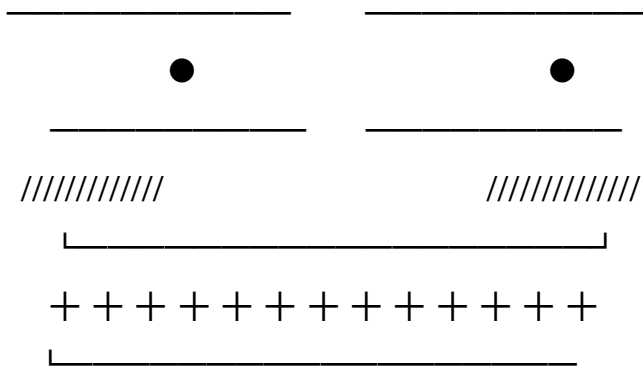


몇몇 극한 문제들에서의 비밀

안녕하세요~!

독학생동 평민 출신인 ictteru_(아이씨떼루_ ≡ I love you_)입니다..



그리고..

살아오면서 지금 이 순간만큼

진지하게 공부해본 적 없는 수험생들에게서

귀중한 시간을 빼앗으면서도 죄책감을 느끼지 못하는

그런 나쁜 사람이 저는 아닙니다.

그저 수학을 좋아하는 사람일 뿐입니다.

고등학교에서 수리 영역에 등장하는 무한급수 문제들은 크게 세 종류가 있습니다.
 나름 이렇게나마 윤곽을 파악하고 있는 편이
 문제를 보고서 출제자님의 의도를 짐작하는데 도움이 되겠죠?

$$(i) \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \quad (|r| < 1)$$

$$(ii) \quad (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} ?$$

물론 이것 말고도

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{1-3^2} + \frac{3^2}{1-3^4} + \frac{3^4}{1-3^8} + \cdots + \frac{3^{2^{n-1}}}{1-3^{2^n}} + \cdots \right) = -\frac{1}{2}$$

처럼 풀 수는 있지만 발상을 떠올리기 자체가 사기스러운 문제라든가

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{12^2-1} + \frac{1}{16^2-1} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

처럼 생긴 건 예쁘장하면서 어디로 수렴하는지 봐보면

머릿속을 ???로 가득 채워주는 것들도 있습니다.

(하지만 이 글을 읽는 분 중엔 분명히 자연스레 푸시는 분들도 계십니다 ㄷㄷㄷ)

아무튼 지금은 그걸 다루고자 하는 것이 아니니까 넘어가겠습니다.

대부분 무한급수 문제들의 뺑얼은 (i) 아니면 (ii) 아니면 (iii)인데,

또 다른 수학적인 내용들로 메이크업을 해서 나옵니다.

만약 그 험란한 화장술을 알아채지 못한다면 문제를 보고

“누구나, 넌 _-?” 하겠죠..

(i), (ii)는 징글징글하도록 접하셨을테니, (iii)의 대표적 예제 몇 개만 소개합니다.

2008년 10월 16일 교육청 수리 (나형) 13번

13 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=3$ ($n=1, 2, 3, \dots$)을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

_____ < 보 기 > _____

$$\neg. a_{11}=1$$

$$\sqsubset. \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 2$$

$$\sqsupset. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{3}{2}$$

- ① $\neg$ ② $\neg, \sqsubset$ ③ $\neg, \sqsupset$
 ④ $\sqsubset, \sqsupset$ ⑤ $\neg, \sqsubset, \sqsupset$

2009년 03월 11일 교육청 수리 (나형) 14번

14 수열 $\{(-1)^{n-1}\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, <보기>의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

_____ < 보 기 > _____

$$\neg. \{S_n\}$$

$$\sqsubset. \left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$$

$$\sqsupset. \left\{ \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{n} \right\}$$

- ① $\sqsubset$ ② $\sqsupset$ ③ $\neg, \sqsubset$
 ④ $\neg, \sqsupset$ ⑤ $\sqsubset, \sqsupset$

비록 지금 극한 파트에 관련하여 글을 쓰고 있지만

위 문제들이 굉장히 중요한 수열을 담고 있기에 밑의 문제는 풀어 보도록 할게요.

2009년 03월 11일 교육청 수리 (나형) 14번

14. 수열 $\{(-1)^{n-1}\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할

때, <보기>의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

— <보 기> —

$$\begin{aligned} &\neg. \{S_n\} \\ &\neg. \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \\ &\neg. \left\{ \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{n} \right\} \end{aligned}$$

- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\neg, \neg$
 ④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg$

sol)

편의상 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n = T_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)라 하면,

$\{(-1)^{n-1}\} : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$\{S_n\} : 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$\{T_n\} : \boxed{1}, \textcircled{1}, \boxed{2}, \textcircled{2}, \boxed{3}, \textcircled{3}, \dots$

중요한 수열이란 **계차**가 $a, b, a, b, \dots$ 교대로 나오는 경우를 두고 하는 말입니다.

(실제로 수능을 포함한 평가원 시험에서 만만찮은 난이도로 여러 번 나왔습니다.)

수열을 분석하는 여러 방법 중에서 계차를 조사해보는 것이 있는데요,

만약 계차 $\{S_n\}$ 에 관한 일반항을 세울 수만 있다면,

$$T_n = T_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \text{로 } \{T_n\} \text{도 구할 수 있겠죠?}$$

하지만 이 방법은 계산에 더 많은 시간을 소모하므로

실전에선 계차가 $a, b, a, b, \dots$ 형태로 나오는 수열에서 특정 항을 물어 봤을 때

홀수항과 짝수항으로 분리하여 따져 주는 것이 편합니다.

$$\text{까다로운 } \neg \text{은 } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_{2m}}{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_{2m+1}}{2m+1} ? \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{2m+1} ?$$

이 성립하는지 확인해보면 되구요.

무한급수 파트에서 정말로 말하고 싶은 부분은

(i) 중에서도 시험에 빈출하는 특별한 유형뿐인데,

자연스러운 흐름을 위해 이것저것 언급하다보니 말이 길어졌네요.

하지만 아직 설명하고 넘어가야할 부분이 더 남아 있습니다.

