

수학 영역

※본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBS에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

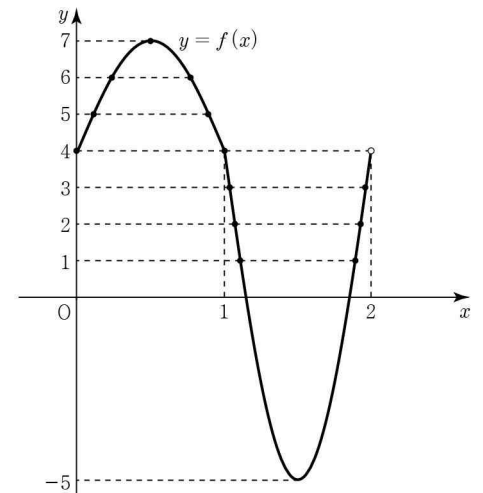
정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	①	7	④	8	②	9	④	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	②	15	①
16	2	17	5	18	163	19	10	20	24
21	28	22	76						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기
 $\sqrt[4]{3} \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 3$
2. [출제의도] 미분계수 계산하기
 $f'(x) = 3x^2 + 1$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 4$
3. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기
 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r ($r > 0$)이라 하면
 $a_n = ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)
 $a_1 \times a_{13} = a \times ar^{12} = a^2 r^{12} = (ar^6)^2 = 64$
 $ar^6 = 8 \dots \textcircled{1}$
 $\frac{a_5}{a_2} = \frac{ar^4}{ar} = r^3 = 2 \dots \textcircled{2}$
 두 식 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하면
 $4a = 8, a = 2$
 따라서 $a_4 = ar^3 = 2 \times 2 = 4$
4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기
 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 2$ 에서 연속이다.
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^3 - 5) = 8a - 5$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + 1) = 2a + 1$
 $f(2) = 2a + 1, 8a - 5 = 2a + 1$
 따라서 $a = 1$
5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기
 $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$
 $g'(1) = 2f(1) + 0 \times f'(1) = 2 \times 5 = 10$
6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ 이므로
 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$
 $(\cos \theta + \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta$

- $$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5}$$
- 따라서 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$
7. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기
 $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - x^3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2$
 $xf'(x) = 3x^2$
 $f'(x) = 3x$
 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + C$ (단, C 는 적분상수)
 $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - x^3$
 $x = 1$ 일 때,
 $0 = 1 \times f(1) - 1, f(1) = 1$
 $f(1) = \frac{3}{2} + C = 1$ 이므로 $C = -\frac{1}{2}$
 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$
 따라서 $f(2) = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$
 8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기
 $\log_2 a + \log_4 ab = \log_4 a^2 + \log_4 ab$
 $= \log_4 a^3 b = \frac{5}{2}$
 $a^3 b = 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$
 두 수 a, b 는 1이 아닌 자연수이므로
 $32 = 2^3 \times 4$
 $a = 2, b = 4$
 따라서 $a + b = 6$
 9. [출제의도] 정적분 이해하기
 $f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x)dx$ 이므로
 $f(0) - f(-1) + \int_0^1 \{x^2 + 2x + f'(x)\}dx$
 $= \int_{-1}^0 f'(x)dx + \int_0^1 (x^2 + 2x)dx + \int_0^1 f'(x)dx$
 $= \int_{-1}^1 f'(x)dx + \int_0^1 (x^2 + 2x)dx$
 $= 0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1$
 $= \left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0 = \frac{4}{3}$
 10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
 $f(x) = \begin{cases} 3 \sin \pi x + 4 & (0 \leq x < 1) \\ 9 \sin \pi x + 4 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$
 두 함수 $y = 3 \sin \pi x + 4, y = 9 \sin \pi x + 4$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수는 13

11. [출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기
 시간 t ($t \geq 0$)에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는
 $|x_1 - x_2| = \left| t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10 \right|$
 $f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10$ ($t \geq 0$)이라 하면
 $f'(t) = 3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4)$
 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	4	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t \geq 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최솟값이 $f(4) = 2$ 이므로 $f(t) > 0$
 $|x_1 - x_2| = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10$ 이고
 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t = 4$ 에서 최소이다.
 시간 t ($t \geq 0$)에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t), a(t)$ 라 하면
 $v(t) = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 10t + 10$
 $a(t) = v'(t) = 6t - 10$
 따라서 $t = 4$ 에서의 점 P의 가속도는
 $a(4) = 6 \times 4 - 10 = 14$

12. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기
 $b_4 = a_3 + b_3$
 $b_5 = b_4 + 1 = a_3 + b_3 + 1$
 $b_6 = b_5 + 1 = a_3 + b_3 + 2$
 $b_7 = a_6 + b_6 = a_6 + a_3 + b_3 + 2$
 $b_8 = b_7 + 1 = a_6 + a_3 + b_3 + 3$
 $b_9 = b_8 + 1 = a_6 + a_3 + b_3 + 4$
 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $a_3 = 1 + 2d, a_6 = 1 + 5d$ 이므로
 $b_9 - b_3 = a_6 + a_3 + 4 = 7d + 6 = 27$
 $d = 3$
 따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times \{2 \times 1 + (10-1) \times 3\}}{2} = 145$$

[참고]

$b_1 = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$b_3 = b_1 + 2 = \alpha + 2$$

$$b_9 = a_6 + a_3 + b_1 + 6 = 2 + 7d + \alpha + 6$$

$$b_9 - b_3 = 7d + 6$$

13. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = f(a) + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$$

$$g(0) = f(0) = 5$$

$$f(a) + b = 5$$

$$a^2 - 4a + b = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

함수 $y = f(x+a) + b$ 의 그래프는 함수

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼,

y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프이다.

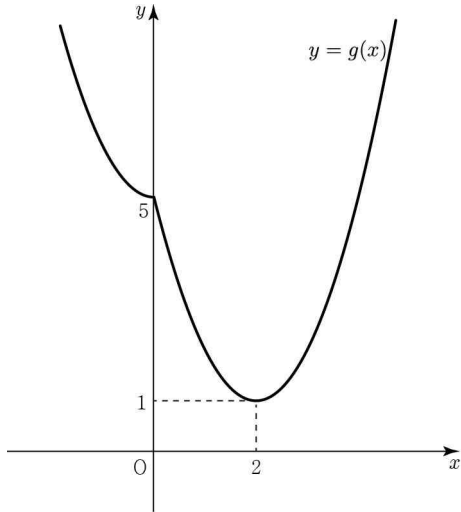
$$f(x+a) + b = \{x - (2-a)\}^2 + 1 + b \text{ 이므로}$$

함수 $y = f(x+a) + b$ 는

$x = 2-a$ 에서 최솟값 $1+b$ 를 갖는다.

