

분위기 전환삼아 작년과 재작년 수능에 나왔던 수열 킬러 문제나 풀고 갑시다 ㅋ

2010년 11월 18일 2011학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (나형) 25번

25. 자연수 m 에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이
1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, ..., m 열에 m 개 쌓여
있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음
시행을 반복한다.

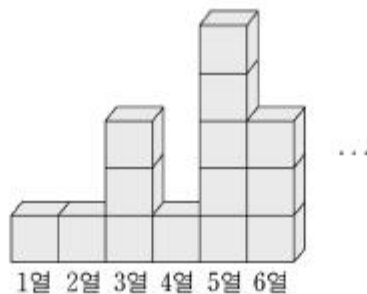
블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는
블록의 개수의 $\frac{1}{2}$ 만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m 열까지
남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$ 이라 하자.

예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$ 이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^{n+1}) - f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인
자연수이다.) [4점]



문제에서 구하라는 것은 $f(2^n)$ 자체가 아니라

그것들을 요리조리 변형시킨 $\frac{f(2^{n+1}) - f(2^n)}{f(2^{n+2})}$ 에다가 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 를 취한 것이죠.

그런데 이건 수 I 수열의 극한 단원에 속하는 문제입니다!

저 자체로는 부정형의 형태로 $\frac{\infty}{\infty}$ 나 $\frac{0}{0}$ 중 하나가 되어야겠고,

$f(2^n)$ 이 증가하고 있으니 $\frac{\infty}{\infty}$ 가 되겠죠?

이 때 극한값은

분모, 분자에서 각각 가장 크게 변하는 항들만의 계수 부분만 계산한 것입니다. ($\because$ 최고차항이란 개념은 다항식에서만 쓰임)

그러니까 뒤집어 말하자면 $\frac{f(2^{n+1}) - f(2^n)}{f(2^{n+2})}$ 의 형태를

꼼꼼하게 계산하는데 시간을 소모하지 않아도 된다는 것이죠.

이제 언급하고 있는 규칙들을 음미해봅시다.

마치 빨랫줄에 널린 옷들의 수분이 증발하듯이,

1부터 2^n 까지의 정렬된 자연수들에서

짝수 인자를 모조리 약분해버린 수열들의 합을 $f(2^n)$ 이라고 정의하고 있습니다.

여기서 두 가지 풀이로 가보겠습니다.

먼저 제 풀이부터...+_+!

sol.1)

홀수는 문제가 없는데, 짝수들이 골치 아프네요.

암튼 $f(2^n)$ 은 분명, 짝수들을 전부 1이 된다고 간주하고 쭈욱 계산한

$$g(2^n) = \{1 + 3 + 5 + \dots + (2^n - 1)\} + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1 + (2^n - 1)}{2} \times 2^{n-1} + n = 4^{n-1} + n \text{ 보다는 당연히 커야할 테고,}$$

짝수들을 약분하지 않고 그대로 계산한

$$h(2^n) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2^n = \frac{2^n(2^n + 1)}{2} \text{ 보다는 당연히 작아야 겠죠?}$$

이걸로 $f(2^n)$ 의 윤곽이 $p \cdot 4^n + q(n)$ 으로 드러났네요!

여기서 p 는 적절한 양수이고,

$q(n)$ 은 $p \cdot 4^n$ 보다 영향력이 작아서 무시해도 될 부분들입니다.

이걸 $\frac{f(2^{n+1}) - f(2^n)}{f(2^{n+2})}$ 에 대입하되 **최고차항(!)만 끄집어내서 계산해보면**

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^{n+1}) - f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \frac{4p - p}{16p} = \frac{3}{16}$$

sol.2)

1 열부터 2^n 열까지 블록이 몇 개 남는지 보면

1, $\boxed{1}$, 3, $\boxed{1}$, 5, 3, 7, $\boxed{1}$, 9, 5, 11, 3, 13, 7, 15, $\boxed{1}$, ...

이 때 다시 $f(2^n)$ 을 나열해봅시다.

$\{f(2^n)\} : 2, 6, 22, 86, \dots$

규칙이 잘 보이시나요?

