제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[4]{3}\times 3^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 3^1$

2. 함수 $f(x)=x^3+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$f'(x) = 3x^2+1 \rightarrow f(1) = 3+1$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 \times a_{13} = 64, \quad \frac{a_5}{a_2}=2$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$a \times ar^{12} = 64$, $\frac{ar^4}{ar} = 2 = r^3$

$(ar^6)^2 = 64$

$ar^6 = 8 \rightarrow a \times 2^2 = 8 \quad a=2.$

$\Rightarrow a_4 = ar^3 = 4.$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-5 & (x<2) \\ ax+1 & (x\ge 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(2-0) = 8a-5$

$f(2) = f(2+0) = 2a+1$

$\Rightarrow 8a-5 = 2a+1$

$6a = 6 \quad \therefore a=1$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=5$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$g'(x) = 2x f(x) + (x^2-1) f'(x)$

$g'(1) = 2f(1) + 0 = 10$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\cos\theta + \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{5}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$

$\therefore \sin\theta \cdot \cos\theta = -\frac{2}{5}$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$x=1$ $0 = f(1)-1$

$f(1)=1$

미분 $\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 3x^2$

$f'(x) = 3x$

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + C$

$x=1$ $1 = \frac{3}{2}+C$ $\therefore C = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow f(2) = \frac{3}{2}\times 4 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

8. 1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여

$$\log_2 a + \log_4 ab = \frac{5}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\log_4 a^2 + \log_4 ab = \frac{5}{2}$

$\log_4 a^3 b = \frac{5}{2} \rightarrow a^3 b = 4^{\frac{5}{2}} = 2^5$

$2^5 = 2^3 \times 4$

$f(x) = \frac{1}{2} m x^2 + c \leftrightarrow f'(x) = mx$

9. 이차함수 $f(x)$가 $\int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$을 만족시킬 때,

$$f(0) - f(-1) + \int_0^1 \{x^2 + 2x + f'(x)\}dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$\rightarrow c - \left(\frac{1}{2} m + c\right) + \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 + \frac{1}{2} m x^2\right]_0^1$

$= \cancel{c} - \cancel{\frac{1}{2} m} - \cancel{c} + \frac{1}{3} + 1 + \cancel{\frac{1}{2} m}$

$= \frac{4}{3}$

10. 다음과 같이 $0 \le x < 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

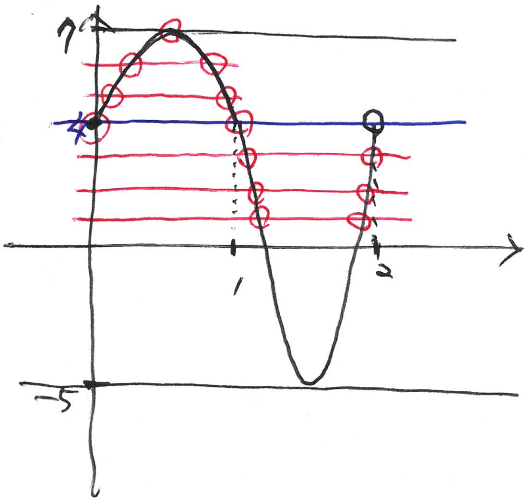
$n-1 \le x < n$일 때, $f(x) = 3^n \sin \pi x + 4$이다. (단, $n = 1$, 2)

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

$0 \le x < 1 \rightarrow f(x) = 3 \sin \pi x + 4$

$1 \le x < 2 \rightarrow f(x) = 9 \sin \pi x + 4$



11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 5t^2 + 10t,\quad x_2 = \frac{5}{2}t^2 - 2t - 10$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