(i) $2-a \geq 0$ 인 경우

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$k=4$ 또는 $k=5$ 일 때,

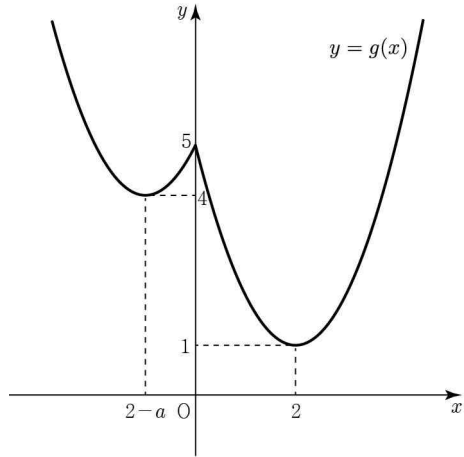
$$\left| \lim_{t \rightarrow k^+} h(t) - \lim_{t \rightarrow k^-} h(t) \right| \neq 2$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2-a < 0$ 인 경우

$$\left| \lim_{t \rightarrow k^+} h(t) - \lim_{t \rightarrow k^-} h(t) \right| = 2 \text{ 를 만족시키는}$$

k 의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$g(2-a) = 1 + b = 4, \quad b = 3$$

①에 의하여

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad (a-1)(a-3) = 0$$

$$a > 2 \text{ 이므로 } a = 3$$

$$\text{따라서 } g(-4) = f(-4+3) + 3 = 10 + 3 = 13$$

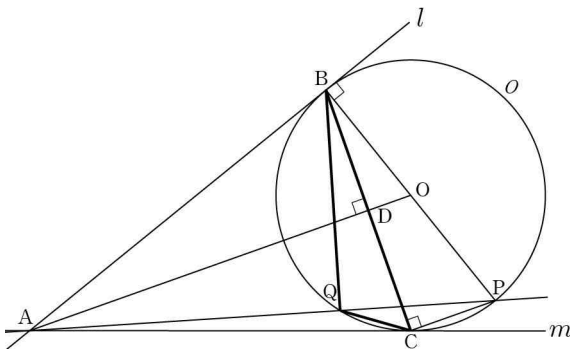
14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l 과 직선 BP 가 서로 수직이므로

직선 BP 는 원의 중심을 지나고, 선분 BP 는

원 O 의 지름이다. 원 O 의 중심을 O ,

선분 AO 와 선분 BC 가 만나는 점을 D 라 하자.



$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = 12^2 + (3\sqrt{2})^2 = 162$$

$$\overline{AO} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

삼각형 AOB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BO}$$

$$\frac{1}{2} \times 9\sqrt{2} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 12 \times 3\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = 4$$

$$\overline{BC} = 2 \times \overline{BD} = 8$$

원주각의 성질에 의하여

$$\angle BPQ = \angle BCQ, \quad \angle QPC = \angle QBC$$

$$\sin(\angle BCQ) : \sin(\angle QBC) = 3 : 1$$

삼각형 BQC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle BCQ)} = \frac{\overline{QC}}{\sin(\angle QBC)}$$

$$\overline{BQ} : \overline{QC} = 3 : 1$$

$$\overline{QC} = k (k > 0) \text{ 이라 하면, } \overline{BQ} = 3k$$

삼각형 BCP 는

$$\angle BCP = \frac{\pi}{2} \text{ 인 직각삼각형이므로}$$

$$\angle BPC = \theta \text{ 라 하면 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 BCP 에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

사각형 $BQCP$ 는 원 O 에 내접하므로

$$\angle CQB = \pi - \theta \text{ 이다.}$$

$$\cos(\angle CQB) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

삼각형 BQC 에서 코사인법칙에 의하여

$$8^2 = k^2 + (3k)^2 - 2 \times k \times 3k \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$k^2 = \frac{16}{3}$$

따라서 삼각형 BQC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{QC} \times \sin(\angle CQB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3k \times k \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2 \times \sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x) = \begin{cases} |x^2 + ax + b| - x^2 & (x \leq 0) \\ (x^2 + ax + b)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 미분가능하므로

조건 (가)에 의하여 $b \leq 0$

(i) $b=0$ 인 경우

$$f(x) = x^2 + ax = x(x+a)$$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x+a)| - x^2 & (x \leq 0) \\ x^2(x+a)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

① $a > 0$ 인 경우

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x \leq -a) \\ -2x^2 - ax & (-a < x \leq 0) \\ x^2(x+a)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

$x = -a$ 에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{g(x) - g(-a)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{ax - (-a^2)}{x + a} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} \frac{g(x) - g(-a)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a^+} \frac{(-2x^2 - ax) - (-a^2)}{x + a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -a^+} \frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a} = 3a$$

$a > 0$ 이므로 $a \neq 3a$

함수 $g(x)$ 는 $x = -a$ 에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$ 인 경우

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^4 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

$x=0$ 에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + x^3 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a < 0$ 인 경우

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x \leq 0) \\ x^2(x+a)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

$x < 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = ax \neq 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b < 0$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = |b| = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = b^2$$

$$g(0) = |b| = -b$$

$$\text{이므로 } -b = b^2$$

$b < 0$ 이므로 $b = -1$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x) = \begin{cases} |x^2 + ax - 1| - x^2 & (x \leq 0) \\ (x^2 + ax - 1)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

방정식 $x^2 + ax - 1 = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$) 라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta = -1$ 이므로 $\alpha < 0 < \beta$

$$g(x) = \begin{cases} ax - 1 & (x \leq \alpha) \\ -2x^2 - ax + 1 & (\alpha < x \leq 0) \\ (x^2 + ax - 1)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-2x^2 - ax + 1) - 1}{x} \\ &= -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\{(x^2 + ax - 1)^2 + x^3\} - 1}{x} \\ &= -2a \end{aligned}$$

에서 $-a = -2a, a = 0$

$$g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| - x^2 & (x \leq 0) \\ (x^2 - 1)^2 + x^3 & (x > 0) \end{cases}$$

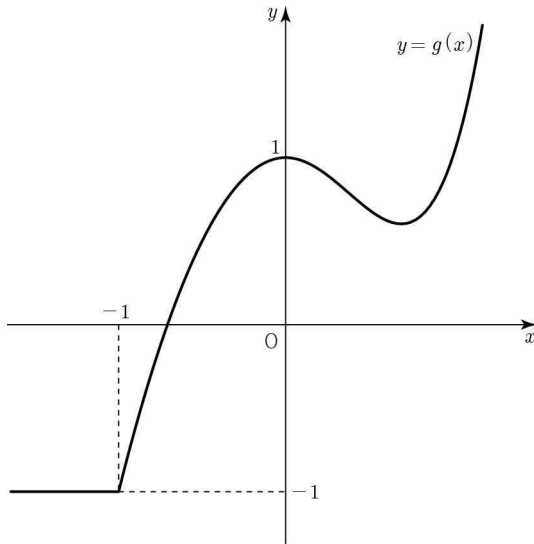
$$\text{따라서 } g\left(-\frac{1}{2}\right) + g(3) = \frac{1}{2} + 91 = \frac{183}{2}$$

[참고]

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq -1) \\ -2x^2 + 1 & (-1 < x \leq 0) \\ x^4 + x^3 - 2x^2 + 1 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$$2\log_3(x+1) = \log_3(x+7)$$

$$\log_3(x+1)^2 = \log_3(x+7)$$

$$(x+1)^2 = x+7$$

$$x^2 + 2x + 1 = x + 7$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

로그의 진수는 양수이므로

$$x+1 > 0, x+7 > 0$$

$$x > -1$$

따라서 $x = 2$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (6x^2 + 1)dx \\ &= 2x^3 + x + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수)} \end{aligned}$$

$$f(0) = C = 2$$

$$f(x) = 2x^3 + x + 2$$

$$\text{따라서 } f(1) = 2 + 1 + 2 = 5$$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} (2a_{k+1} - b_k) &= 2 \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{19} b_k = 150 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} (a_{k+1} + b_k) &= \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} + \sum_{k=1}^{19} b_k = 330 \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