어떻게 보면 무한급수 중에서도 공비 r 이 $|r| < 1$ 을 만족하는

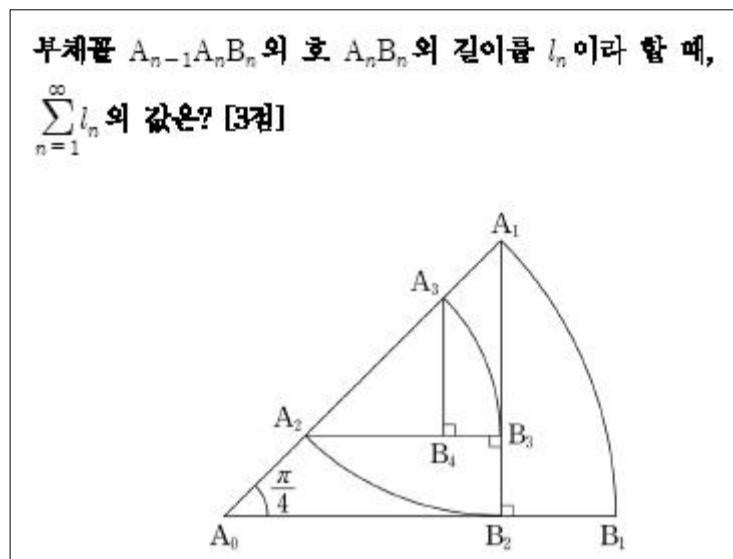
무한등비급수 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ 는 $\frac{a}{1-r}$ 이라는

굉장히 단순한 형태로 나타낼 수 착한 o(^-^ o) 무한급수입니다.

무한등비급수 문제 풀 때는 초항 a 와 공비 r 만 구하면 끝이었으니까요.

하지만 그간의 무한등비급수 문제들은 단순히 수식만을 주고 그 값을 물어보기 보단
특정 패턴이 무한히 반복되는 도형 내지는 프랙탈(fractal) 문제로 나오곤 했었죠.

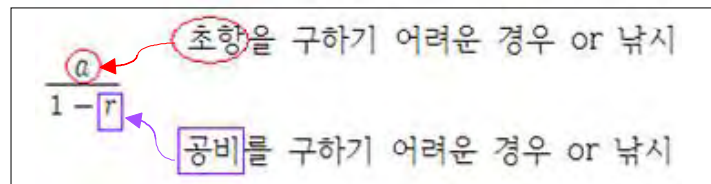
행여나 이렇게 밋밋하게 낸다면 너도 나도 다 맞춥니다.



그러면 변별력이 떨어지니까 출제자분들은 당연히 꼬아서 냅니다.

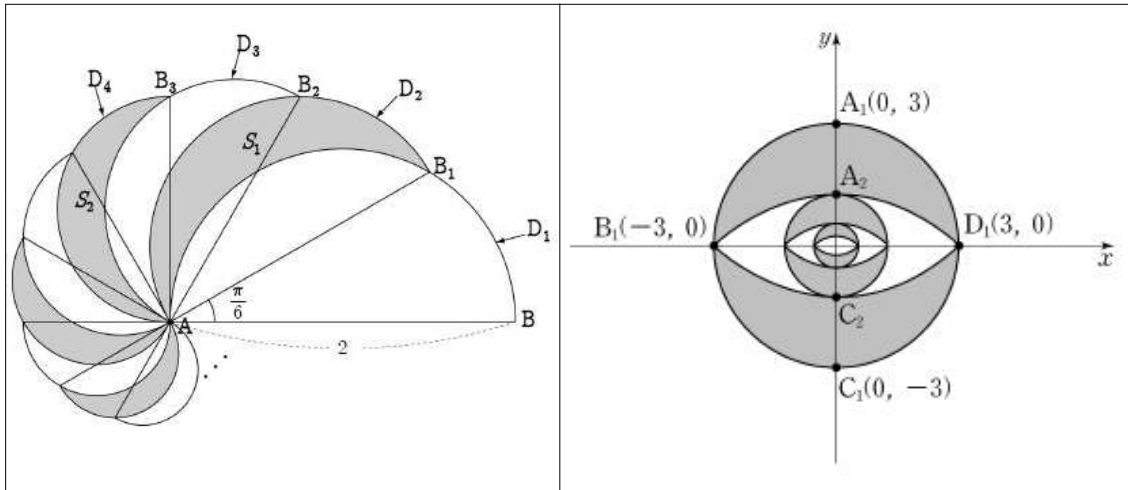
여러분이 출제자 입장이 되더라도 그렇게 해야 + 그렇게 해야만 되겠죠?

그래서 출제자분들이 생각해낸 방법으로



혹은 아예 새로운 유형으로 물어봅니다.

먼저 초항을 구하기 어려운 경우로 다음과 같은 경우가 있습니다.



포함과 배제의 원리(혹은 포배/포제의 원리)라 하여

집합에서 합집합 원소의 개수 구할 때

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

처럼 원하고자 하는 수치에 이르기 위해 더하고 빼기를 반복한 것처럼

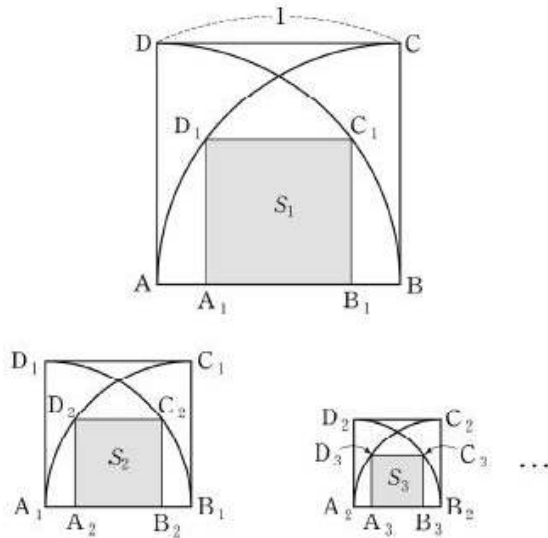
초항에 해당하는 면적을 구하는 것입니다.

아니면 보조선을 잘 그어야 하는 문제도 있습니다

와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은? [4점]

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n 의 호의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]

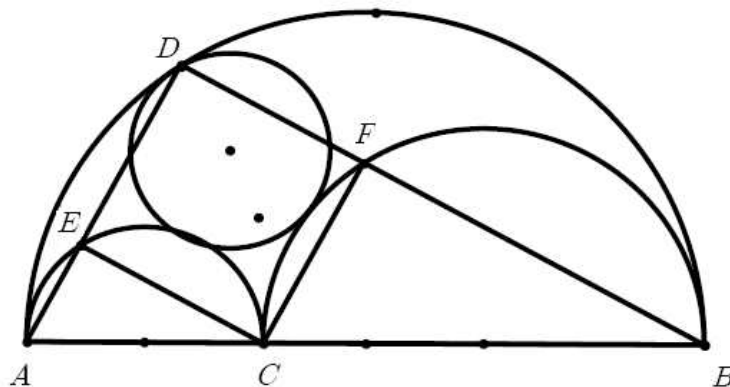
$A_n B_n C_n D_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



이 문제는 제법 정답률이 낮았던
평가원 기출 문제인데,
적절히 보조선 긋고,
피타고라스 정리를 적용하면
쉽게 풀릴 거예요.