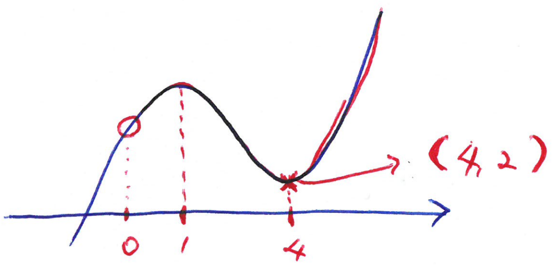
① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

✓ 거리 $= \left| t^3 - 5t^2 + 10t - \left(\frac{5}{2}t^2 - 2t - 10\right) \right|$

$= \left| t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10 \right|$

→ 미분. $3t^2 - 15t + 12t = 0$

$3(t-1)(t-4) = 0$ $t = 1, 4$



∴ $t=4$ 일때. 최소 거리 2.

✓ 거리 미분 → $x_1' = v = 3t^2 - 10t + 10$

속도 미분 → $v' = a = 6t - 10$

(=가속도)

→ $t=4$ 일때 점 P 가속도 $24-10$

12. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 1 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + b_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_9 - b_3 = 27$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 100 ② 145 ③ 190 ④ 235 ⑤ 280

$\{b_n\}$ b

$b_1 = b$ $b+1$

$b+2$ → b_3

$b+2+a_3$

$b+3+a_3$

$b+4+a_3$

$b+4+a_3+a_6$

$b+5+a_3+a_6$

$b+6+a_3+a_6$ → b_9

⇒ $b_9 - b_3 = 4 + a_3 + a_6$

$= 4 + 1 + 2d + 1 + 5d = 27$

∴ $d = 3$

등차 $S_{10} = \dfrac{10(2 + 9 \times 3)}{2} = 145$

NEXT

13. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$ 와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

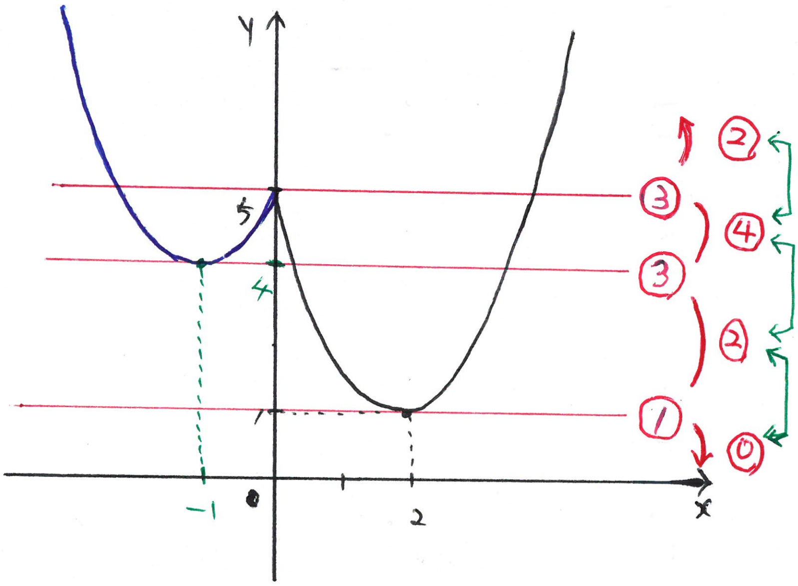
$$\left|\lim_{t\to k+}h(t)-\lim_{t\to k-}h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 1, 4, 5일 때, $g(-4)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$\Rightarrow$ $h(k+0)-h(k-0)=2$ or -2

$y=t$와 만나는 점의 변화가 "2개 차이"