두 식 ①, ②을 연립하면

$$3 \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} = 480, \quad \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} = 160$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} = 3 + 160 = 163$$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키므로

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b \text{ (} a, b \text{ 는 상수)}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로 $f'(2) = 32 + 4a = 0, f(2) = 16 + 4a + b = -6$
 $a = -8, b = 10$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0) = 10$

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

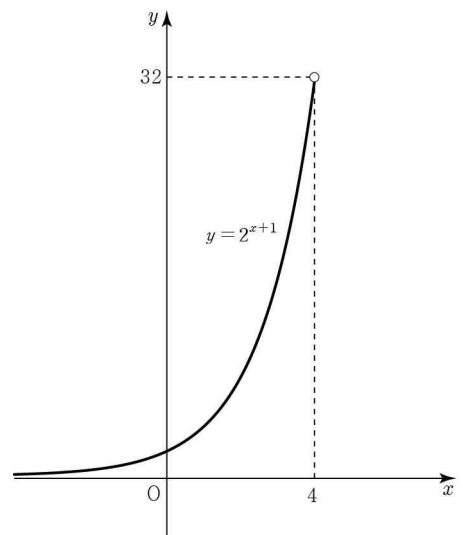
$$g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & (x < 4) \\ 2f(x) & (x > 4) \end{cases}$$

(i) $x < 4$ 인 경우

함수 $y = 2^{x+1}$ 의 그래프는

직선 $y=0$ 을 점근선으로 가지므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

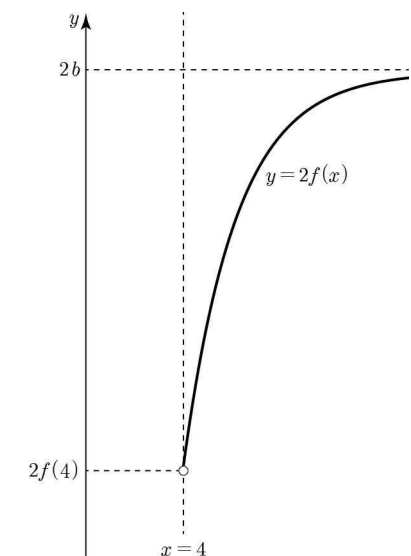


(ii) $x > 4$ 인 경우

함수 $y = 2f(x)$ 의 그래프는

직선 $y = 2b$ 를 점근선으로 가지므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건을 만족시키기 위해서는

$$2b = 32, b = 16$$

$$2f(4) = -2^{4-3} + 2b$$

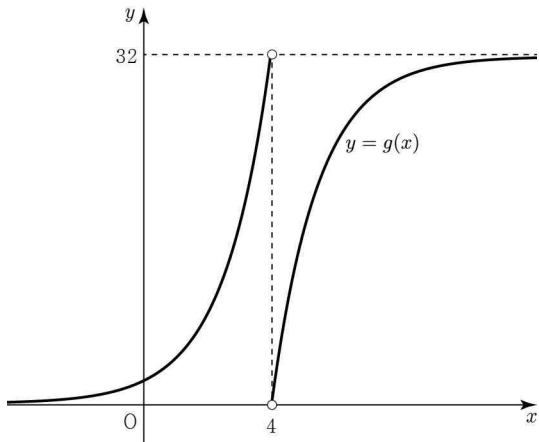
$$= -2^{a-3} + 32 = 0$$

$$2^{a-3} = 2^5, a = 8$$

$$g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & (x < 4) \\ -2^{-x+9} + 32 & (x > 4) \end{cases}$$

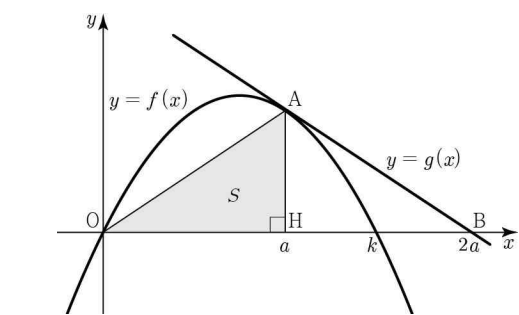
따라서 $g(6) = -2^3 + 32 = 24$

[참고]
함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



21. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x) = -2x + k$
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식 $y = g(x)$ 는
 $g(x) = (-2a + k)(x - a) - a^2 + ka$
 $= (-2a + k)x + a^2$
 $0 = (-2a + k)x + a^2$ 에서 $x = \frac{a^2}{2a - k} = b$
직선 $y = g(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 B라 하자.
 $\int_a^b g(x)dx = S$ 이므로 삼각형 BAH의 넓이와 삼각형 AOH의 넓이는 서로 같다.
점 H의 좌표는 $(a, 0)$ 이고 $\overline{OH} = \overline{BH}$ 이므로 $b = 2a$



$$\frac{a^2}{2a - k} = 2a \text{에서 } k = \frac{3}{2}a$$

$$\int_0^a \left\{ f(x) - \frac{1}{2}ax \right\} dx$$

$$= \int_0^a \left(-x^2 + \frac{3}{2}ax - \frac{1}{2}ax \right) dx$$

$$= \int_0^a (-x^2 + ax) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{6} = \frac{32}{3}$$

$a = 4, k = 6$
 $g(x) = -2x + 16$
따라서 $g(-k) = g(-6) = 12 + 16 = 28$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제 해결하기

a_n, a_{n+1} 이 모두 홀수라 가정하면
 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에서 a_{n+2} 는 짝수이므로 연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다. ... (★)

(i) a_4 가 짝수인 경우
 $a_6 = 6 = \frac{1}{2}a_4, a_4 = 12$
 a_4 가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여 a_2, a_3, a_5 는 홀수이다.
 a_2, a_3 이 홀수이므로 (★)에 의하여 a_1 은 짝수이다.
 $a_3 = \frac{1}{2}a_1$
 $a_5 = a_4 + a_3 = 12 + \frac{1}{2}a_1$
 $a_4 = a_3 + a_2 = \frac{1}{2}a_1 + a_2 = 12$
 $a_2 = 12 - \frac{1}{2}a_1$
 a_2 가 홀수이므로 $\frac{1}{2}a_1$ 은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값은 2, 6, 10, 14, 18, 22이다.

