1. 자연수 a, b, c는 모든 실수 x에 대해 다음을 만족시킨다.

$$(x+a)(x+2026)+1=(x+b)(x+c)$$

자연수 a의 홀수, 짝수 여부를 판정하고, 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a,b,c)를 모두 구하시오.

$x^2+(a+2026)x+2026a+1=0$의 해는

$x=\dfrac{-(a+2026)\pm\sqrt{(a+2026)^2-4(2026a+1)}}{2}$ 이다.

이 때, $\sqrt{}$ 안에 있는 식을 전개하면,

$a^2+4052a+(2026)^2-8104a-4$

$=a^2-4052a+(2026)^2-4$

$=(a-2026)^2-4$ 이다.

근데, $x^2+(a+2026)x+2026a+1=0$의 해는 정수이기에

$(a-2026)^2-4$는 어떤 수의 제곱이어야 한다.

$\therefore (a-2026)^2=4$ 여야하므로

그러므로 a는 짝수여야 하고, $a=2028$, $a=2024$일 때

가능하다.

이를 정리하면, $a=2028$일 때 $x=-2027$ (중근)

$a=2024$일 때 $x=-2025$ (중근) 이기에

(a,b,c)는 $(2028, 2027, 2027)$과 $(2024, 2025, 2025)$

총 2개이다.

한양대 예시답안과 다르기에 자신에게 맞는 풀이로 익히는게 좋다.

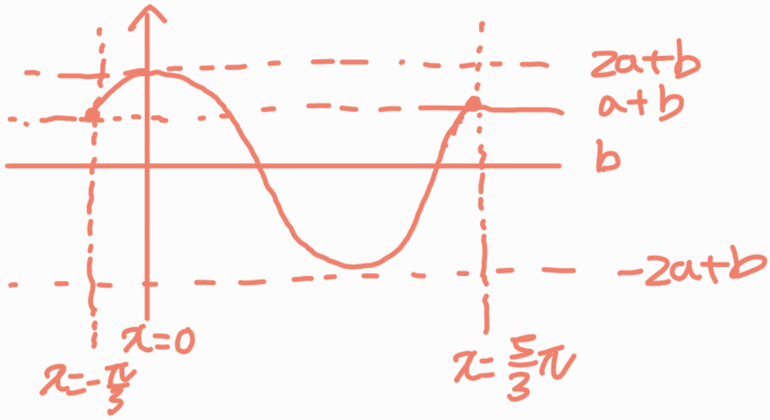
상당히 상경논술 치고 난이도가 높은 편이라 ···

약간의 '직관'이 들어가긴 해서 수능 수학 공부를

열심히 해야될 필요성이 있어보인다.

2. 7 이하인 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=2a\cos x+b$ $\left(-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}\right)$의 그래프가 두 직선 $y=10$, $y=13$과 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 m, n이라 하자. $m+n$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오.

$a>0$, $b>0$ 이기에 $f(x)$는



$m+n$이 최대가 되려면, 10과 13 중 하나는 $a+b$고 다른 하나는 $2a+b$와 $-2a+b$ 사이여야 한다.

① $a+b=10$

$a+b=10$이면, $y=13$은 $a+b$와 $2a+b$ 사이에 있어야 하므로 $a+b<13<2a+b$가 성립해야 한다.

$\therefore$ (a,b)의 순서쌍은 $(4,6),(5,5),(6,4),(7,3)$이 가능하다.

② $a+b=13$

$a+b=13$이면, $y=10$은 $a+b$와 $-2a+b$ 사이에 있어야 하므로

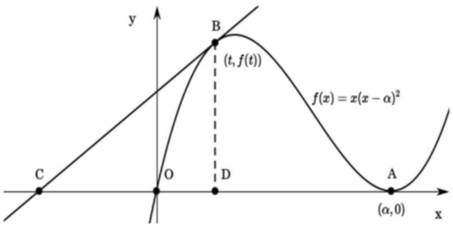
$-2a+b<10<a+b$가 성립해야 한다.

$\therefore$ (a,b)의 순서쌍은 $(6,7)$, $(7,6)$이 가능하다.

그러하기에, (a,b)의 모든 순서쌍은 $(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(6,7),(7,6)$이다.

난도가 쉽기도 하고, 이런 문제는 당연히 틀리면 안된다.

3. 두 실수 α, t $\left(0<t<\frac{\alpha}{3}\right)$에 대해, 함수 $f(x)=x(x-\alpha)^2$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{B}(t, f(t))$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 C라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$f'(t)(x-t)+f(t)$

삼각형 BCD의 넓이를 S_1이라 하고, 곡선 $y=f(x)$, 선분 BD, 선분 OD로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. (점 O는 좌표평면의 원점이다.)

S_1과 S_2를 각각 α와 t에 대한 식으로 표현하고, $\lim_{t \to 0} \frac{S_2}{S_1}$의 값을 구하시오.

1) S_1 구하기

C의 x좌표를 C_x라고 하면,

$C_x = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$ 이다.

$\therefore S_1 = \frac{f(t)}{f'(t)} \times f(t) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\{f(t)\}^2}{2f'(t)} = \frac{t^2(t-\alpha)^4}{2(3t^2-4\alpha t+\alpha^2)}$

2) S_2 구하기

$S_2 = \int_0^t f(t)dt = \int_0^t t^3-2\alpha t^2+\alpha^2 t$

$= \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}\alpha t^3 + \frac{\alpha^2}{2}t^2$

$\therefore \lim_{t \to 0} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{t \to 0} \frac{2t^2\left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{2}{3}\alpha t + \frac{\alpha^2}{2}\right)(3t^2-4\alpha t+\alpha^2)}{t^2(t-\alpha)^4}$

$= \frac{\frac{\alpha^2}{2} \cdot 2 \cdot \alpha^2}{\alpha^4} = 1$

S_2의 표현이 뭔가 길게 서술은 되어있지만,

별건 없었던 문제였다.