중심축 $x=-\frac{-4}{2\times1}=2$

꼭지점 $(2,1)$

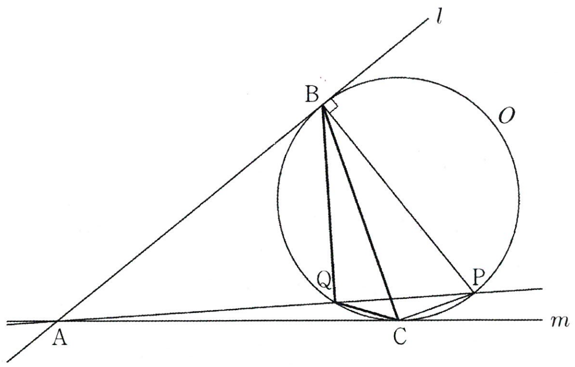
x축으로 $-a$ 만큼 (-3)

y축으로 b 만큼 (3)

꼭지점 $(-1,4)$

$\Rightarrow$ $g(x)\begin{cases}(x+1)^2+4 & (x<0)\\ (x-2)^2+1 & (x\geq0)\end{cases}$ $\longrightarrow$ $g(-4)=(-3)^2+4=13$

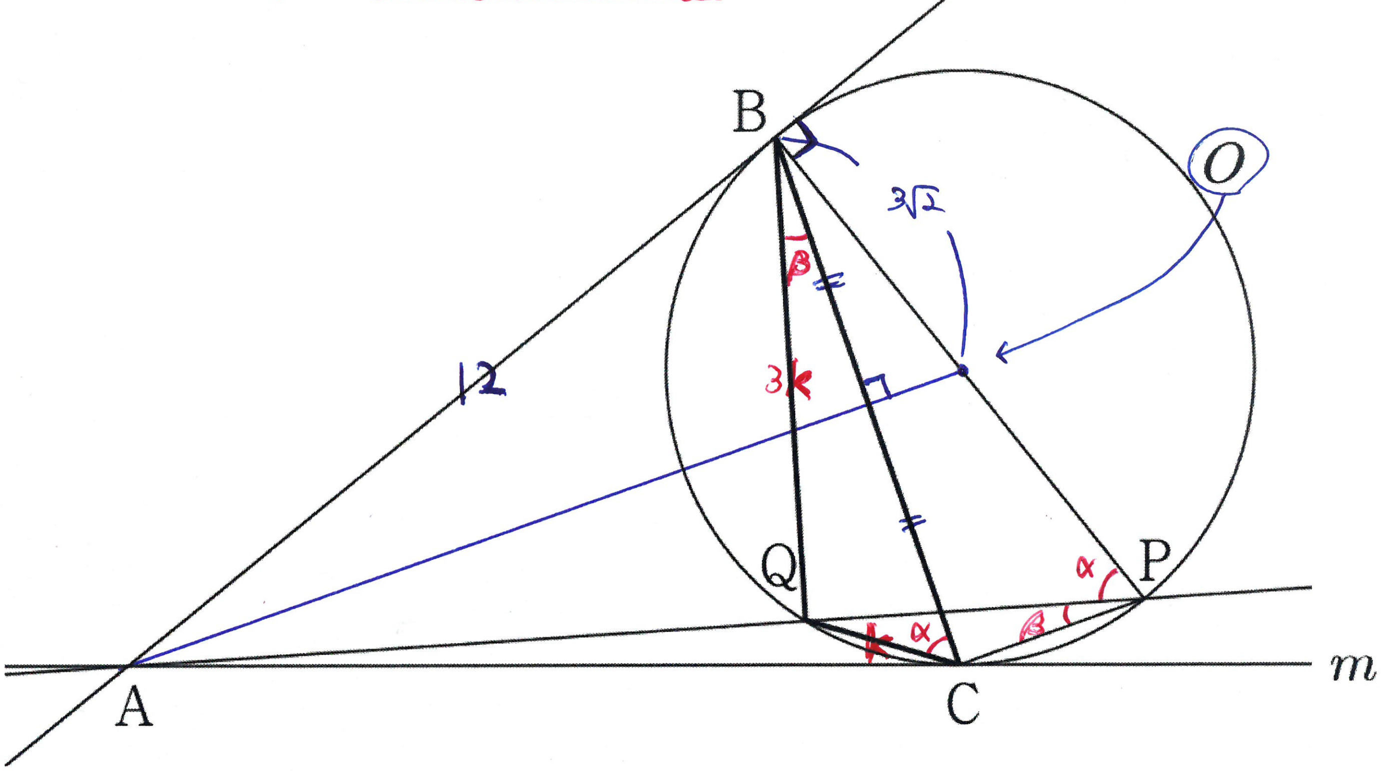
14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 O의 외부에 있는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 원 O와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 O와 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P, 직선 AP가 원 O와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 $\overline{AB}=12$일 때, $\sin(\angle BPQ):\sin(\angle QPC)=3:1$이다. 삼각형 BQC의 넓이는? [4점]