(그리고 이 글만큼은 그림을 많이
긋어 와야 하는지라 출처 표기를
제대로 못해도 이해해주세요..ㅠㅠ)

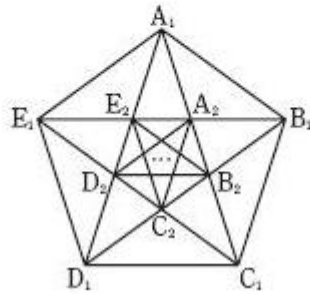
3. 아래 그림과 같이 반원 위에 지름을 갖는 두 반원이 있다. 세 반원에 모두 내접하는 원을 하나 그렸을 때 그 원이 큰 반원과 만나는 점을 D 라 하자. 그리고 두 반원의 반지름을 각각 AC, CB 라 하자. AD 와 BD 의 두 반원과의 교점을 E, F 라 하자. $DECF$ 가 정사각형을 보여라.



(http://orbi.wizet.com/bbs/board.php?bo_table=xi_agit_selfedu&wr_id=1497190)

적어도 착.실.하.게. 공부해온 수험생이라면 대부분 풀 수 있어야 하는 시험 문제에
흑자의 말처럼 모든 고등 기하의 지식을 동원해도 풀 수 없을 것 같은
보조선 하나에 천재성이 필요한 문제는 안 나옵니다.
그러니 보조선에 대해서 너무 걱정하지 하지 마세요.
비록 이번엔 틀리지만 다음부터 꼭 맞추겠다는 태도면 충분합니다.

정오각형 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n 번째 정오각형 $A_nB_nC_nD_nE_n$ 의 둘레의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]



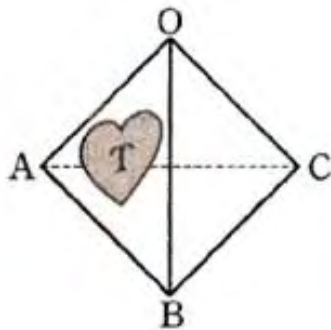
물론 사실에선 이런 무리수를 두기도 합니다..;;

그리고 낚시 문제로는

$$a + b + br + br^2 + br^3 + \dots = a + \frac{b}{1-r} \text{ 처럼}$$

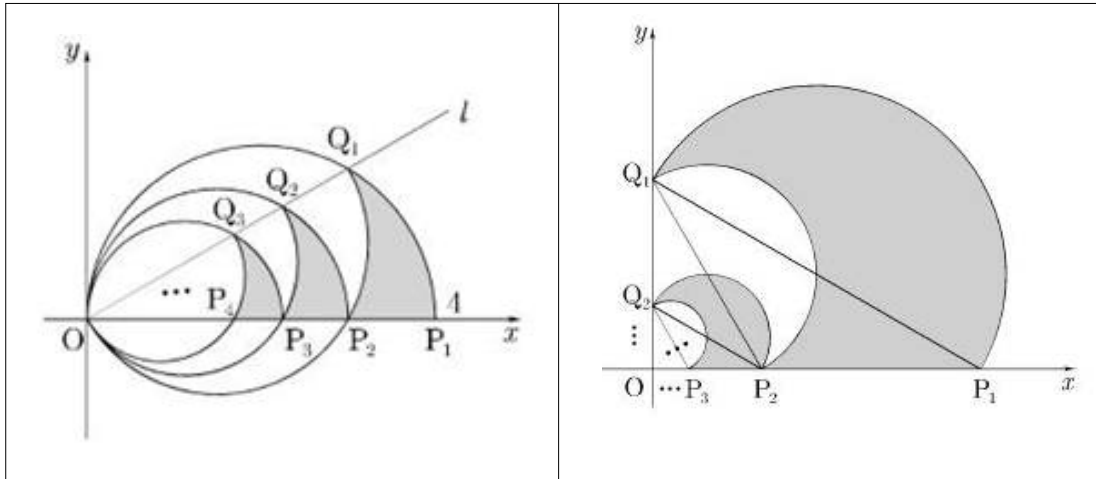
초항이 경향성에서 벗어나 둘째 항부터 등비수열을 이루는 형태라든가,
(여름방학 무렵부터 모의고사에 낚시 문제로 슬슬 나옵니다.)

라 한다. 이와 같이 이웃하는 옆면으로 차례로 정사영 시켜 얻은 도형 $T_1, T_2, T_3, \dots$ 의 넓이를 각각 $S_1, S_2, S_3, \dots$ 라 하면, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 15$ 이다. 이 때 도형 T 의 넓이를 구하시오. [4점]

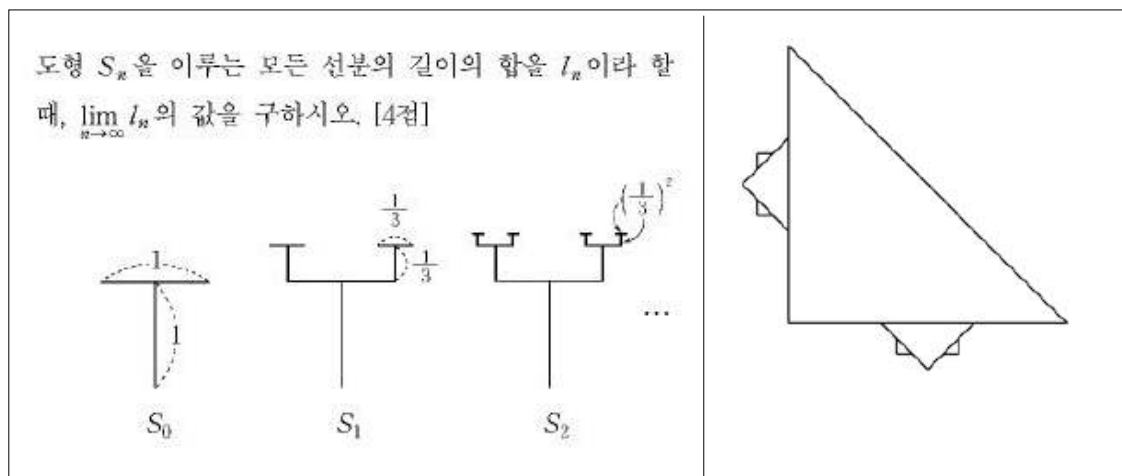


처럼 정신줄 놓고 풀면 바로 틀리는 경우도 있습니다.

