1. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x^3+8}=\dfrac{1}{3}$
>
> (나) $f(x)$는 허근을 갖는다.

이때, 정수 a, b, c를 모두 구하시오.

(가) 조건에서 분모가 0으로 가는데, 특정한 실수로 수렴하기에 $f(-2)=0$이어야 한다.

그러므로 $f(x)=(x+2)\{g(x)\}$라고 둘 수 있다.
(단, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

그러므로, $\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\dfrac{(x+2)g(x)}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\dfrac{(x+2)\,g(x)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

$=\lim_{x\to-2}\dfrac{g(x)}{(x^2-2x+4)}=\dfrac{1}{3}$이다.

이 때, 분모는 x가 -2로 갈 때 12로 수렴하므로, $g(-2)=4$이다.

또한, (나) 조건 때문에 $g(x)$는 실근을 가지면 안되므로, $g(x)$의 판별식은 0보다 작은 값을 가져야 한다.

$g(x)=x^2+dx+e$라고 두면 (단, d와 e는 실수),

$g(-2)=4-2d+e=4$, $-2d+e=0$, $e=2d$ ⋯ ①

$D=\ \ d^2-4e<0$, $d^2<4e$ ⋯⋯ ② 이 나온다.

이 때, ①의 식을 ②에 대입하면,

$d^2<8d$, $d^2-8d<0$, $0<d<8$이 된다.

$\therefore\ f(x)=(x+2)(x^2+dx+e)=(x+2)(x^2+dx+2d)$

$=x^3+(d+2)x^2+4dx+4d$ 이므로

정수 a, b, c의 순서쌍은

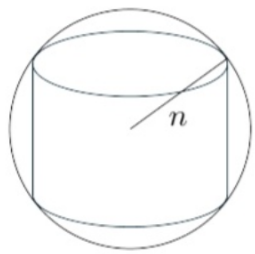
(3,4,4), (4,8,8), (5,12,12), (6,16,16), (7,20,20), (8,24,24), (9,28,28) 이다.

(3,4,4), (4,8,8), (5,12,12),
(6,16,16), (7,20,20), (8,24,24),
(9,28,28)

이 문제는 아마 학생들이 수월하게 풀만한 문제이다.
기본적인 것만 잘 지키면 된다.

제 풀이가 예시답안 풀이보단 조금 더 긴데, 설명도 약간 하려고도 하고,
인수 찾으면 $f(x)=(x+2)g(x)$ 꼴처럼 묶어서 푸는게 수능 공부하면서
습관화되서 그렇습니다. ㅎㅎ...

2. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 n인 구에 내접하는 원기둥이 있다. 원기둥 부피의 최댓값을 V_n이라 하면, $\sum_{n=1}^{10} V_n$의 값을 구하시오.



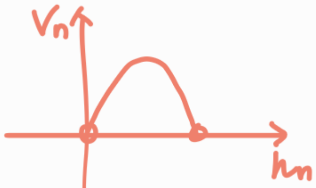
원기둥의 높이를 h_n라고 하고, 원기둥의 밑면의 반지름을 r_n이라고 하면 피타고라스의 법칙에 의해

$n^2 = (\frac{h_n}{2})^2 + r_n^2 = \frac{h_n^2}{4} + r_n^2$, $r_n^2 = n^2 - \frac{h_n^2}{4}$이 된다.

그러므로 원기둥의 부피 $V(n)$

$V_n = \pi r_n^2 h_n = \pi(n^2 - \frac{h_n^2}{4}) h_n$ 이고,

$h>0$, $V>0$ 이기 때문에



그래프는 다음과 같이 그려져 극댓값에서 최댓값을 가진다.

$\therefore V_n' = \pi(-\frac{h_n^2}{2} + n^2 - \frac{h_n^2}{4}) = \pi(n^2 - \frac{3h_n^2}{4})$ 이므로

$V'=0$이 되는 $h_n = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}n$에서 극값을 가지므로

$h_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}n$에서 최댓값을 가진다.

그리고 그때의 V_n은 $\pi(n^2 - \frac{1}{3}n^2)(\frac{2\sqrt{3}}{3}n) = \pi(\frac{2}{3}n^2)(\frac{2\sqrt{3}}{3}n) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi n^3$이다.

$\sum_{n=1}^{10} V_n = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \sum_{n=1}^{10} n^3 = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\{\frac{10(11)}{2}\}^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi(55)^2$

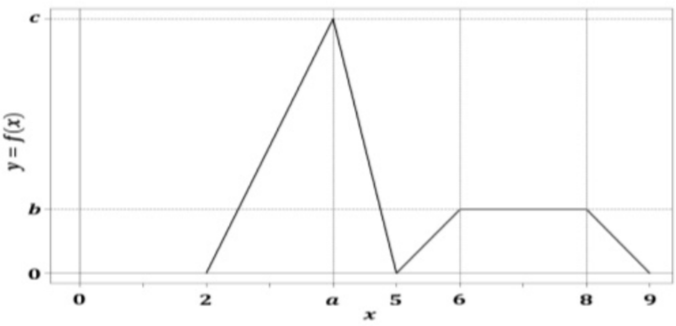
$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \cdot 25 \cdot 121$

$= \frac{12100\sqrt{3}}{9}\pi$ 이다.

$\frac{12100\sqrt{3}}{9}\pi$

학생들이 어려워할 법한 문제라고 생각한다.
수학 실력이 어느정도 되는 친구거나 미적분을 한 친구라면,
변수와 상수의 구분을 잘 하겠지만, 그게 아니라면 어려워할 것 같다.

3. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $2 \le X \le 9$이고, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\int_{2}^{5} f(x)dx = 2\int_{5}^{9} f(x)dx$

(나) 앞면과 뒷면이 나올 확률이 같은 동전을 8번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 W라고 하자. 이때, $\mathrm{P}(W=w)$를 최대로 하는 w의 값은 a이다.

이때, $\mathrm{P}(a \le X \le a+3)$의 값을 구하시오.

$\int_2^5 f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot c = \frac{3}{2}c$,

$\int_5^9 f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot(4+2)\cdot b = 3b$.

$\frac{3}{2}c = 6b$, $\frac{1}{2}c = 2b$, $b = \frac{1}{4}c$.

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $\int_2^9 f(x)dx = 1$ 이므로,

$3b = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = \frac{4}{9}$이다.

이 때, (나)에 따르면 확률변수 W는 이항분포 $(8, \frac{1}{2})$을 따른다.

그러므로, $P(W=w) = {}_8C_w \left(\frac{1}{2}\right)^w$ 이기에 $w_{max} = a = 4$이다.

$\therefore P(4 \le X \le 7) = \int_4^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx$

$= \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot\frac{1}{9}$

$= \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$.

$\frac{7}{18}$

확통의 통계파트에 대한 어느정도 공부가 되어있다면 충분히 풀 수 있는 문제라고 보여진다.