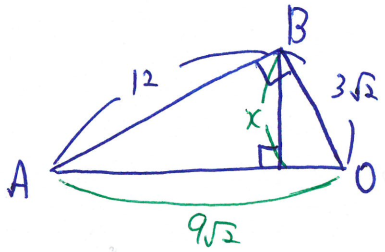


① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

풀이 1.

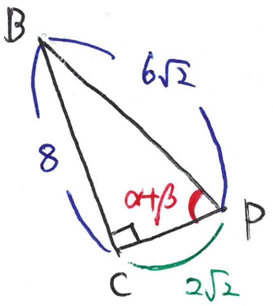
$\sin\alpha : \sin\beta = \underline{\overline{BQ} : \overline{CQ} = 3:1}$





$12 \times 3\sqrt{2} = x \times 9\sqrt{2}$ $\underline{\overline{BC} = 8}$

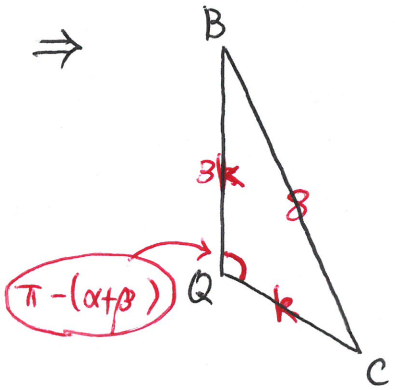
$x = 4.$



$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{8}{6\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$



✓ $64 = 9k^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \underline{\cos(\pi - (\alpha+\beta))}$