그 다음 **공비를 구하기 어려운 경우로는**



이렇게 **공비가 음수**여서 **뺄음**꼴을 더하고 **빼고**를 반복하여 구성하는 경우도 있고,



와 같이 매 시행마다 **개수는 개수대로 늘어나지만**

길이(or 넓이)는 길이(or 넓이)대로 줄어들어서

개수의 증가 비율과 길이(or 넓이)의 감소 비율을 곱하여

공비를 구성해야하는 문제도 있습니다.

즉, (공비) = (길이비) $\times$ (개수비) 내지는

(공비) = (넓이비) $\times$ (개수비)로요.

예를 들자면

요렇게 $\rightarrow$

말이죠..

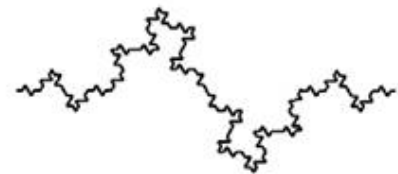
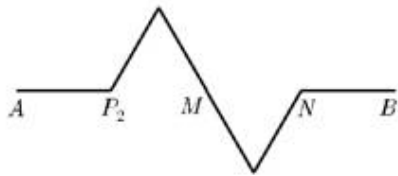
$$\therefore \frac{\text{초항}}{1 - \text{공비}} = \frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{9}{8}$$

길이비
개수비

그리고 2009년 06월 평가원 대비 포카칩 모의고사에서
기어이 이런 문제가 나왔습니다.

12. 아래의 첫 번째 그림과 같이 길이가 1인 $\overline{AB}$ 가 있다. 선분 $\overline{AB}$ 의 중점을 M , $\overline{AB}$ 를 1:3으로 내분하는 점을 P_2 , 3:1로 내분하는 점을 N 라 하자.
 $\overline{P_2M}$ 을 아래변으로 하는 정삼각형을 작도하고, $\overline{MN}$ 를 윗변으로 하는 정삼각형을 작도한 뒤, $\overline{P_2N}$ 를 지운 상태를 두 번째 그림이라 하자.
두 번째 그림의 6개의 선분을 위와 동일한 방법으로 모두 작도한 상태를 세 번째 그림이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 그림의 선분의 길이의 총합을 a_n , 점 A 를 지나는 선분의 끝점을 P_n 이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

A B
(P_1)



<보 기>

ㄱ. $a_3 = \frac{9}{4}$

ㄴ. $\overline{AP_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

ㄷ. a_n 은 수렴한다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ이 정말 발칙하네요.. ^^;

여태 이런 무한급수 문제 치고 수렴하지 않았던 적이 있었던가요?

유명한 코흐(Koch) 눈송이 길이 구하는 문제를 끌고 와서

(길이가 줄어드는 정도) > (개수가 증가하는 정도)? 인지 묻고 있는데,

식 세워서 계산을 해보면 길이의 총합 a_n 이 결국 발산함을 알 수 있습니다.

그 밖에 낚시 문제로는 나름 최근 평가원 기출 문제로

R_1 의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$ 인 $\oplus$ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2 라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 R_n 의 4^n 개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

와 같이 물어 보기도 했습니다.

대부분의 수험생들 머리 꼭대기 위에 있는 출제자님들께서도

단순히 **(넓이비) = (답음비)²** 라고 기계적으로 암기하는 학생들이 많다는 걸 알고

정말로 원리를 제대로 이해한 학생들에게만 점수를 주기 위해서 만든 문제겠조?

위 문제를 잘 보면 사각형들의 답음비가 일정하게 유지 되지 않으므로

공비의 넓이비 자리엔 가로 답음비와 세로 답음비의 곱을 대신 써야 합니다.

결국 $\frac{a}{1-r}$ 형태 만들기에 지나지 않죠.

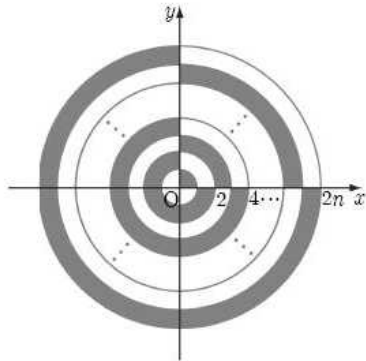
물론 아직도 언급하지 못한 유형의 문제들도 많습시다만,

그 중에서 조금 독특했던 문제 몇 개만 들어보겠습니다.

직접 풀어보시고 느끼세요..+_+!

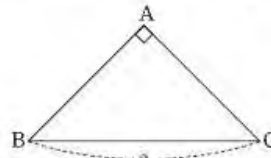
그 밖에 별 다른 언급은 생략합니다.

좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(a, b)$ 가 있다. 선분 AC 의 중점을 P_1 이라 하고, 선분 BP_1 의 중점을 Q_1 이라 하자. 또, 선분 AQ_1 의 중점을 P_2 라 하고, 선분 BP_2 의 중점을 Q_2 라 하자. 이와 같이 모든 자연수 n 에 대하여 선분 BP_n 의 중점을 Q_n 이라 하고, 선분 AQ_n 의 중점을 P_{n+1} 이라 하자. n 이 한없이 커질 때, 점 P_n 은 어떤 점에 한없이 가까워지는가? [4점]

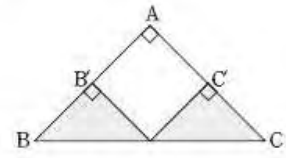


이와 같이 n 단계까지 검은색으로 칠한 넓이의 합을 S_n 이라 할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$ 의 값은? [4점]

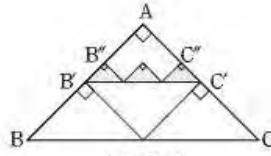
을 S_n 이라 하자 이 때, $\frac{S_9}{S_{10}}$ 의 값은? [4점]



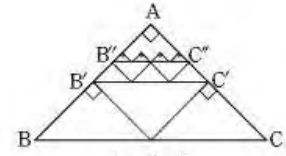
[그림 1]



[그림 2]

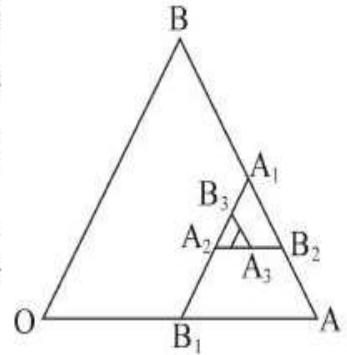


[그림 3]