(ii) a_4 가 홀수인 경우
 $a_6 = 6 = a_5 + a_4$ 에서 a_4, a_5 가 홀수이므로 (★)에 의하여 a_3 은 짝수이다.
 $a_5 = \frac{1}{2}a_3$ 에서 $a_4 = 6 - \frac{1}{2}a_3$
 a_3 이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여 a_2 는 홀수이다.
 $a_4 = a_3 + a_2$ 에서
 $6 - \frac{1}{2}a_3 = a_3 + a_2$ 이므로 $a_3 = 4 - \frac{2}{3}a_2$
 a_3 이 자연수이므로 $a_2 = 3, a_3 = 2$
 a_1 이 홀수이면 $a_3 = a_2 + a_1$
 $2 = 3 + a_1$ 이므로 a_1 은 자연수가 아니다.
그러므로 a_1 은 짝수이고
 $a_3 = \frac{1}{2}a_1, a_1 = 4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 a_1 의 값의 합은 $(2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22) + 4 = 76$

※본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

확률과 통계 정답

23	④	24	①	25	③	26	②	27	①
28	②	29	285	30	34				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 중복순열 계산하기

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

24. [출제의도] 배반사건의 성질 이해하기

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로
 $P(A \cap B) = 0$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= P(A) + P(B)$

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{5} + P(B)$$

따라서 $P(B) = \frac{1}{2}$

25. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수 중 적어도 하나가 8의 약수인 사건을 X 라 하자.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

8의 약수가 4개이므로 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 모두 8의 약수가 아닌 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

따라서 구하고자 하는 사건의 확률은

$$P(X) = 1 - P(X^c)$$

$$= 1 - \frac{{}_8C_2}{{}_{12}C_2} = 1 - \frac{28}{66} = \frac{19}{33}$$

26. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수 이해하기

다항식 $(2+x)^5$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_5C_r \times 2^{5-r} \times x^r$ ($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$(1+ax)(2+x)^5$ 의 전개식에서

x^3 의 계수는

$$1 \times {}_5C_3 \times 2^2 + a \times {}_5C_2 \times 2^3 = 40 + 80a$$

x^4 의 계수는

$$1 \times {}_5C_4 \times 2 + a \times {}_5C_3 \times 2^2 = 10 + 40a$$

x^3 의 계수와 x^4 의 계수의 합이 290이므로

$$(40 + 80a) + (10 + 40a) = 290$$

$$50 + 120a = 290$$

따라서 $a = 2$

27. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포 이해하기

$$P(X = k+2) - P(X = k) = \frac{(-1)^k}{4} \text{에서}$$

$$k = 1 \text{일 때, } P(X = 3) - P(X = 1) = -\frac{1}{4}$$

$k = 2$ 일 때, $P(X=4) - P(X=2) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = a, P(X=2) = b$ 라 하면

$P(X=3) = a - \frac{1}{4}$

$P(X=4) = b + \frac{1}{4}$

이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	$a - \frac{1}{4}$	$b + \frac{1}{4}$	1

이산확률변수의 확률분포의 성질에 의하여 확률의 합이 1이므로

$a + b + (a - \frac{1}{4}) + (b + \frac{1}{4}) = 1$

$a + b = \frac{1}{2}$... ㉠

$E(X)$

$= 1 \times a + 2 \times b + 3 \times (a - \frac{1}{4}) + 4 \times (b + \frac{1}{4})$

$= 4a + 6b + \frac{1}{4} = \frac{21}{8}$

$4a + 6b = \frac{19}{8}$... ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$a = \frac{5}{16}, b = \frac{3}{16}$

따라서 $P(X=1) = \frac{5}{16}$

28. [출제의도] 중복조합의 수를 활용하여 추론하기

$n = 4, 5, 6$ 일 때,

$f(f(n)) = n$ 을 만족시키는 경우는

$f(n) = n$ 또는

$f(n) = m, f(m) = n (n \neq m, m \in X)$... (★)

(i) $f(4) < 4$ 인 경우

$f(4) = a (a < 4)$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(a) = 4$

$f(4) < f(a)$ 이므로

조건 (가)를 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

(ii) $f(4) = 4$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 4$ 이므로

세 수 $f(1), f(2), f(3)$ 을 선택하는

경우의 수는 ${}_4H_3$

$f(5) = b$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(b) = 5$ 이므로 $b \neq 4$

$f(b) = 5 > f(4) = 4$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $b > 4$

그러므로 $b = 5$ 또는 $b = 6$

① $f(5) = 5$ 인 경우

$f(6) = c$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(c) = 6$ 이므로 $c \neq 5$

$f(c) = 6 > f(4) = 4$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $c > 4$

그러므로 $c = 6$

$f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 6$ 이므로

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4H_3 \times 1 = {}_6C_3 = 20$

② $f(5) = 6$ 인 경우

(★)에 의하여 $f(6) = 5$

그러므로 $f(4) = 4, f(5) = 6, f(6) = 5$

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4H_3 \times 1 = {}_6C_3 = 20$

①, ②에 의하여 $f(4) = 4$ 일 때,

조건을 만족시키는 경우의 수는

$20 + 20 = 40$

(iii) $f(4) = 5$ 인 경우

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 5$ 이므로

세 수 $f(1), f(2), f(3)$ 을 선택하는

경우의 수는 ${}_5H_3$

(★)에 의하여 $f(5) = 4$

$f(6) = c$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(c) = 6$ 이므로 $c \neq 5$

$f(c) = 6 > f(4) = 5$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $c > 4$

그러므로 $c = 6$

$f(4) = 5, f(5) = 4, f(6) = 6$ 이므로

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_5H_3 \times 1 = {}_7C_3 = 35$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$40 + 35 = 75$

29. [출제의도] 정규분포의 표준화를 활용하여 문제 해결하기

확률변수 X 가 정규분포 $N(80, 5^2)$ 을 따르므로

Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때

$P(b \leq X \leq 75)$

$= P\left(\frac{b-80}{5} \leq Z \leq \frac{75-80}{5}\right)$

$= P\left(\frac{b-80}{5} \leq Z \leq -1\right)$

$= P\left(1 \leq Z \leq \frac{80-b}{5}\right)$

$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-b}{5}\right) - P(0 \leq Z \leq 1)$

$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-b}{5}\right) - 0.3413 = 0.1359$

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-b}{5}\right) = 0.4772$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$\frac{80-b}{5} = 2, b = 70$

$Y = -2X + a$ 이므로

$P(a-160 \leq Y \leq b)$

$= P(a-160 \leq -2X+a \leq 70)$

$= P\left(\frac{a-70}{2} \leq X \leq 80\right)$

$= P\left(\frac{\frac{a-70}{2} - 80}{5} \leq Z \leq \frac{80-80}{5}\right)$

$= P\left(\frac{a-230}{10} \leq Z \leq 0\right)$

$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{230-a}{10}\right) = 0.4332$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$\frac{230-a}{10} = 1.5, a = 215$

따라서 $a + b = 215 + 70 = 285$

[다른 풀이]

확률변수 X 가 정규분포 $N(80, 5^2)$ 을 따르므로

$Y = -2X + a$ 에서

$E(Y) = E(-2X + a)$

$= -2E(X) + a$

$= -160 + a$

$\sigma(Y) = \sigma(-2X + a)$

$= 2\sigma(X)$

$= 10$

이므로 확률변수 $Y = -2X + a$ 는

정규분포 $N(a-160, 10^2)$ 을 따른다.

$P(a-160 \leq Y \leq b)$

$= P(a-160 \leq Y \leq 70)$

$= P\left(\frac{(a-160)-(a-160)}{10} \leq Z \leq \frac{70-(a-160)}{10}\right)$

$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{230-a}{10}\right) = 0.4332$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$\frac{230-a}{10} = 1.5, a = 215$

따라서 $a + b = 215 + 70 = 285$

30. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸

카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있는 사건을

X , 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 사건을

Y 라 하자.