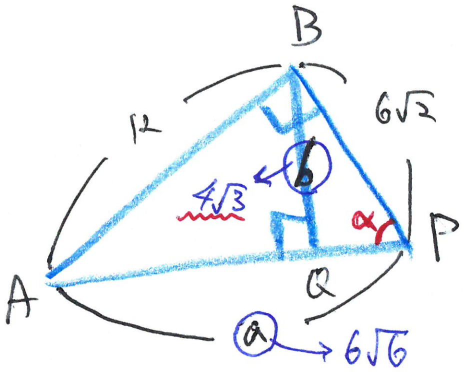
$= -\cos(\alpha+\beta)$

$\therefore k^2 = \dfrac{16}{3}$

$\triangle BQC = \dfrac{1}{2} \times 3k \times k \times \sin(\alpha+\beta)$

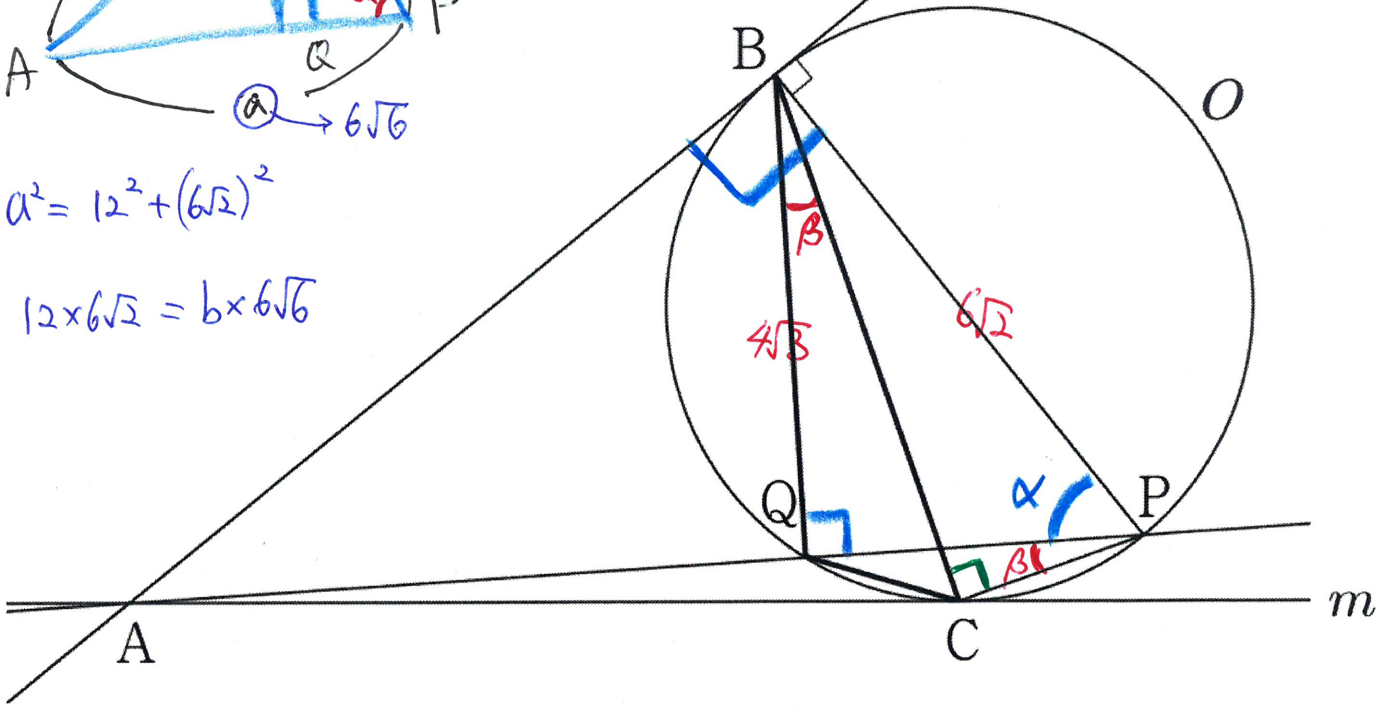
$= \dfrac{3}{2} \times \dfrac{16}{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

풀이 1.2



✓ $a^2 = 12^2 + (6\sqrt{2})^2$

✓ $12 \times 6\sqrt{2} = b \times 6\sqrt{6}$



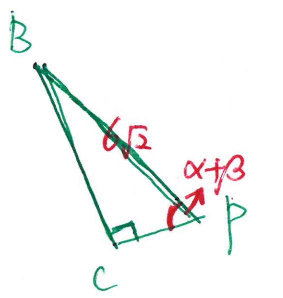
→ $\sin\alpha = \dfrac{12}{6\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(가)

→ $\sin\alpha : \sin\beta = 3 : 1$

$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$, $\cos\beta = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

→

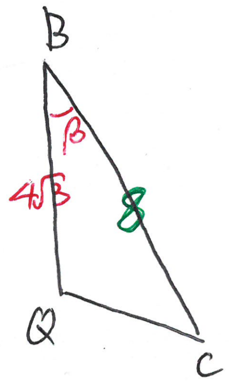


$\therefore \overline{BC} = 6\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta) = 6\sqrt{2} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 8$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{3} \times \dfrac{5\sqrt{3}}{9} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{9} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

→



$\triangle BQC = \dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 8 \times \sin\beta$

$= \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

→ 미분가능.

이 다음 조건을 만족시킨다.