함수를 분석하기 위해선 미분을 하면 되지만,

수열을 분석하기 위해선 계차를 따져주면 됩니다.

그래도 규칙이 안 보이면 보일 때까지 계차의 계차의 ... 계차를 구하면 되구요.

$\{f(2^{n+1}) - f(2^n)\} : 4, 16, 64, \dots, 4^n, \dots$

이렇게 보이네요.

따라서 $f(2^n)$ 을 구해보면

$$f(2^n) = 2 + \frac{4 \cdot (4^{n-1} - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n + 2}{3}$$

...

결국 sol.1) 과 동일한 결과를 얻네요.

당시 나형 응시했던 분들이 이 한 문제를 놓고 50분 동안 고민하다가
그래도 안 풀려서, 100과 관련된 50을 찍어 맞췄다는 일화도 있습니다. ㅋ
다른 문제들에 비해서 확실히 이 문제가 변별력이 있었지요.

2009년 11월 12일 2010학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (나형)

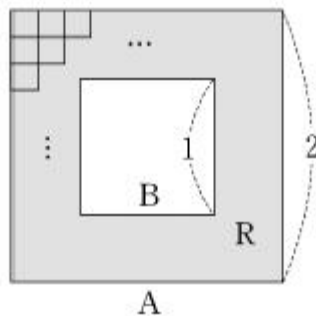
25. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n 에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$ 인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

- (가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
(나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$ 인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어,

$a_2 = 12$, $a_3 = 20$ 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = c$ 라 할 때, $100c$ 의 값을 구하시오. [4점]



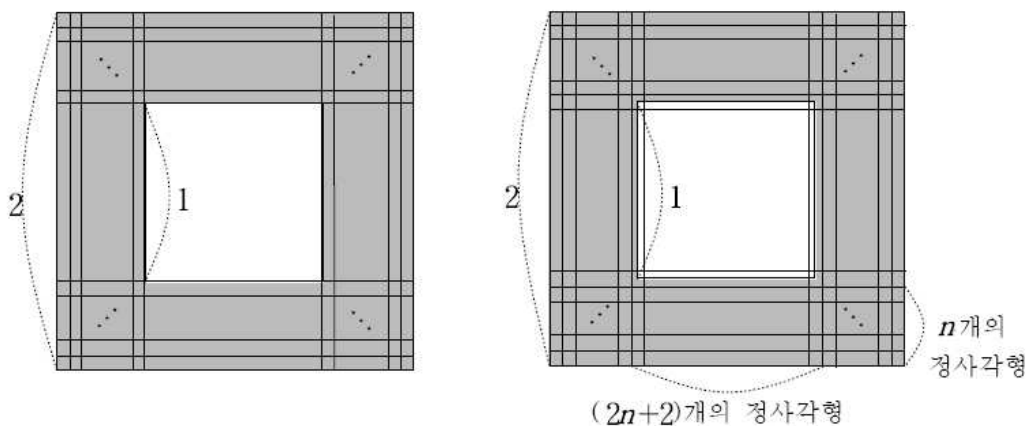
sol)

문제를 잘 읽어보고 어떤 상황인지를 파악했다면,

$a_{2n} = (2n)^2 - n^2 = 3n^2$ 임은 금방 알 수 있습니다.

바깥 부분에서 안쪽의 빠지는 부분을 빼면 되죠.

하지만 홀수항 a_{2n-1} 의 경우가 그렇게 쉽게 구해지질 않네요.



위에꺼 EBS 해설에 나온 그림이기도 합니다만,

수능 시험장에서 이러한 발상을 떠올리기가 부담스럽겠죠?

물론 그렇게 생각 안하고도 다른 방식으로 풀 수 있고,

그래서 이제 그 방법을 소개하려 합니다.

약간 과장해서 두 줄 만에 풀 수 있는 풀이 말이죠.. ㅇ_ㅇ;

문제를 잘 보면 a_{2n-1} 과 a_{2n} 의 구체적으로 **꼭!!!!** 구하란 게 아니라,

그걸 가지고 요리조리 변형한 식 $\frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}}$ 에다 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 취한 값을 묻고 있네요.