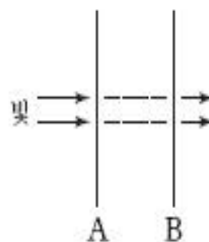


[그림 4]

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 OAB 에서 $\overline{AB}$, $\overline{OA}$ 의 중점을 각각 A_1 , B_1 이라 한다. 또 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{AA_1}$ 의 중점을 각각 A_2 , B_2 라 하고, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_1A_2}$ 의 중점을 각각 A_3 , B_3 이라 한다. 이와 같이 $\overline{A_nB_n}$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ 의 중점을 각각 A_{n+1} , B_{n+1} 로 정하는 과정을 한없이 계속할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\angle AOA_n)$ 의 값은? [4점]



15. 그림과 같이 두 개의 유리판 A, B가 평행하게 놓여 있다. 빛이 이 두 유리판을 지나갈 때 A에서는 빛의 양의 $\frac{1}{3}$ 이 통과, $\frac{2}{3}$ 는 반사하고, B에서는 빛의 양의 $\frac{1}{4}$ 이 통과, $\frac{3}{4}$ 은 반사한다고 한다. 그림과 같이 왼쪽에서 유리판 A에 빛을 수직으로 비추었을 때, 충분한 시간이 지난 후 B를 통과한 빛의 양에 대한 설명으로 옳은 것은? [4점]



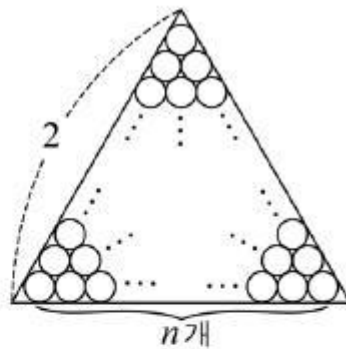
이제 무한급수 파트에서 제가 그토록 말하고 싶었던 부분에 도달 했습니다.
요즘은 인터넷 강의에서도 설명해주시는 분들이 종종 계시니
어떻게 보면 많이 알려진 내용이기도 하지만,
몰랐던 분들에게는 산뜻한 충격이 되었으면 좋겠네요..^^;

2005년 10월 13일 교육청 수리 (가형) 16번

16. 그림과 같이 한 변의 길이가

2 인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, ..., n 개가 배열되어 있다. 이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다.

자연수 n 의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가? [4점]



① $\sqrt{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{2}{5}\pi$

⑤ $\frac{\pi}{2}$

이 글은 위 문제를 보고서

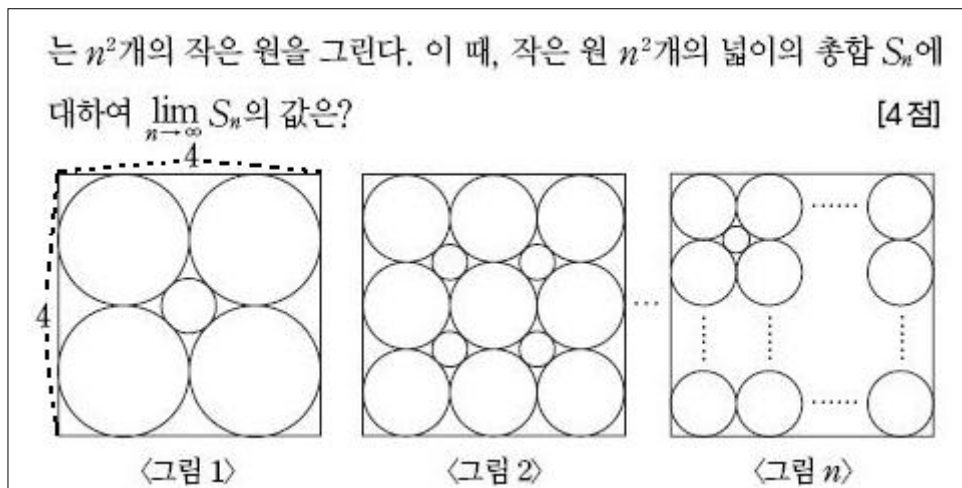
‘으음.. 작은 원의 반지름을 r_n 으로 두면,

그 작은 원이 총 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 개 있으니

$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(r_n)^2 \times \frac{n(n+1)}{2}$ 을 풀면 되겠네 뭐..ㅋ’

하며 보조선 몇 개 그어야 하고, 계산도 약간 귀찮은 문제라고만 인식하고 넘어가는 분들을 대상으로 쓰는 겁니다.

그렇담 이런 문제도 비슷한 방식으로 풀면 되겠군요...?!



물론 그 풀이는 할 수 있지만 시간이 왠지 많이 걸릴 것 같기에,

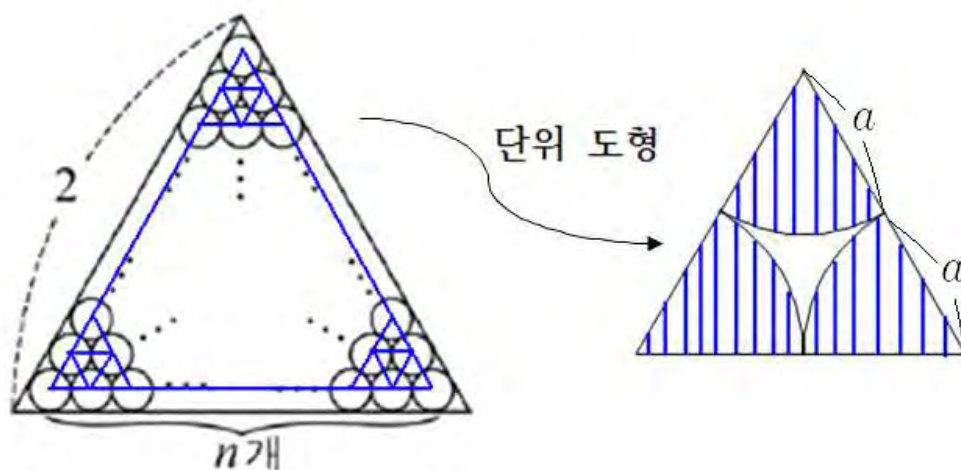
또 다른 상큼하고 간지나는 풀이를 원하시는 분들을 위하여

‘단위 도형’이란 개념을 도입하겠습니다.