$* b \le 0$

(가) 함수 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $g(x)=0$은 음의 실근을 갖는다.

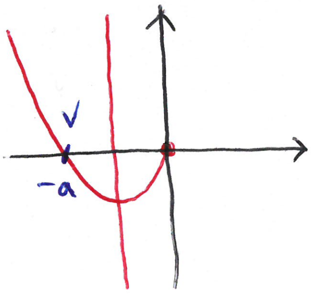
$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$ ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

$\checkmark$ $y=f(x)$ 중심축 $x=-\frac{a}{2\times1}=-\frac{a}{2}$

1) $b=0$ 이면,

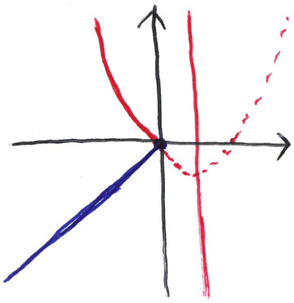
$a>0$ 경우



$x=-a$에서도 미분 가능 하지 않다.

(가)조건 X.

$a\le0$ 경우



"$y=g(x)$" 그래프가 $x<0$ 에서 x축과 만날수가 없다.

(나) 조건 X

⇒ NEXT

단답형

first $x+1>0$, $x+7>0$

$x>-1$

16. 방정식

$$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$(x+1)^2=x+7$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$.

$\therefore x=2$, $\cancel{-3}$

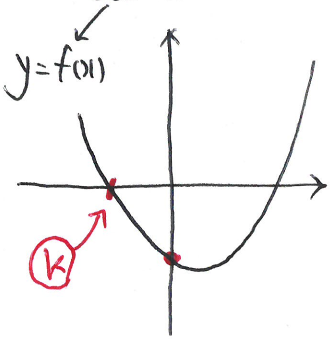
17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+1$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3+x+C$

$x=0$ $2=C$

$\rightarrow f(1)=2+1+C=5$

ⅱ) $b<0$ 이면, $y=g(x)$는 $x=0$ 에서 미분 가능 해야 한다. ((가)조건)



$$g(x)\begin{cases} ax+b & (x\le k) \\ -2x^2-ax-b & (k<x\le 0) \\ (x^2+ax+b)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

✓ $g(0)=g(-0)=-b$

$g(+0)=b^2$

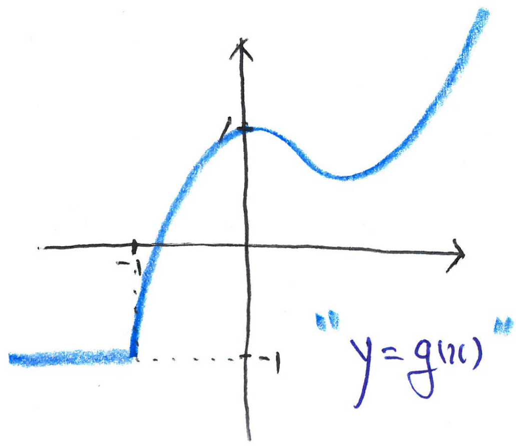
$\rightarrow$ $-b=b^2$ $\quad b^2+b=0$ $\quad \therefore b=\cancel{0},-1$

✓ $g'(x)\begin{cases} -4x-a & (k<x<0) & \rightarrow & g'(-0)=-a \\ 2(x^2+ax+b)(2x+a)+3x^2 & & \rightarrow & g'(+0)=2ab \end{cases}$

$-a=2ab^{-1}$

$-a=-2a$ $\quad \therefore a=0$.

$$\Rightarrow g(x)\begin{cases} -1 & (x\le -1) \\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0) \\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0) \end{cases}$$



$g(-\frac{1}{2})=-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2}$

$g(3)=81+27-18+1=91$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$① \sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)=150, \quad ② \sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)=330$$

