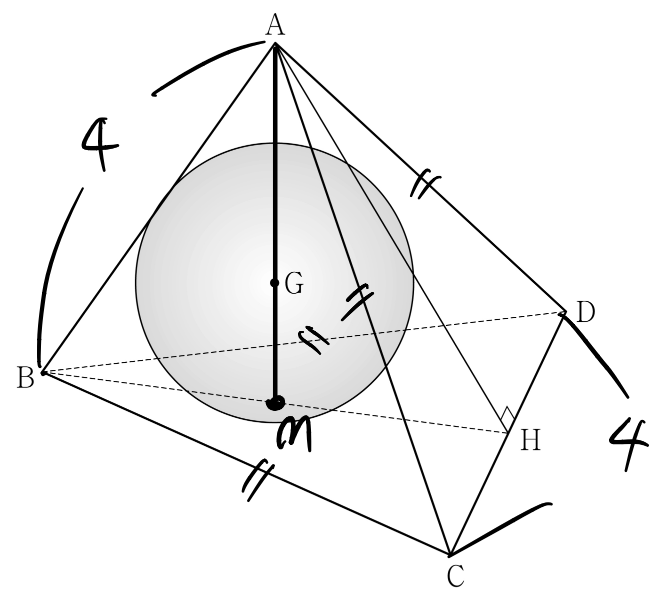
나중 풀이 (교과 내)

27. 그림과 같이 지름의 길이가 5인 두 원 C_1, C_2를 두 밑면으로 하는 원기둥이 있고, 원 C_1 위의 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B와 원 C_2 위의 $\overline{CD}=3$인 두 점 C, D에 대하여 $\overline{AD}=\overline{BC}$이다. 점 D에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 ABH의 넓이의 4배일 때, 이 원기둥의 높이는? [3점]



① $3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{21}$ ⑤ $\sqrt{22}$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{BC}=\overline{BD}=2\sqrt{5}$인 사면체 ABCD가 있고, 점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발 H에 대하여 두 평면 ABH와 BCD는 서로 수직이고 $\overline{AH}=4$이다. 삼각형 ABH의 무게중심을 G라 하고, 점 G를 중심으로 하고 평면 ACD에 접하는 구를 S라 하자. $\angle APG=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 T라 할 때, 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{\pi}{7}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{5}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

(Ans) = $S\cos\theta$ 에서 $S=\pi$ 알아내는 것까지는 최초 풀이와 같음..

T를 포함하는 평면과 평면 BCD가 평행함
두 평면 ABC, BCD 이루는 각의 크기?
정사영으로 구하는 게 가장 빠를 듯.
△CAB랑 △BCD가 합동임(넓이 같음)

$$\triangle BCm \text{ 넓이} = \frac{1}{2}\times(\triangle BCH \text{ 넓이})$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times(\triangle BCD \text{ 넓이})\right)$$
$$= \frac{1}{4}\times(\triangle BCD \text{ 넓이})$$

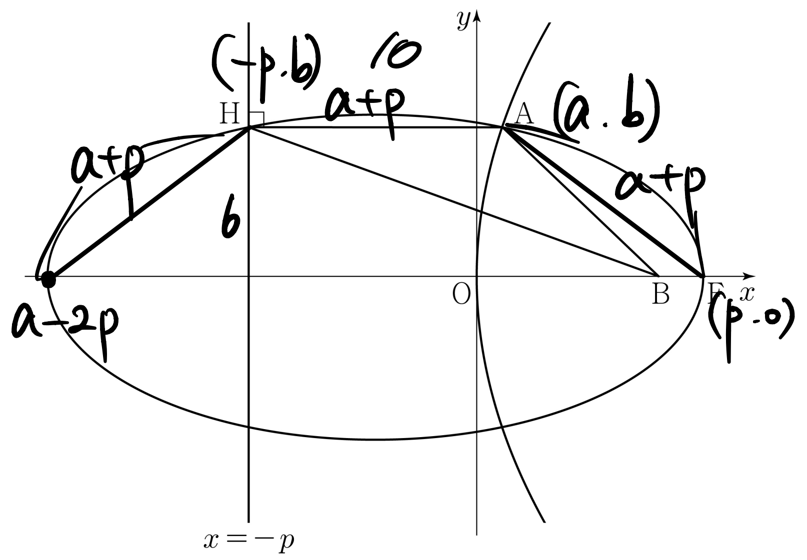
그래서 그냥 $\cos\theta=\frac{1}{4}$임.