(I) k 가 3의 배수인 경우

주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에

꺼낸 후 주머니 B에서 임의로 2장의

카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$

같은 숫자가 적힌 카드가 있는 경우의 수는

① 같은 숫자가 적힌 카드가 1쌍일 때,

${}_3C_1 \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1 - 2) = 21$

② 같은 숫자가 적힌 카드가 2쌍일 때,

${}_3C_2 \times {}_2C_2 = 3$

k 가 3의 배수일 때

같은 숫자가 적힌 카드가 있을 확률은

$\frac{1}{3} \times \left(\frac{21}{36} + \frac{3}{36}\right) = \frac{2}{9}$

(II) k 가 3의 배수가 아닌 경우

주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸

후 주머니 B에서 임의로 1장의 카드를

꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 16$

이 중 같은 숫자가 적힌 카드를 꺼내는

경우는 같은 숫자가 적힌 카드가 1쌍인

경우이므로 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_1C_1 = 3$

k 가 3의 배수가 아닐 때

같은 숫자가 적힌 카드가 있을 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{8}$$

(I), (II)에 의하여

$$P(X) = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{25}{72} \dots \textcircled{7}$$

(i) k 가 3의 배수인 경우
같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$
 k 가 3의 배수일 때
같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{9}{36} = \frac{1}{12}$

(ii) k 가 3의 배수가 아닌 경우
같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 경우의 수는 ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$
 k 가 3의 배수가 아닐 때
같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{24}$

(i), (ii)에 의하여

$$P(X \cap Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8} \dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에 의하여

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{25}{72}} = \frac{9}{25}$$

$p = 25$, $q = 9$
따라서 $p + q = 34$

※본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBS에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

미적분 정답

23	①	24	④	25	③	26	②	27	⑤
28	②	29	16	30	72				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{7x} - 1}{7x} \times 7 \right) = 7$$

24. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$$x = t + \sin t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 1 + \cos t$$

$$y = -4\cos t + 2\sin^2 t \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4\sin t + 4\sin t \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\sin t(1 + \cos t)}{1 + \cos t} = 4\sin t$$

따라서 $t = \frac{\pi}{3}$ 일 때,

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1} + 2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n + 1}$$

(i) $0 < \frac{x}{5} < 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1} + 2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n + 1} = 2x$$

$$f(k) = 2k = 5 \text{에서 } k = \frac{5}{2}$$

(ii) $\frac{x}{5} = 1$ 인 경우

$$x = 5 \text{ 이므로}$$

$$f(5) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \times 5}{1 + 1} = \frac{11}{2}$$

$$f(5) \neq 5$$

(iii) $\frac{x}{5} > 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \infty \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^n} = 0$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{5} + \frac{2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}}{1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}} = \frac{x}{5}$$

$$f(k) = \frac{k}{5} = 5 \text{에서 } k = 25$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $f(k) = 5$ 인 모든 양수 k 의 값의 합은

$$\frac{5}{2} + 25 = \frac{55}{2}$$

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\text{직선 AP의 기울기 } f(t) = \frac{\ln t - 1}{t - 0} = \frac{\ln t - 1}{t^2}$$

$$\int_1^e f(t) dt = \int_1^e \frac{\ln t - 1}{t^2} dt = \int_1^e \left(\frac{\ln t}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt - \int_1^e \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t^2} dt - \left[\ln t \right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^e - 1$$

$$= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) - 1 = -\frac{2}{e}$$

$$\text{따라서 } \int_1^e f(t) dt = -\frac{2}{e}$$

27. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{f(x)} - \{f(x) + k\}f'(x)e^{f(x)}}{\{e^{f(x)}\}^2} = \frac{f'(x)\{1 - k - f(x)\}}{e^{f(x)}}$$

함수 $g(x)$ 가 $x = 3$ 에서 극대이므로 $g'(3) = 0$
 $f'(3) = 0$ 또는 $f(3) = 1 - k$

함수 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $f'(3) = 0$ 이면 $k \neq 0$ 인 실수 k 에 대하여

$f(3) \neq f(3 - 2k)$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(3) \neq 0$ 이고 $f(3) = 1 - k$

$$g(3) = \frac{f(3) + k}{e^{f(3)}} = \frac{1}{e^{1-k}} = e^{k-1}$$

$$g(3) = e \text{ 이므로 } k = 2$$

$$f(3) = f(-1) = -1$$

$$\text{그러므로 } f(x) + 1 = (x + 1)(x - 3)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 4, f(2) = -4$$

$$\text{따라서 } g(k) = g(2) = \frac{f(2) + 2}{e^{f(2)}} = -2e^4$$

28. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} & (x < 0) \\ -2x + 2 & (x > 0) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-3 + 2\ln(-x)}{x^3} & (x < 0) \\ -2 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{x} = \infty$$

$x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-e^{\frac{3}{2}}$...	$-e$...	(0)
$f'(x)$	-	-	-	0	+	
$f''(x)$	-	0	+	+	+	
$f(x)$		↘ 변곡점	↗	극소	↘	

$0 < t < 2$ 인 t 에 대하여 곡선 $y = \frac{\ln(-x)}{x}$ 와

직선 $y = tx + k$ 가 접할 때 k 의 값을 b 라 하자.

$x < 0$ 에서 곡선 $y = \frac{\ln(-x)}{x}$ 와 직선

$y = tx + k$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$$\begin{cases} k < b \text{ 일 때, } & 0 \\ k = b \text{ 일 때, } & 1 \\ k > b \text{ 일 때, } & 2 \end{cases}$$

이다.

곡선 $y = -x^2 + 2x + a$ 위의 점 $(0, a)$ 에서 접선의 기울기는 2이므로

$k \geq a$ 인 모든 실수 k 에 대하여

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = tx + k$ 가

만나는 서로 다른 점의 개수가 2이기 위해서는

곡선 $y = -x^2 + 2x + a$ ($x \geq 0$)과

직선 $y = tx + k$ 가 만나는 서로 다른 점의

개수가

$$\begin{cases} a \leq k < b \text{ 일 때, } & 2 \\ k = b \text{ 일 때, } & 1 \\ k > b \text{ 일 때, } & 0 \end{cases}$$

이어야 한다.

즉, 직선 $y = tx + b$ 가 두 곡선

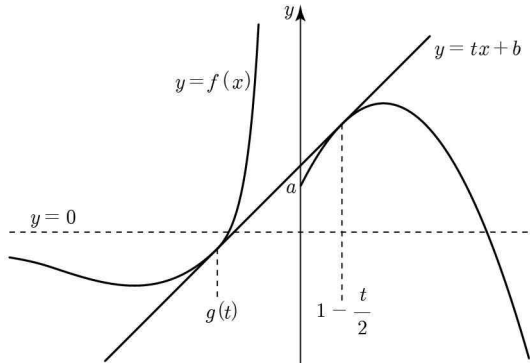
$$y = \frac{\ln(-x)}{x} \quad (x < 0), \quad y = -x^2 + 2x + a \quad (x \geq 0)$$

에 동시에 접할 때, $k \geq a$ 인 모든 실수 k 에

대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = tx + k$ 가 만나는 서로 다른 점의

개수는 2이다.



$x < 0$ 에서 직선 $y = tx + b$ 는

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(g(t), f(g(t)))$ 에서의

접선이므로 $f'(g(t)) = t \dots \textcircled{1}$

$x > 0$ 에서

$$f'(x) = -2x + 2 = t \text{ 이므로 } f'\left(1 - \frac{t}{2}\right) = t$$

곡선 $y = -x^2 + 2x + a$ 위의

점 $\left(1 - \frac{t}{2}, a + 1 - \frac{t^2}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$y = tx + b$ 와 같다.