이다. $a_1=3$일 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

① + ② $\quad \sum_{k=1}^{19} 3a_{k+1} = 480$

$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} = 160$

$= a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$\Rightarrow \quad a_1 + \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{20} a_k = 3+160$

19. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

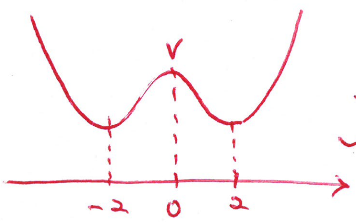
$f(x)=x^4+ax^2+b$

$f'(x)=4x^3+2ax = 4x(x+2)(x-2)$

✓ $f(2)=16+4a+b=-6$

✓ $f'(2)=32+4a=0$

$\therefore a=-8,\ b=10$



$f(0)=10$

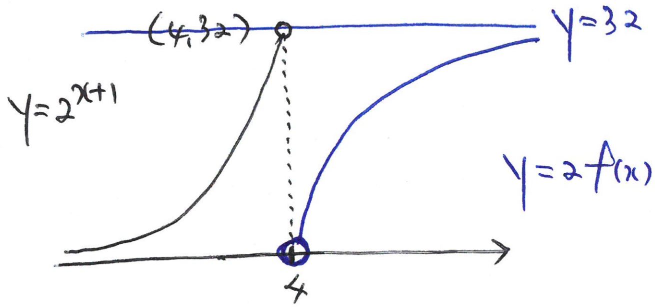
20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=-2^{-x+a}+b$가 있다. 집합 $\{x \mid x\neq 4,\ x는\ 실수\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+2^x+\frac{|x-4|}{x-4}\{f(x)-2^x\}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

$g(x) \begin{cases} (x>4) & 2f(x) \\ (x<4) & 2^{x+1} \end{cases}$



$\rightarrow y=-2^{-x+a+1}+2b$

점근선 $y=32$

$\therefore b=16$

$(4, 0)$ 대입

$0=-2^{a-3}+32 \qquad \therefore a=8$

✓ $g(x)=-2^{-x+9}+32 \quad (x>4)$

$g(6)=-2^3+32=24$

NEXT

21. 함수 $f(x)=-x^2+kx\ (k>0)$ 의 그래프 위에 있는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))\left(a>\frac{k}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하고, 직선 $y=g(x)$ 의 x 절편을 b 라 하자. 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 AOH의 넓이를 S 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

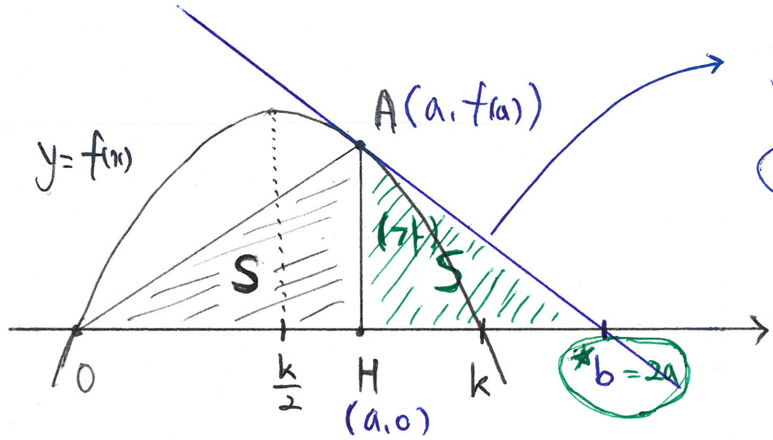
> (가) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$
>
> (나) $\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx=\frac{32}{3}$

$g(-k)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k 는 상수이다.) [4점]

22. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6=6$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n 에 대하여
> $$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
>
> (나) 네 항 $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 짝수인 항의 개수는 1이다.