(결국 작년 수능 기출도 이 문제랑 거의 비슷하고,

이 문제와 비슷한 기출 문제들 또한 여러 번 나왔었는데, 차차 소개하겠습니다.)

그러면 홀수항 a_{2n-1} 이라고 해서 짝수항 $a_{2n} = 3n^2$ 과 판이하게 다른 모양일까요?

적어도 이 문제에선 a_{2n-1} 또한 n 에 관한 이차식이어야만 함을

직관적으로 느껴야 하고, 그게 사고의 물꼬를 트게 해줍니다.

만약 a_{2n-1} 의 최고차항의 차수가 이차보다 크다면 $c = -1$ 이 될테고,

이차보다 작아도 마찬가지로 $c = -1$ 이 됩니다.

그러면 주관식 답안으로 부적합하구요.

따라서 a_{2n-1} 은 n 에 관한 이차식이고,

거기다 최고차항은 a_{2n} 과 마찬가지로 $3n^2$ 이어야 합니다.

그래야 분모의 항들과 분자의 항들이 적절히 상쇄되면서
주관식 답으로 적합하게 하는 c 를 구하게 되겠죠?

고로 $a_{2n-1} = 3n^2 + bn + c$ 라고 추측할 수 있습니다.

$a_{2n} = 3n^2$ 과 슷비슷비 하면서도,

주어진 상황으로 인해서 약간 보정된 형태 말이죠!

그리고 다시 한 번 준 식에서의 분모와 분자를 주목해 보면,

분모는 연속한 홀수항과 짝수항 간의 계차,

분자는 연속한 짝수항과 홀수항 간의 계차의 형태입니다.

그렇담 분모, 분자 각각이 n 에 관한 일차식(or 등차수열) 내지는
 n 에 관한 상수항(or 상수열)이 되어야 겠군요!

조금만 그림에다 그렸다 지웠다 하면서 확인해보면

$\{a_n\} : 0, 12, 20, 48, 64, \dots$

임을 알 수 있습니다.

(실제론 a_5 구할 때만 시간이 조금 걸리겠네요.)

그리고,

$$\{a_{2n+1} - a_{2n}\} : 8, 16, \dots \rightarrow a_{2n+1} - a_{2n} = 8n$$

$$\{a_{2n} - a_{2n-1}\} : 12, 28, \dots \rightarrow a_{2n} - a_{2n-1} = 16n - 4$$

에서 $c = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있습니다.

그러니까 두 줄 풀이는

$$a_{2n} = (2n)^2 - n^2 = 3n^2$$

$$\{a_n\} : 0, 12, 20, 48, 64, \dots$$

정도만 쓰고, 그 밖에 위에서 언급한 내용들을 암산으로 처리해서

$c = \frac{1}{2}$, $100c = 50$ 을 이끌어 내는 것이죠.

지면 관계상 유사 기출문제 출처만 말하자면..

2007년 10월 10일 교육청 수리 (가형) 17번

2008년 09월 04일 Kice 2009 대수능 9월 모의평가 수리 (나형) 24번

2009년 03월 11일 교육청 수리 (나형) 25번

2009년 04월 14일 교육청 수리 (나형) 11번

2009년 07월 14일 교육청 수리 (나형) 30번

2010년 07월 08일 교육청 수리 (나형) 28번

2010년 10월 14일 교육청 수리 (나형) 16번

2010년 10월 14일 교육청 수리 (나형) 24번

이정도 있네요.

대부분이 적절히&충분히 분석을 잘~ 한다면,

문제에서 요구하는 형태에 맞춰 식을 정확하게 끼워 맞춘 후 극한을 취하지 않더라도

최고차항(!)만 끄집어 내어서 빠르게 계산 해낼 수 있는 문제들입니다.