처음 풀이

단답형

29. 그림과 같이 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)\,(p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 초점이 x축 위에 있고 세 점 F, A, H를 지나는 타원의 x좌표가 양수인 초점을 B라 하자. 삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$, 넓이가 $2p+12$일 때, 선분 HF의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]

a>0. b>0



장축 길이 2p-a ∴ 4p = p+27 p=9

(a+9) × √a = 10 a=1

$k^2 = 6^2 + 4p^2$

$= 36 + 324 = 360$

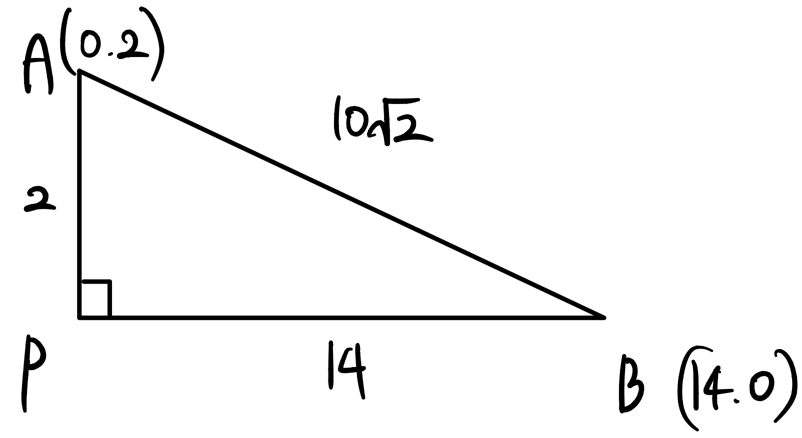
30. 좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가

Q (x.y)

$$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}) = 2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 14$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}}| = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $|\overrightarrow{\mathrm{QB}}|>0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2|y| = ?



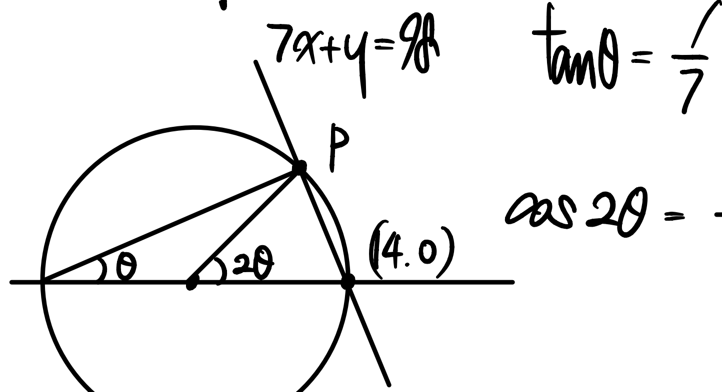
(7. 1) · (x+14. y) = $x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 7x + 98 + y = 14^2$

$(x-7)^2 + (y-1)^2 = 50$

⇒ 7x+98+y - 14x+49 - 2y+1 = 50

⇒ 7x+y = 98



$\tan\theta = \frac{1}{7}$

$\cos 2\theta = \frac{7^2-1^2}{7^2+1^2} = \frac{24}{25}$

$y = 14\sin 2\theta = 14 \times \frac{7}{25} = \frac{98}{25}$

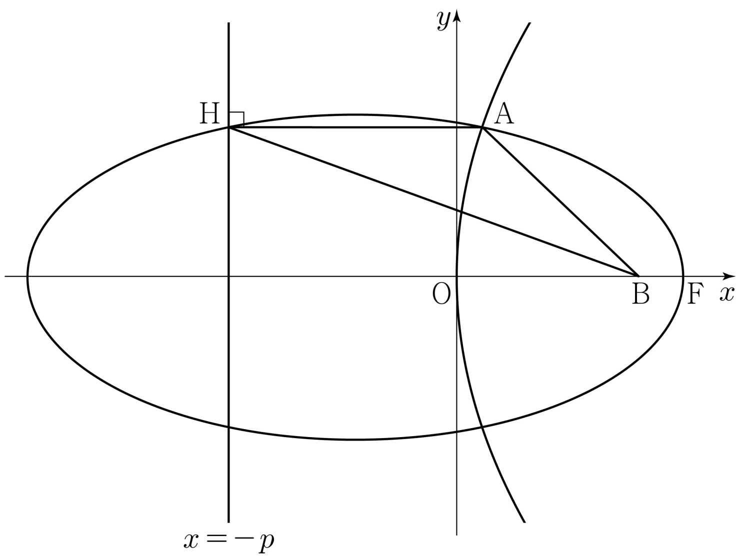
$2y = \frac{196}{25}$ ⇒ 221

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

나중 풀이

단답형

29. 그림과 같이 초점이 F$(p, 0)$ $(p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 초점이 x축 위에 있고 세 점 F, A, H를 지나는 타원의 x좌표가 양수인 초점을 B라 하자. 삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$, 넓이가 $2p+12$일 때, 선분 HF의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



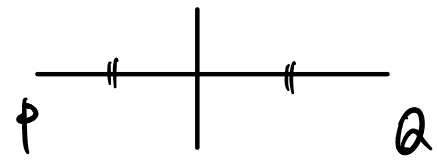
30. 좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PB}|=14$일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $|\overrightarrow{QB}|>0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB}) = |\overrightarrow{PQ}|^2$