누구는 이런 문제에서 식만 세우다 결국 지쳐서 시간과 점수 둘 다 까먹겠지만,

문제 스르륵 읽고 몇 초 고민 하더니, 정답 찍고 다른 문제 넘어가는 사람들은

아마 이렇게 풀었으리라 봅니다.



테두리 부분은 마치 카스테라 포장지에 묻어 있던 빵 같아서 무시해도 됩니다.

그러면 전체 도형은 단위 도형들을 무수히 많이 붙여서 만든 셈이 되죠.

$$\therefore (\text{전체 도형의 면적}) \times (\text{단위 도형에서 빗금친 부분의 비율}) = \sqrt{3} \times \frac{\frac{\pi a^2}{2}}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\pi}{2}$$

해서 이렇게 무한등비급수 공식도 쓸 필요 없이 한 줄 만에 답이 나옵니다ㅋ

그렇다면 두 번째로 든 예시에서의 단위 도형은 다음과 같습니다.



단위 도형에서의 점유율을 구하기 위한
보조선은 생략해도 되겠죠 ^^?
그리고 점유율을 구할 때 단위 도형에서
길이를 a 나 b 같은 어떤 문자로 두어도
면적 비율이니 결국 문자가 상쇄됩니다.

혹시나 아직 잘 이해되지 않는 분들을 위해서 비유를 하나 해보겠습니다.

철수가 2.0l의 생수를 한 병 사서

충분히 달달한 맛이 돌 때까지 생수에다 꿀을 풀었다고 가정합시다.

그래서 그걸 깨끗하게 씻어둔 포도주잔, 소주잔, 맥주잔에 가득 부어서 마셨습니다.

그러면 잔마다 꿀물의 달달한 정도가 다를까요? (네... 각각의 역치가 변하니까...)

심심했던 철수가 또 다른 2.0l의 비어있는 생수병에 나머지 꿀물들을 모두 옮겼다면

이번에야 꿀물의 달달한 정도가 변할까요? (네... 수분 증발량을 고려하면...)

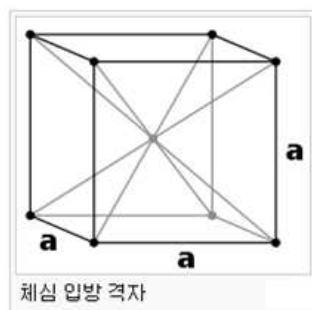
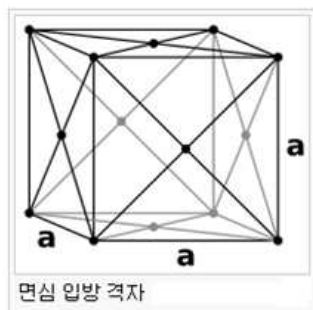
당연히 절대로 그럴 리가 없겠죠.. ^^?

이렇듯 전체 도형에서 구해야 하는 부분이 바로

꿀물 담은 생수병에서의 꿀의 양에 해당합니다.

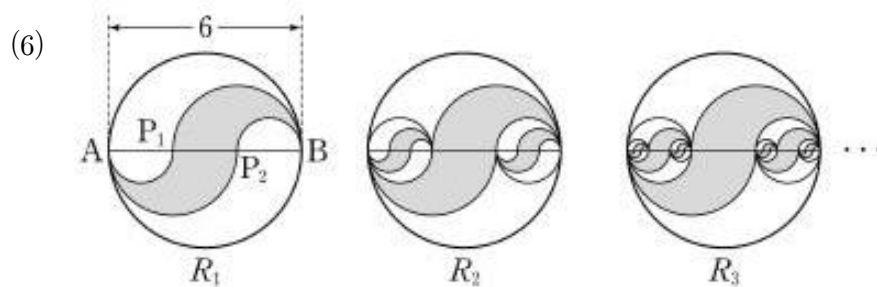
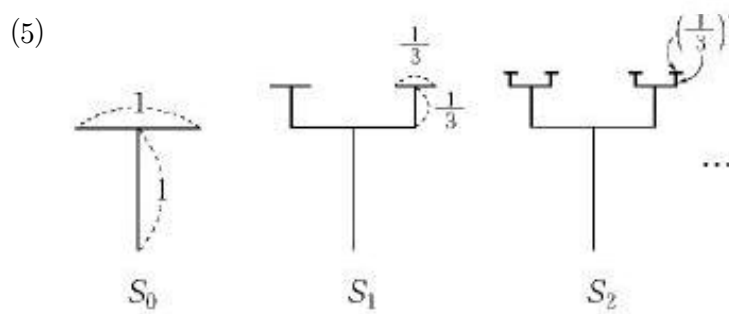
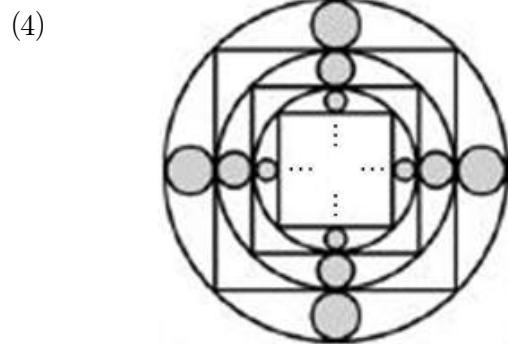
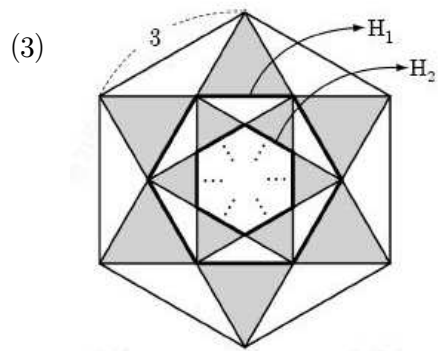
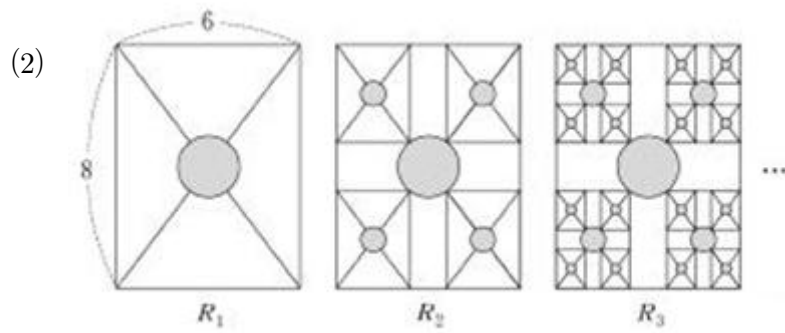
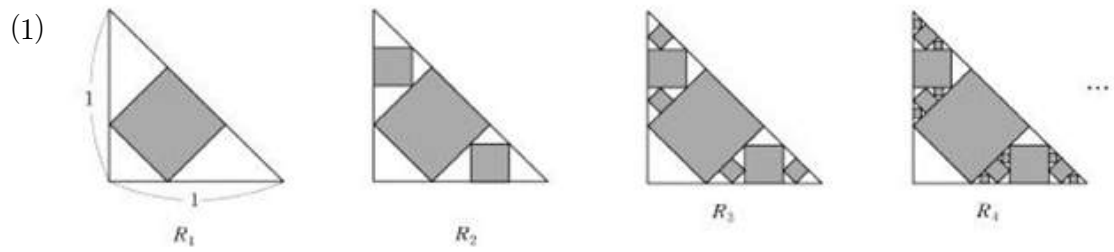
철수가 처음에 풀었던 그 꿀의 양 말이죠.