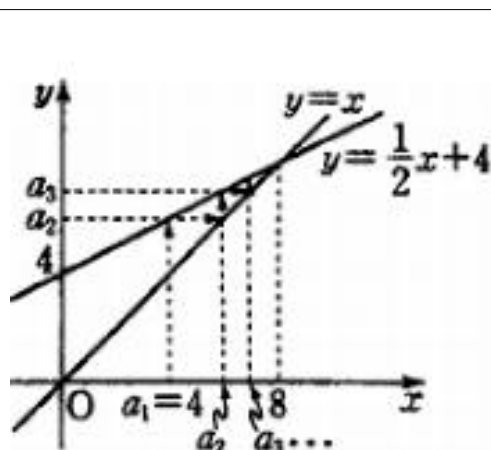
그래서 꽤 많은 시간을 다른 문제에 할애할 수 있구요.

그리고 어디까지나 이런 풀이도 할 수 있다는 것일 뿐,

무조건 이렇게만 풀라는 짝 막힌 소리가 아니란 거 아시죠 ^^?

이번엔 몇몇 분들께 생소할 수 있는 주제를 다루어 보겠습니다.
프랑스의 수학자 피카드(Charles Emile Picarde)란 사람의 이름을 따서
피카드(or 뽀까르?) 방법이라고 부르기도 합니다.

간단한 예제 몇 개만 보고, 어려운 문제를 풀며 개념을 더 견고히 합시다.



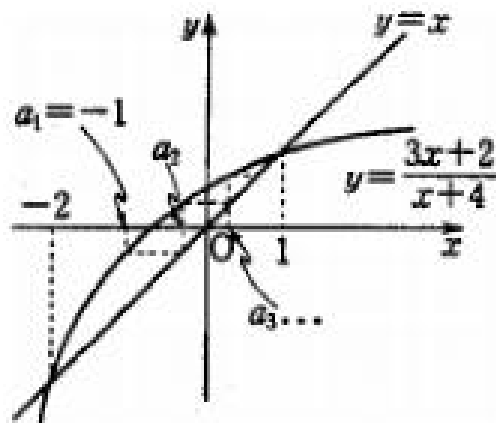
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4, \quad a_1 = 4 \text{ 일 때,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하기 위해서,

$$y = \frac{1}{2}x + 4, \quad y = x \text{ 를 그리고}$$

$a_1 = 4$ 에 해당하는 점 $(4, 0)$ 의 위치에서 출발하
여 화살표와 같이 움직여 가다 보면
그 교점에서 더 이상 진행하지 않습니다.
그 때 x 좌표에 해당하는 값이 극한값이구요.

오른쪽 경우도 점화식이 어떻게 주어지든
그래프 형태로 그리고,
 $y = x$ 와의 교점을 찾으면 됩니다.
그런데 그 교점이 두 개죠?
이 경우엔 $y = x$ 를 이용해서
적절하게 경로를 찾아야 합니다.



그리고 또 하나, **초항의 구체적인 값보다 초항의 위치가 더 중요합니다!**
만약에 초항의 위치가 점 $(-2, 0)$ 보다 왼쪽에 찍힌다면
아무리 $y = x$ 를 이용해서 항이 점점 어디로 이동하는지 찾아봐도
결국 음의 무한대로 발산하게 됩니다.
그리고 **첨부터 $y = x$ 와의 교점 상에 위치한다면**
그 값이 움직이지 않고 고정되어 있죠.

2009년 09월 03일 Kice 2010 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 17번

17. 자연수 n 에 대하여 점 A_n 이 함수 $y=4^x$ 의 그래프 위의

점일 때, 점 A_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1 의 좌표는 $(a, 4^a)$ 이다.

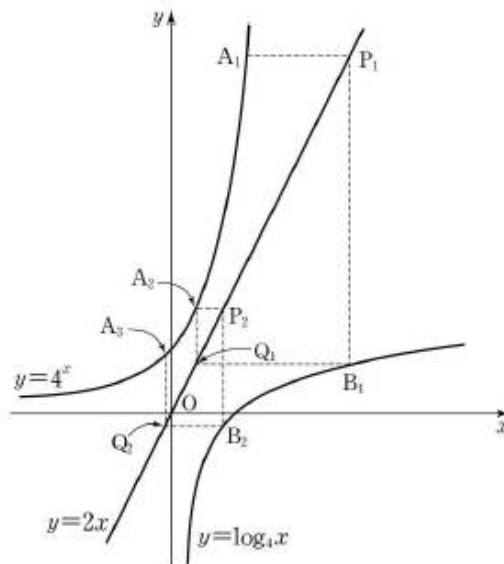
(나) (1) 점 A_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선이
직선 $y=2x$ 와 만나는 점을 P_n 이라 한다.