두 점 $(g(t), f(g(t))), \left(1 - \frac{t}{2}, a + 1 - \frac{t^2}{4}\right)$ 을

지나는 직선의 기울기가 t 이므로

$$t = \frac{\left(a + 1 - \frac{t^2}{4}\right) - f(g(t))}{\left(1 - \frac{t}{2}\right) - g(t)}$$

$$t - \frac{t^2}{2} - t \times g(t) = a + 1 - \frac{t^2}{4} - f(g(t))$$

$$h(t) = a = f(g(t)) - t \times g(t) - \frac{t^2}{4} + t - 1$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여

$h'(t)$

$$= f'(g(t)) \times g'(t) - g(t) - t \times g'(t) - \frac{t}{2} + 1$$

$$= t \times g'(t) - g(t) - t \times g'(t) - \frac{t}{2} + 1$$

$$= -g(t) - \frac{t}{2} + 1$$

$$g(t) + h'(t) = -\frac{t}{2} + 1$$

$$\text{따라서 } g(1) + h'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

[참고]

$$f'(g(1)) = 1 \text{ 에서 } \frac{1 - \ln\{-g(1)\}}{\{g(1)\}^2} = 1$$

$$g(1) = -1, \quad h'(1) = \frac{3}{2}$$

[다른 풀이]

$x \geq 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선

$y = tx + k$ 의 접점을 $(s, -s^2 + 2s + a)$ 라 하면

접선의 방정식은

$$y = (-2s + 2)(x - s) - s^2 + 2s + a$$

$$= (-2s + 2)x + s^2 + a$$

직선 $y = (-2s + 2)x + s^2 + a$ 가

직선 $y = tx + b$ 와 일치하므로

$$t = -2s + 2, \quad b = s^2 + a \text{ 에서}$$

$$h(t) = a = b - s^2$$

$$h'(t) = \frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} - 2s \frac{ds}{dt} \dots \textcircled{1}$$

점 $(g(t), f(g(t)))$ 는

직선 $y = tx + b$ 위의 점이므로

$$f(g(t)) = t \times g(t) + b$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f'(g(t))g'(t) = g(t) + t \times g'(t) + \frac{db}{dt}$$

$$f'(g(t)) = t \text{ 이므로 } \frac{db}{dt} = -g(t)$$

$$g(t) = -\frac{db}{dt} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$g(t) + h'(t) = -2s \frac{ds}{dt}$$

$x > 0$ 일 때, 직선 $y = tx + b$ 가

곡선 $y = -x^2 + 2x + a$ 와

점 $(s, -s^2 + 2s + a)$ 에서 접하므로

$t = -2s + 2$ 에서

$$s = 1 - \frac{t}{2} \text{ 이고 } \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$t = 1 \text{ 일 때, } s = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } g(t) + h'(t) = -2s \frac{ds}{dt}$$

$$= -2 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

$b_n = |a_n + 1| - (a_n + 1)$ 이라 하면

$$b_n = \begin{cases} 0 & (a_n + 1 \geq 0) \\ -2(a_n + 1) & (a_n + 1 < 0) \end{cases}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ (단, } n \text{ 은 자연수)}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq -1$ 이면

$b_n = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a \geq 3$

n 이 홀수일 때, $b_n = 0$

n 이 짝수일 때, $a_n < -1$ 을 만족시키는

최대의 자연수 n 을 N 이라 하자.

(I) $n > N$ 인 경우

$$a_n + 1 \geq 0 \text{ 이므로 } b_n = 0$$

(II) $n \leq N$ 인 경우

$$a_n + 1 < 0 \text{ 이므로}$$

$$b_n = -2(a_n + 1)$$

$$= -2 \left\{ a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} - 2$$

이고

$$a_N < -1 \leq a_{N+2}$$

$$a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-1} < -1 \leq a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

$$-1 \times (-2)^{N-1} < a \leq -1 \times (-2)^{N+1}$$

$$2^{N-1} < a \leq 2^{N+1}$$

(I), (II)에 의하여 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $N = 2$ 인 경우

$$2 < a \leq 2^3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_2 = -2(a_2 + 1) = a - 2$$

$$a - 2 \leq 2^3 - 2 = 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq 6 \text{ 이므로 주어진 조건을}$$

만족시키지 않는다.

(ii) $N = 4$ 인 경우

$$2^3 < a \leq 2^5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_2 + b_4$$

$$= -2(a_2 + 1) - 2(a_4 + 1)$$

$$= (a - 2) + \left(\frac{1}{4}a - 2\right) = \frac{5}{4}a - 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{5}{4}a - 4 = 26 \text{ 에서 } a = 24$$

(iii) $N \geq 6$ 인 경우

$$a > 2^5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n > b_2 + b_4 = \frac{5}{4}a - 4$$

$$\frac{5}{4}a - 4 > \frac{5}{4} \times 2^5 - 4 = 36$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n > 36 \text{ 이므로 주어진 조건을}$$

만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a = 24$

등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 24이고 공비가 $-\frac{1}{2}$

$$a_n = 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 16$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 16$$

30. [출제의도] 치환적분을 활용하여 문제 해결하기

$$f(x) = \int_0^x e^{\cos \pi t} dt \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^{\cos \pi x}$$

모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x+2) = f'(x) \dots \textcircled{1}$$

$$f'(-x) = f'(x) \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여

$$f(x+2) = f(x) + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수)}$$

$f(2) = f(0) + C = C$ 이므로

$f(x+2) = f(x) + f(2)$

$$f(2) = \int_0^2 e^{\cos \pi t} dt$$

$$= \int_0^2 f'(t) dt$$

$$= \int_0^1 f'(t) dt + \int_1^2 f'(t) dt$$

$$= f(1) + \int_{-1}^0 f'(t) dt$$

㉔에 의하여 $\int_{-1}^0 f'(t) dt = \int_0^1 f'(t) dt$ 이므로

$$f(2) = f(1) + \int_0^1 f'(t) dt$$

$$= f(1) + f(1) = 2f(1)$$

$$h(g(t)+2) = 2t^3 + 6f(1)t^2 + 1$$

$$x = g(t)+2 \text{로 치환하면 } 1 = g'(t) \frac{dt}{dx}$$

$$g(t) = x-2 \text{에서 } t = f(x-2)$$

$$x = 3 \text{일 때 } t = f(1)$$

$$x = 7 \text{일 때 } t = f(5)$$

이고

$$h'(g(t)+2)g'(t) = 6t^2 + 12f(1)t \text{ 이므로}$$

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)} dx = \int_{f(1)}^{f(5)} \frac{h'(g(t)+2)}{f(g(t)+2)} g'(t) dt$$

$$= \int_{f(1)}^{f(5)} \frac{6t^2 + 12f(1)t}{f(g(t)+2)} dt$$

$$= \int_{f(1)}^{f(5)} \frac{6t\{t+2f(1)\}}{t+2f(1)} dt$$

$$= \int_{f(1)}^{f(5)} 6t dt$$

$$= 3 \times \left[t^2 \right]_{f(1)}^{f(5)}$$

$$= 3 \times \left[\{f(5)\}^2 - \{f(1)\}^2 \right]$$

$$f(5) = f(3) + f(2)$$

$$= \{f(1) + f(2)\} + f(2) = 5f(1)$$

이므로

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)} dx = 3 \times \left[\{5f(1)\}^2 - \{f(1)\}^2 \right]$$

