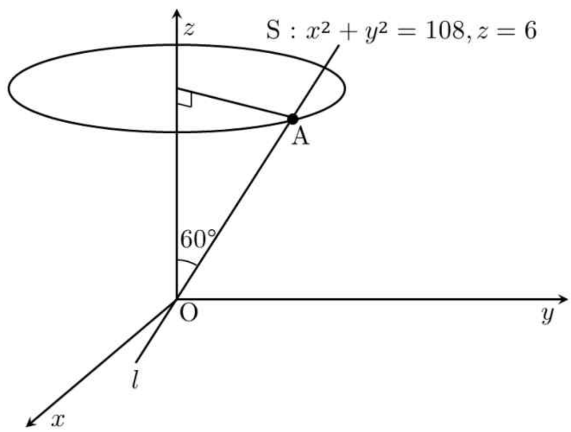
해설
정답: 72

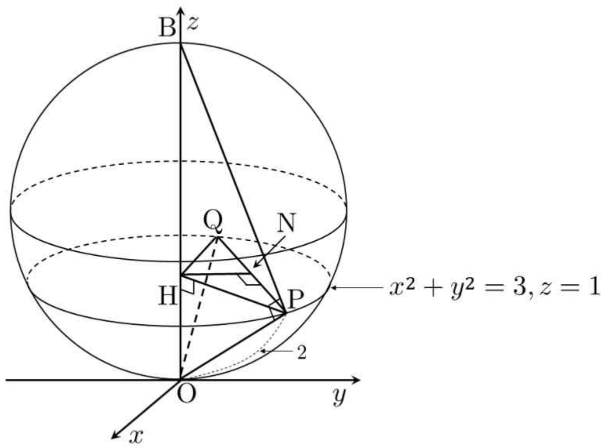
그림과 같이 점 가 평면 $=6$ 위에 있는 반지름이 $6\ \ 3$인 원 위에 있기 때문에 직선 OA가 z축과 이루는 각이 $60°$이다.



직선 OA와 구 C가 만나는 교점이 P이고 구 C와 z축이 만나는 점을 B라 하면 삼각형 OPQ는 직각삼각형이다. ($\because$ 선분 OA가 지름)

$OB=4$이므로 $\overline{OP}=2$ ($\because \angle BOP=60°$)

그림과 같이 점 P에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P는 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원의 자취이다.



조건 (나), (다)에서 $\vec{h}$는 xy평면의 법선 벡터이므로 $\vec{PQ}\cdot\vec{h}=0$을 해석하면

구 위의 점 Q는 점 P와 z성분이 같으므로 점 P의 자취위의 점임을 알 수 있다.

따라서 $\mathrm{HP}=\mathrm{HQ}=\sqrt{3}$이다.

삼각형 OPQ의 넓이를 구하면

삼각형 PQH는 이등변삼각형이므로 점 H에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 N라 하자.

점 O에서 평면 HPQ에 내린 수선의 발이 H이므로 삼수선의 정리에 의하여 직선 PQ와 직선 ON이 수직이다.

HN $(\quad 3) - 1^2 = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OH}} = 1$이고,

$\mathrm{ON} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$이다.

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \mathrm{PQ} \times \overline{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$이다.

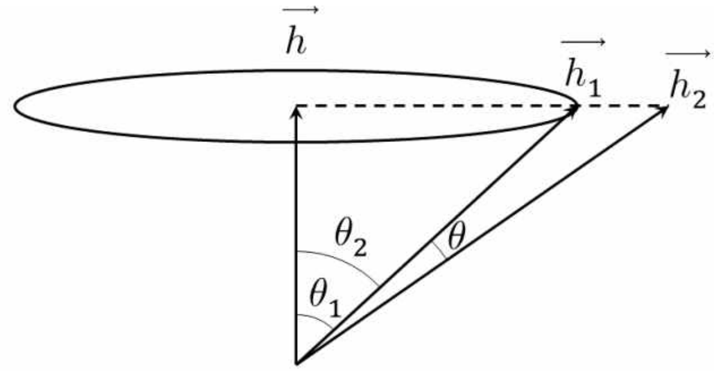
평면 PQH와 평면 PQ가 이루는 각을 θ_1이라 하면

$\cos\theta_1 = \frac{\overline{\mathrm{HN}}}{\mathrm{ON}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

이때, 평면 PQH는 xy평면과 평행하므로 평면 PQH의 법선벡터는 $\vec{h} = \ 0, 0, 1)$이다.

평면 OPQ의 법선벡터를 $\vec{h_1}$라 하고 평면 $x + y + z = 8$의 법선 벡터 $\vec{h_2} = (1,\ 1,\ 1)$라 하자.

평면 OPQ와 평면 $+y+z=8$이 이루는 각을 θ 라 할 때, 세 평면의 법선벡터가 이루는 그림은 다음과 같다. $(\theta_1 < \theta_2)$



두 평면 OPQ와 $x+y+z=8$가 이루는 각을 θ라 하면 θ가 최소가 될 때, 정사영 넓이가 최대가 되므로

$\theta = \theta_2 - \theta_1$일 때이다.

따라서 $\cos\theta$의 최댓값은

$$\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1 = \frac{3}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\left(\because \cos\theta_2 = \frac{\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h_2}}{\vec{h}\,| \times \ \vec{h_2}\,|} = \frac{1}{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

따라서 정사영의 넓이의 최댓값은

$$= \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = a$$

$\therefore 27 \times a^2 = 72$