(2) 점 P_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이
곡선 $y=\log_4 x$ 와 만나는 점을 B_n 이라 한다.

(3) 점 B_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선이
직선 $y=2x$ 와 만나는 점을 Q_n 이라 한다.

(4) 점 Q_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이
곡선 $y=4^x$ 과 만나는 점을 A_{n+1} 이라 한다.

점 A_n 의 x 좌표를 x_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 의 값은? [4점]



- ① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{11}{16}$ ③ $-\frac{5}{8}$ ④ $-\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

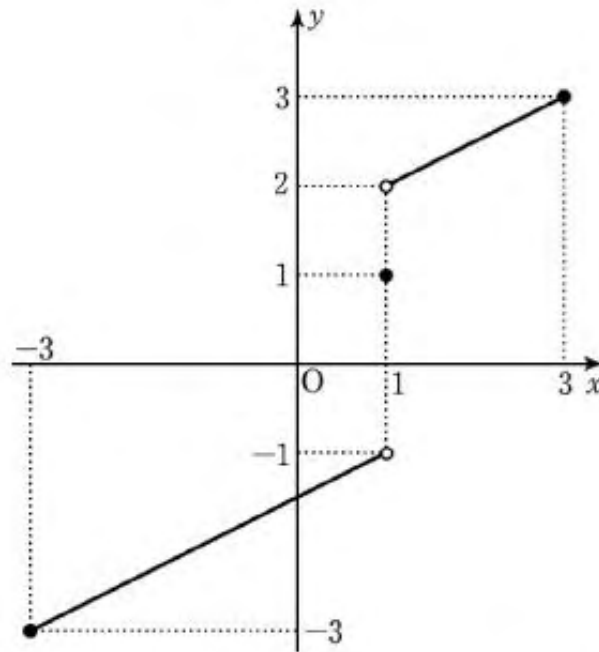
평가원 출제자님들도 피카드 방법을 알고 계십니다.

이렇게 응용된 문제를 내시는걸 보더라도요.

일단 위 문제는 직접 x_n 과 x_{n+1} 에 관한 점화식을 세워서 풀어야 겠죠?

2010년 06월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 09번

9. 폐구간 $[-3, 3]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{개}}(x)$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0) = -3$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \right| = 3$

ㄷ. 방정식 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x$ 는 서로 다른 세 실근을 가진다.

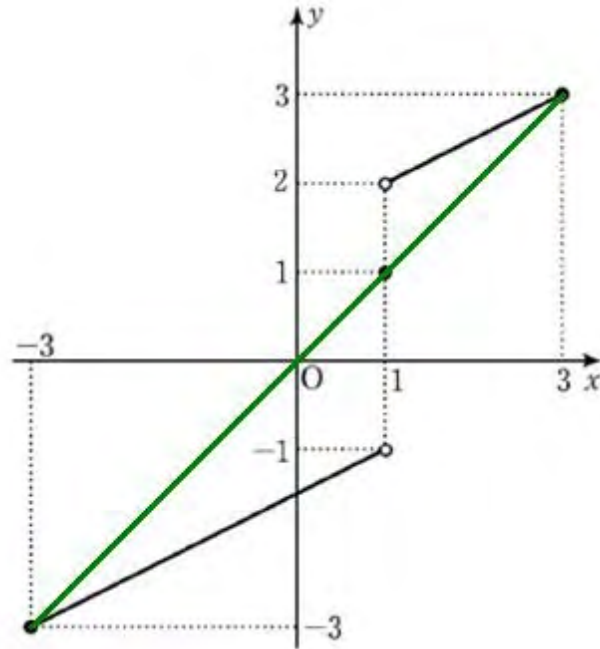
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