$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PB} = 98$



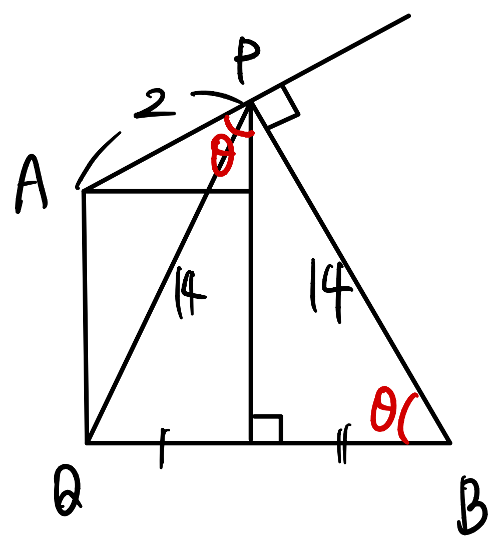
$\overline{OP}=\overline{OQ}$ 이므로

O는 $\overline{PQ}$ 수직이등분선 위의 점.

$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ} + 98 \Rightarrow \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}|^2 = 98$

$\boxed{\overline{PQ}=14=\overline{PB} \text{ 임}}$

그림 새로 그리기



$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QB}|^2 = \frac{1}{2}\times(28\cos\theta)^2$

임. $14\cos\theta = 2\sin\theta$

$\tan\theta = 7$. $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

임. $\frac{1}{2}\times 28^2 \times \frac{1}{50} = \frac{196}{25}$

221

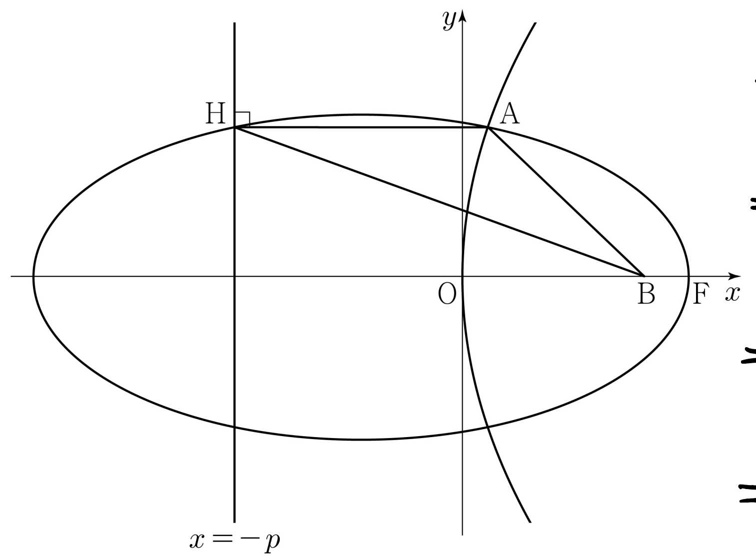
＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

최악 풀이 ($\overline{PQ} = \overline{PB}$ 나온 거 보고 뭔가 있지 않을까 해서..)

단답형

29. 그림과 같이 초점이 $F(p, 0)\ (p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 초점이 x축 위에 있고 세 점 F, A, H를 지나는 타원의 x좌표가 양수인 초점을 B라 하자. 삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$, 넓이가 $2p+12$일 때, 선분 HF의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



30. 좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PB}|=14$일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $|\overrightarrow{QB}|>0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB}) = |\overrightarrow{PQ}|^2$

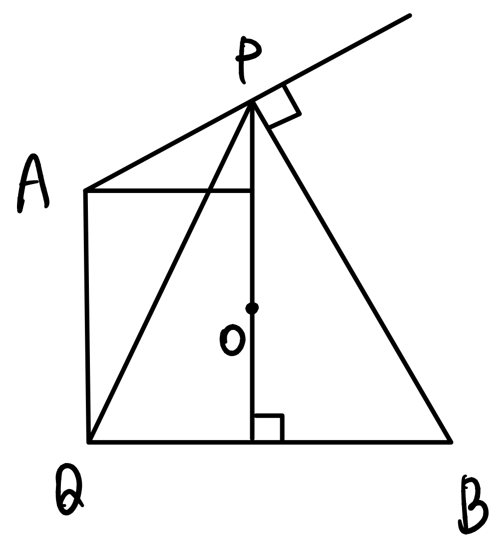
$\Rightarrow \overrightarrow{PO}\cdot(2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}|^2$

$\Rightarrow 2|\overrightarrow{PO}|^2 + \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + 2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PO} \perp \overrightarrow{QB}$

아니 시발 이 쉬운 걸 왜 못 봤음?



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.