비슷한 원리로 바닷물에 염분이 얼마나 있는지도 추정할 수 있겠구요.

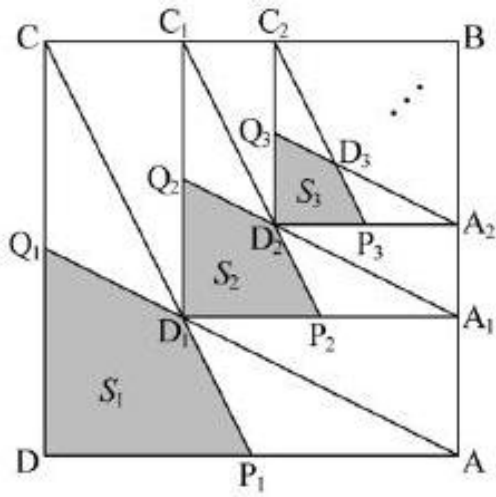


혹 화학 II를 공부하신 분들에게엔 아마 이런 개념이 스쳐가지 않았나 싶네요 ㅎㅎ

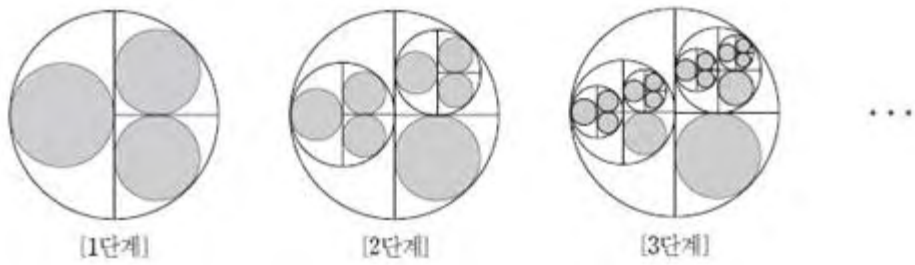
이제 다음 그림을 보고 단위 도형을 찾아보세요 ^^;



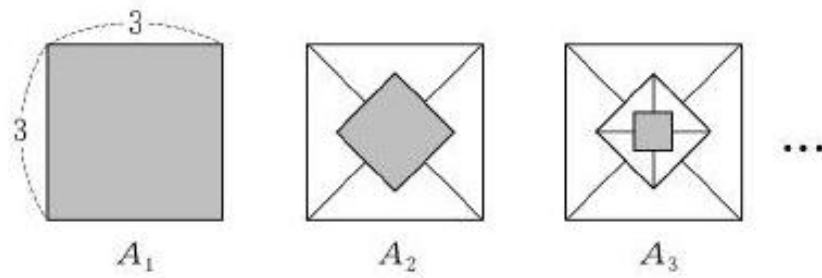
(7)



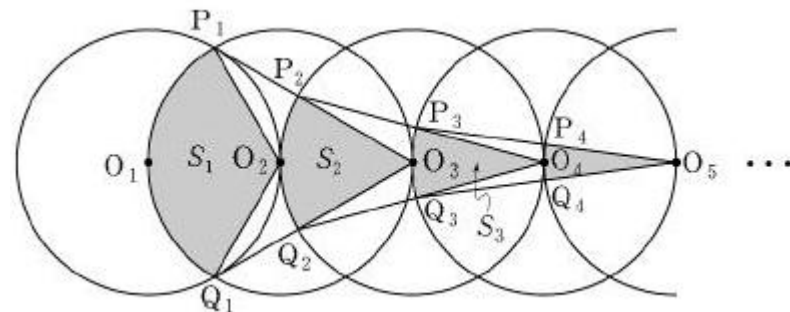
(8)



(9)

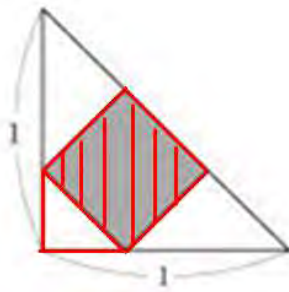


(10)



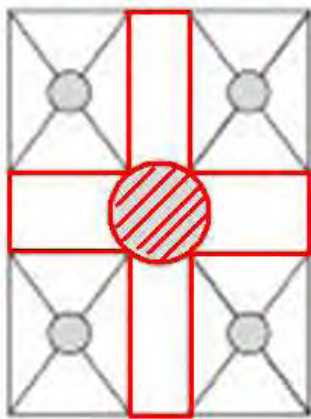
정답과 해설이 다음 페이지부터 시작합니다!

(1)



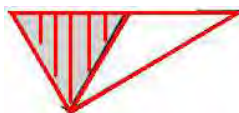
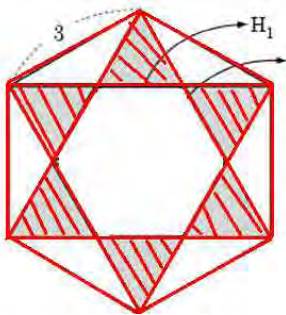
정사각형 + 직각이등변삼각형으로
겉보기에도 단위 도형에서의 해당 면적 점유율이
(정사각형에 보조선으로 대각선 두 개를 그어보면)
 $\frac{1}{5}$ 이네요.

(2) 십자가 + 가운데 원

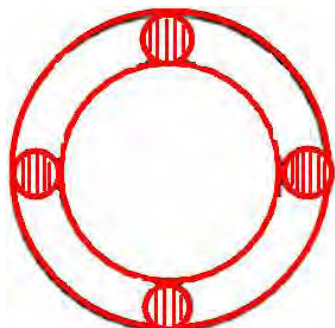


하지만 단위 도형으로 접근하기보다
(초항)과
(공비) = (넓이 감소비) $\times$ (개수 증가비)
를 구해서 그냥 푸는 편이 더 빠르겠네요.