포카칩님같은 고수분들은 대체 어디서 이런 걸 배우셨는지 이미 이 내용을 알고 계시네요 ㄷㄷㄷ;

주어진 함수를 무한히 합성한 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ 의 그래프는

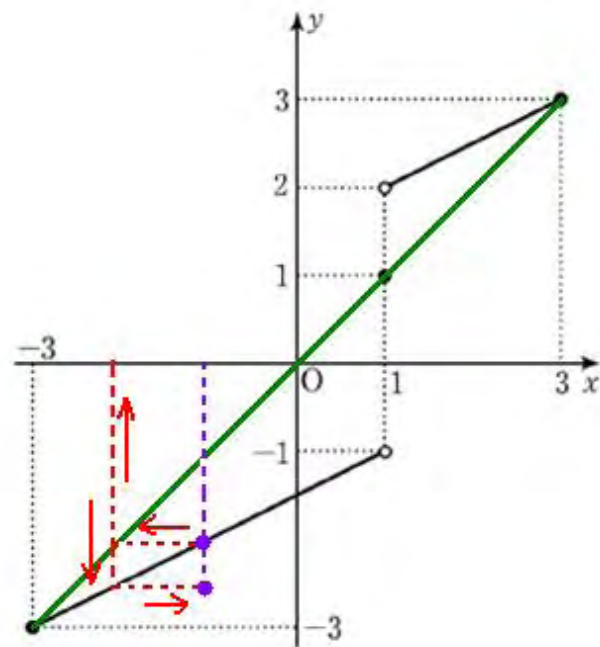
해당하는 x 값에 대해서 $y = x$ 를 이용해 적절히&무수히 많이 이동했을 때 어디에 맏히는지를 나타내는 그래프입니다.

한 마디로 $(x, y) = (\text{초항값}, \text{극한값})$ 의 자취이죠.



그러면 일단 $y = x$ 를 그립니다.

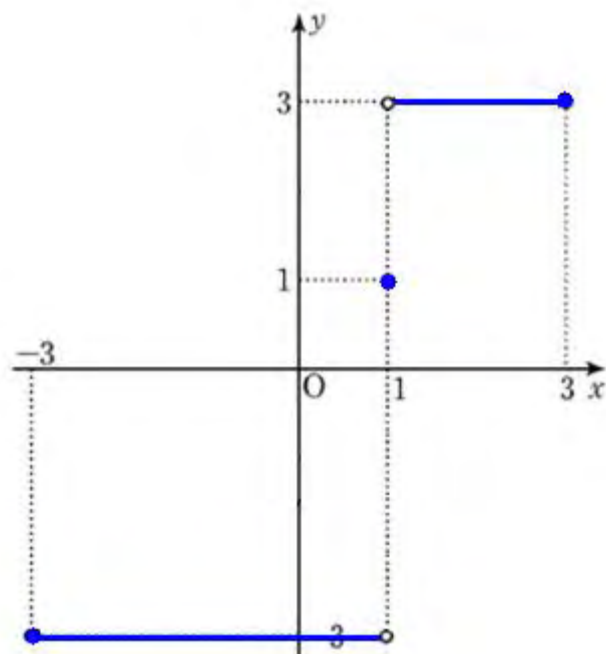
임의의 점에 대해서 두 번 합성하면(즉, $n = 2$)



이렇게 보라색 점이 더 아래에 찍혀서 극한값 -3 에 다가갑니다.