$$= 72 \times \{f(1)\}^2$$

따라서 $k = 72$

[다른 풀이]

$$g(f(x)) = x \text{ 이므로}$$

$$h(x+2) = 2\{f(x)\}^3 + 6f(1)\{f(x)\}^2 + 1$$

$$h'(x+2) = 6\{f(x)\}^2 f'(x) + 12f(1)f(x)f'(x)$$

$x = t+2$ 라 하면

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)} dx$$

$$= \int_1^5 \frac{h'(t+2)}{f(t+2)} dt$$

$$= \int_1^5 \frac{6\{f(t)\}^2 f'(t) + 12f(1)f(t)f'(t)}{f(t)+f(2)} dt$$

$$= \int_1^5 \frac{6f(t)f'(t)\{f(t)+2f(1)\}}{f(t)+2f(1)} dt$$

$$= \int_1^5 6f(t)f'(t) dt$$

$$= 3 \times \left[\{f(5)\}^2 - \{f(1)\}^2 \right]$$

$$f(5) = f(3) + f(2)$$

$$= \{f(1) + f(2)\} + f(2) = 5f(1)$$

이므로

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)} dx = 3 \times \left[\{5f(1)\}^2 - \{f(1)\}^2 \right]$$

$$= 72 \times \{f(1)\}^2$$

따라서 $k = 72$

*본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

기하 정답

23	㉓	24	㉑	25	㉔	26	㉓	27	㉒
28	㉕	29	12	30	25				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합 계산하기

$\vec{a} = (-6, 0)$, $\vec{b} = (k, 2)$ 에 대하여

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (-6, 0) + (2k, 4)$$

$$= (-6 + 2k, 4) = (0, 4) \text{ 이므로}$$

$$-6 + 2k = 0$$

따라서 $k = 3$

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의

$$\text{접선의 방정식은 } \frac{x}{2} + \frac{2y}{8} = 1$$

$$y = -2x + 4$$

따라서 y 절편은 4

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\{(x, y) - (3, 4)\} \cdot (-3, 6) = 0$$

$$-3(x-3) + 6(y-4) = 0$$

$$x - 2y + 5 = 0$$

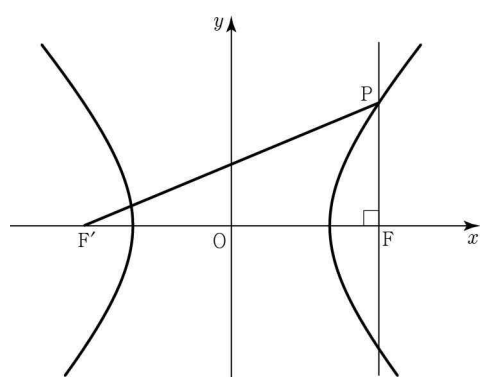
$|\vec{OP}|$ 의 최솟값은 점 $O(0, 0)$ 과

직선 $x - 2y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

따라서 $|\vec{OP}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{5}$

26. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기



다른 한 초점을 $F'(-c, 0)$ 이라 하면

$$\text{쌍곡선의 정의에 의하여 } \overline{PF'} - \overline{PF} = 8$$

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 8 = 5 + 8 = 13$$

삼각형 PFF'은 직각삼각형이므로

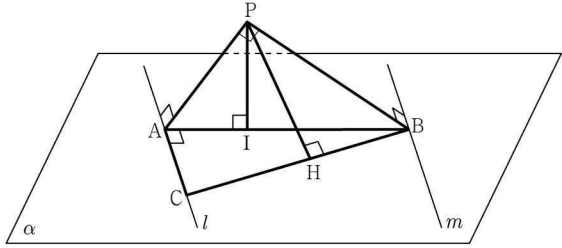
$$\overline{FF'} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$2c = 12, c = 6$$

따라서 $b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{PI} \perp \alpha$, $\overline{PA} \perp l$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IA} \perp l \dots \textcircled{1}$

$\overline{PI} \perp \alpha$, $\overline{PB} \perp m$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IB} \perp m \dots \textcircled{2}$

평면 α 위의 두 직선 l, m 이 서로 평행이므로

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

세 점 A, B, I는 한 직선 위에 있다.

$\frac{\overline{AP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ 에 의하여

두 삼각형 ABP와 CBA는 서로 닮음이다.

$\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle BPA = \frac{\pi}{2}$

삼각형 ABP에서

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2 = 27$$

$$\overline{AB} = 3\sqrt{3}$$

삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PI} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{BP}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{PI} \times 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{2}$$

$$\overline{PI} = \sqrt{6}$$

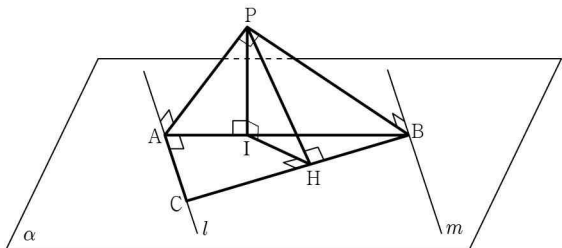
삼각형 BPI에서

$$\overline{BI}^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PI}^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2 = 12$$

$$\overline{BI} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\overline{PI} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IH} \perp \overline{BC}$



두 삼각형 ABP, CBA는 서로 닮음이고

두 삼각형 IBH, CBA는 서로 닮음이므로

두 삼각형 ABP, IBH는 서로 닮음이다.

$$\text{그러므로 } \frac{\overline{IH}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

$$\overline{IH} = \frac{\overline{AP} \times \overline{IB}}{\overline{AB}} = \frac{3 \times 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 2$$

삼각형 PIH에서

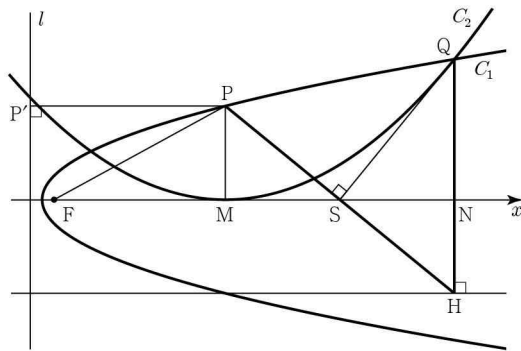
$$\overline{PH}^2 = \overline{PI}^2 + \overline{IH}^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 = 10$$

따라서 $\overline{PH} = \sqrt{10}$

28. [출제의도] 포물선의 성질을 활용하여
문제 해결하기

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 M,

선분 QH와 x 축의 교점을 N이라 하자.



점 Q가 포물선 C_2 위의 점이므로

포물선의 정의에 의하여 $\overline{QP} = \overline{QH}$

그러므로 삼각형 PHQ는

$\overline{QP} = \overline{QH} = 5\sqrt{6}$ 인 이등변삼각형이다.