(3) 단위 도형은 유일하지 않을 수도 있습니다.

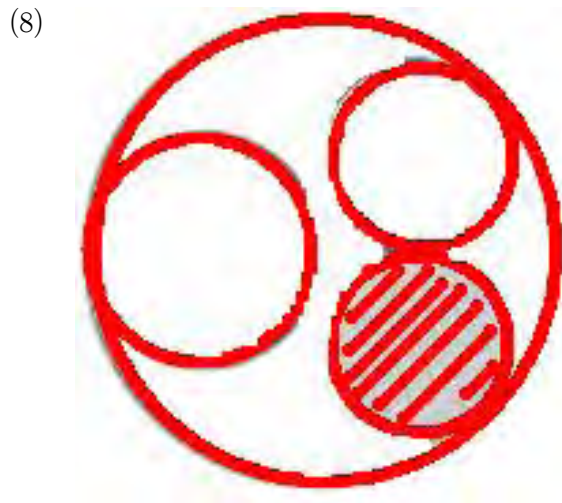
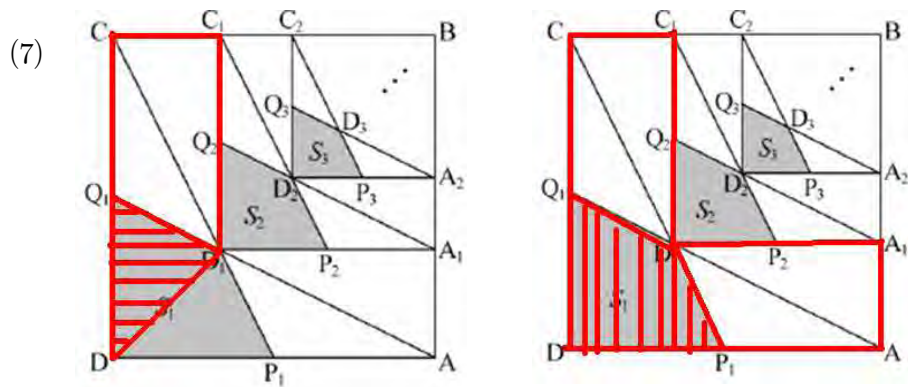


(4) 도넛 + 동그라미 네 개



(5) 단위 도형은 길이가 아닌 면적을 물어보는 경우에 사용합니다.

- (6) 단위 도형을 이용해서 풀 수도 있지만 오히려 시간이 더 걸리므로
그냥 평범하게 푸는 게 더 빠른 경우입니다.
 당연히 그때 그때 최적의 풀이로 식을 전개해 나가야겠죠?



구멍 뚫린 단추 모양을 단위 도형으로 하여
 사이즈를 단추구멍만큼 줄여서 계속 채워 넣다 보면 전체 도형이 나옵니다.
 단위 도형으로 푸는 마인드도 일종의 **가비의 리입**니다 ^^;

- (9) 단위 도형으로 풀리는 문제들은 이렇게 도형이 포개어지는 양상이 아닙니다.

- (10) 전체 도형부터가 발산하는 경우엔 오히려 단위 도형으로 풀면 더 복잡합니다.

지금까지 살펴본 예제들만이라도 충분히 이해했다면
단위 도형에 대한 감각이 어느 정도 생겼을거예요.

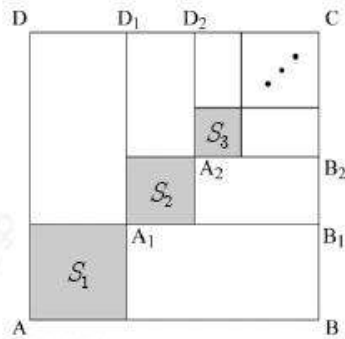
2008년 07월 15일 교육청 수리 (가형) 23번

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$ 으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1 , 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$ 이라 하자.

다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$ 에서 선분 A_1B_1 과 선분 A_1D_1 을 각각 $m:n$ 으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2 , 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$ 라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$ 이다.

m^2+n^2 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 서로소인 자연수) [4 점]



sol)

점유율이 $\frac{1}{7}$ 이란 소리고, 단위 도형이 L자에 네모 부분이므로

$7 = 3 + 1 + 3$ 에서 $m:n = 1:3$ 이겠군요!

그렇다고 무조건 이 방법만을 고수하란 것이 절대! 절대!! 절대!!! 아닙니다..ㅠ_ㅠ
그래서 일부러 단위 도형으로 접근해서 오히려 더 꼬이는 경우도 제시했구요.

하지만 그림에도 이렇게까지 장황하게 수많은 예를 들어가며 설명하는 까닭은
문제를 바라보는 시야를 넓히면서,
경직된 수학적 감각을 일깨우기 위함입니다.

물론 이런 내용을 한 번도 접하지 않았더라도

혹자는 수식 주르륵 써가면서 다 풀고도 시간이 남겠지요.

즉, 몰라도 수능 공부하는데 아무런 상관없다는 말입니다.

그리고 특히나, 이제 막 극한이라는 개념의 바다에 발을 담그고서

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{6^2}\right) + \left(\frac{1}{8^2}\right) + \left(\frac{1}{10^2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{(2 \cdot 1)^2} + \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} + \frac{1}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{1}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{1}{(2 \cdot 5)^2} + \dots \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{4^2}\right) + \frac{1}{5^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

같은 무한의 오묘함에 '0'(..+_+!!.. 하시는 단계에 있는 분들께는
비밀이란 말 따위로 유혹하고 있는 이 글에 시간을 투자하는 것보다
비록 귀찮더라도 정확하게 식을 세워서 차근차근 풀어보는 편이
분명 더 가치있는 학습일테죠.

마지막으로 부탁드립니다..

행여나 자신하고 푸는 스타일이 안 맞다는 이유만으로

격한 반응은 자제해주세요.

열심히 글 쓴 사람 생각해서라도요 ^^;

(물론 그 밖의 의견은 감사히 받아들이겠습니다!)

아마 이 글의 맨 마지막 부분에선

이과생 편애 버전으로 또 한 번 비슷한 소재를 다룰 생각입니다.

자칫 글 썼다가 특히나 수많은 기수분들의 질타를 받을까봐

어쩔 수 없이 이렇게 조심조심 실드를 치고 있네요..ㅠㅠ