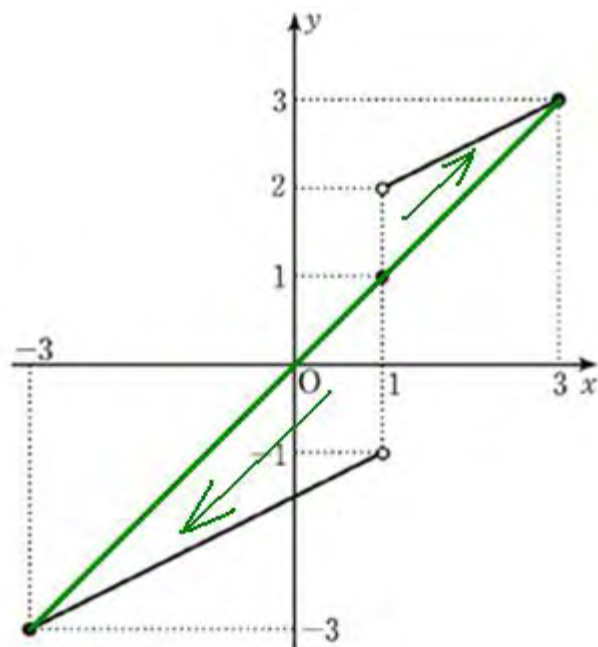
만약 무한히 합성한다면 아예 보라색 점은 $y = -3$ 위에 오겠죠?

이런 식으로 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ 의 그래프를 그려보면



요렇게 나오네요!

매번 모든 점들을 확인하기가 귀찮으니까



위와 같이 $y = x$ 를 그리고, $y = x$ 의 윗부분은 ↗ 쪽으로 올라가서 만나는 값,
 $y = x$ 의 아랫부분은 ↘ 쪽으로 내려가서 만나는 값이 극한값이 되고,
 첨부터 $y = x$ 와의 교점인 부분은 그대로임을 이용해서 풀어도 됩니다.

2010학년도 경찰대학 제1차 시험 (수리영역) 13번

13. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 3} - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

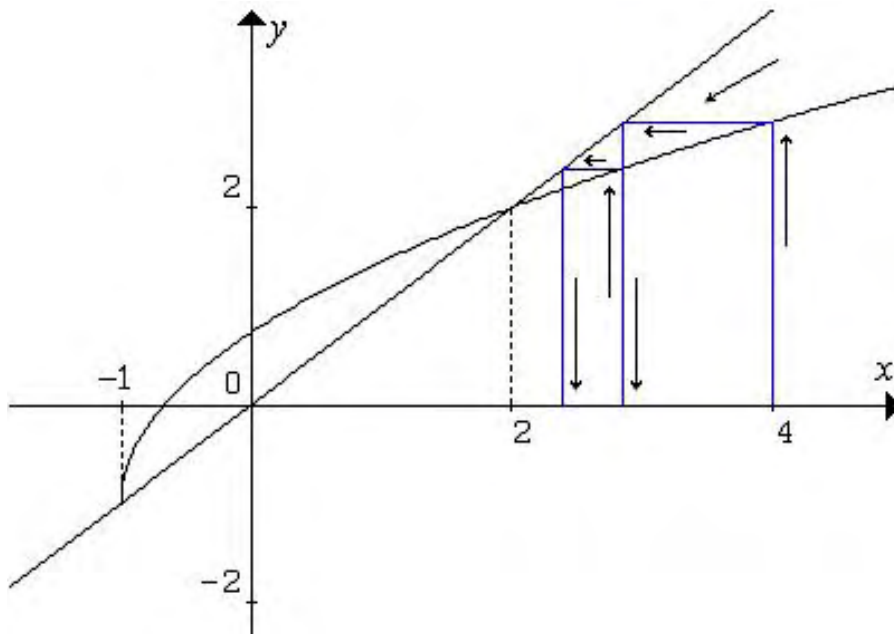
ㄱ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > a_{n+1}$ 이다.

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여 $2 < a_n < 5$ 이다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k \cdot 2^k} \cdot \frac{1}{5^{2^n}} \right)$$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

sol)



$y = x$ 와 $y = \sqrt{3x+3} - 1$ 의 교점은 $(-1, -1)$ 과 $(2, 2)$ 이며,

위 그래프를 통하여 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값은 2임을 알 수 있습니다.

ㄱ, ㄴ을 보니 출제자분이 대놓고 피카드 방법을 쓸 줄 아는지 묻는 것 같죠?

그리고 ㄷ 또한 $2 = 3^1 \cdot 5^0$? 인지 묻고 있으므로 당연히 거짓입니다.