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 S라

하면

$$\overline{PS} = \overline{HS} = 2\sqrt{15}$$

$$\overline{QS}^2 = \overline{QH}^2 - \overline{HS}^2 = (5\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{15})^2 = 90$$

$$\overline{QS} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

삼각형 QPH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{QS} = \frac{1}{2} \times \overline{QH} \times \overline{MN}$$

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{15} \times 3\sqrt{10} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{6} \times \overline{MN}$$

$$\overline{MN} = 12 \dots \textcircled{1}$$

두 삼각형 PMS, HNS에서

$$\angle PMS = \angle HNS = \frac{\pi}{2}, \overline{PS} = \overline{HS},$$

$\angle PSM = \angle HSN$ 이므로

두 삼각형 PMS, HNS는 서로 합동이다.

$$\overline{MS} = \overline{NS} = 6, \overline{PS} = \overline{HS} = 2\sqrt{15}$$

이므로

$$\overline{PM}^2 = \overline{PS}^2 - \overline{MS}^2 = (2\sqrt{15})^2 - 6^2 = 24$$

$$\overline{PM} = \overline{HN} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{QN} = \overline{QH} - \overline{HN} = 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

두 점 M, N의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하자.

두 점 P, Q는 포물선 C_1 위의 점이므로

$$24 = 4px_1, 54 = 4px_2 \text{에서 } x_1 = \frac{6}{p}, x_2 = \frac{27}{2p}$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여

$$x_2 - x_1 = \frac{15}{2p} = 12 \text{에서 } p = \frac{5}{8}$$

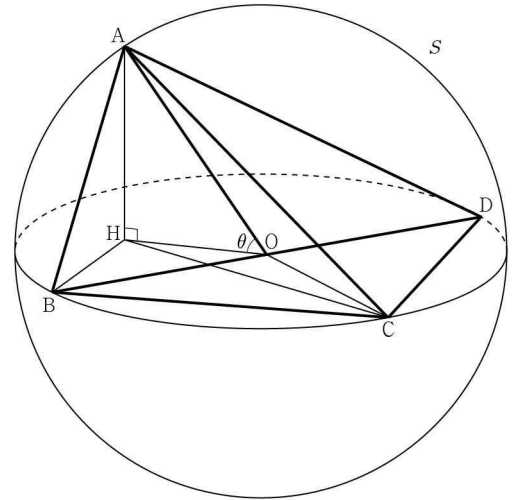
포물선 C_1 의 준선을 l 이라 할 때,

점 P에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 P'이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PP'}$

따라서 $\overline{PF} = \overline{PP'} = p + x_1 = \frac{5}{8} + \frac{48}{5} = \frac{409}{40}$

29. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여
추론하기



점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 HBD이다.

$$\cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{5} = \frac{3}{5}$$

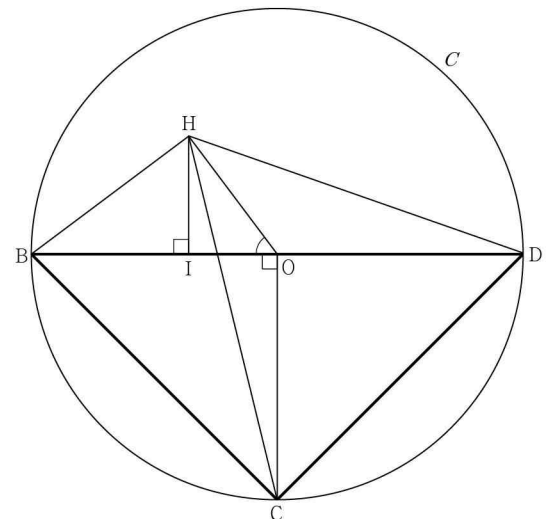
$$\overline{OH} = 3, \overline{AH} = 4$$

$\angle AHC = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 = (\sqrt{74})^2 - 4^2 = 58$$

$$\overline{CH} = \sqrt{58}$$

평면 BCD와 구 S의 교선을 C 라 하자.



삼각형 OHC에서

$$\cos(\angle HOC) = \frac{3^2 + 5^2 - (\sqrt{58})^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{24}{30} = -\frac{4}{5}$$

$\overline{BC} = \overline{CD}$ 이므로

삼각형 BCD는 직각이등변삼각형이고

$$\angle BOC = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle HOB = \angle HOC - \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin(\angle HOB) = \sin\left(\angle HOC - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\angle HOC) = \frac{4}{5}$$

점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{HI} = \overline{OH} \times \sin(\angle HOB) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

따라서 삼각형 HBD의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{12}{5} = 12$

30. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

두 선분 AC와 BD의 교점을 O라 하면

$$\begin{aligned} |\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}| &= |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} - 4\overline{OP}| \\ &= |(\overline{OA} + \overline{OC}) + (\overline{OB} + \overline{OD}) - 4\overline{OP}| \\ &= |-4\overline{OP}| = 4|\overline{OP}| \\ |\overline{BD}|^2 &= (\overline{CD} - \overline{CB}) \cdot (\overline{CD} - \overline{CB}) \\ &= |\overline{CD}|^2 + |\overline{CB}|^2 \\ &\quad - 2|\overline{CD}||\overline{CB}|\cos(\angle BCD) \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 64 \end{aligned}$$

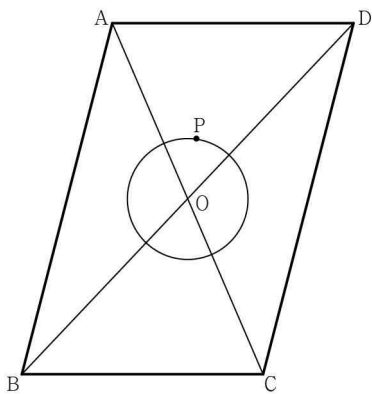
$|\overline{BD}| = 8$

$|\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}| = \frac{1}{2} |\overline{BD}|$ 에서

$4|\overline{OP}| = \frac{1}{2} |\overline{BD}| = 4$ 이므로

$|\overline{OP}| = 1$

점 P는 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \overline{AC} - \overline{AP} = \overline{PC} \text{ 이므로} \\ \overline{PB} \cdot \overline{DQ} &= \overline{PB} \cdot (\overline{AQ} - \overline{AD}) \\ &= \overline{PB} \cdot (\overline{PC} - \overline{AD}) \\ &= \overline{PB} \cdot (\overline{PC} + \overline{CB}) \\ &= \overline{PB} \cdot \overline{PB} \\ &= (\overline{OB} - \overline{OP}) \cdot (\overline{OB} - \overline{OP}) \\ &= |\overline{OB}|^2 - 2(\overline{OB} \cdot \overline{OP}) + |\overline{OP}|^2 \\ &= 16 - 2(\overline{OB} \cdot \overline{OP}) + 1 \\ &= 17 - 2(\overline{OB} \cdot \overline{OP}) \end{aligned}$$

$|\overline{BD}| = 8$ 이므로

$|\overline{OB}| = 4$

두 벡터 \overline{OB} , \overline{OP} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PB} \cdot \overline{DQ} &= 17 - 2|\overline{OB}||\overline{OP}|\cos\theta \\ &= 17 - 2 \times 4 \times 1 \times \cos\theta \\ &= 17 - 8\cos\theta \end{aligned}$$

따라서
 $\overline{PB} \cdot \overline{DQ}$ 의 최댓값은 $\theta = \pi$ 일 때,
 $17 - 8\cos\pi = 25$

[참고]

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \overline{AC} - \overline{AP} \\ \overline{OQ} - \overline{OA} &= \overline{OC} - \overline{OA} - (\overline{OP} - \overline{OA}) \\ \overline{OQ} &= \overline{OA} + \overline{OC} - \overline{OP} = -\overline{OP} \end{aligned}$$