중심축 $x=-\frac{k}{2\times(-1)}=\frac{k}{2}$



$f'(x)=-2x+k$

$y-(-a^2+ka)=(-2a+k)(x-a)$

x절편 $x=\frac{a^2}{2a-k}=b=2a$

$\hookrightarrow a^2=2a(2a-k)$

$k=\frac{3}{2}a$

$\Rightarrow \int_0^a\left(f(x)-\frac{1}{2}ax\right)dx=\int_0^a\left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx=\frac{32}{3}$

$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$ $\quad\therefore a=4 \rightarrow k=6$

접선 $g(x)=-2x+16$.

$g(-6)=12+16$

> ⋆ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

i) a_4가 홀수이면,

a_{n+2} → 홀수인 경우 / 짝수인 경우

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2
6	$6-\alpha$	α (홀수)	$\cancel{6-2\alpha}$ 홀수 $\boxed{a_5=a_4+a_3}$	㉯ 조건 때문에 무조건 홀수
	$\uparrow$ $\boxed{a_6=a_5+a_4}$		$12-2\alpha$ (짝수 ok) $\boxed{a_5=\frac{1}{2}a_3}$	→ $3\alpha-12$ $\boxed{a_4=a_3+a_2}$

"α는" ① ③ ⑤ 가능.

$\cancel{1}$ $\cancel{3}$ ⑤

따라서, $\alpha=5$ 이면 6 / 1 / 5 / 2 / 3 / → a_1: $\cancel{-1}$ 음수, 4

ii) a_4가 짝수이면 ㉯ 조건 a_5, a_3, a_2 모두 홀수!!

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2
6	$\beta+12$	12 →	β (홀수) →	$-\beta+12$
	$\boxed{a_5=a_4+a_3}$		"β는" 1, 3, 5, 7, 9, 11	$\boxed{a_4=a_3+a_2}$

						a_1
$\beta=1$	6	13	12	1	11	$\cancel{-10}$ 음수, 2
$\beta=3$	6	15	12	3	9	$\cancel{-6}$, 6
$\beta=5$	6	17	12	5	7	$\cancel{2}$, 10
$\beta=7$	6	19	12	7	5	$\cancel{2}$ 짝수, 14
$\beta=9$	6	21	12	9	3	$\cancel{6}$, 18
$\beta=11$	6	23	12	11	1	$\cancel{10}$, 22

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_4\Pi_3$의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

$4 \times 4 \times 4$.

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B) = \frac{9}{10}, \quad P(A) = \frac{2}{5}$$

일 때, $P(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

배반 $p(A \cup B) = \underbrace{p(A)}_{\frac{2}{5}} + p(B) = \frac{9}{10}$

$p(B) = \frac{9}{10} - \frac{2}{5}$

25. 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수 중 적어도 하나가 8의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{17}{33}$ ③ $\frac{19}{33}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{23}{33}$

∨ 전체 : ${}_{12}C_2$

∨ 반대: 모두(2개) 8의약수 X . ${}_{8}C_2$

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ 3 $\cancel{4}$ 5 6 7 $\cancel{8}$ 9 10 11 12

$\therefore \dfrac{{}_{12}C_2 - {}_{8}C_2}{{}_{12}C_2}$

26. 다항식 $(1+ax)(2+x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 x^1의 계수의 합이 290일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^3 \rightarrow 1 \times {}_5C_3\, 2^2 x^3 + ax \times {}_5C_2\, 2^3 x^2 = (40+80a)x^3$

$x^4 \rightarrow 1 \times {}_5C_4\, 2^1 x^4 + ax \times {}_5C_3\, 2^2 x^3 = (10+40a)x^3$

$\Rightarrow 50 + 120a = 290$

$120a = 240$ $\therefore a = 2$

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 1부터 4까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(X=k+2)-\mathrm{P}(X=k)=\frac{(-1)^k}{4}\ (k=1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{21}{8}$일 때, $\mathrm{P}(X=1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{11}{32}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{13}{32}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

X	1	2	3	4	합
$P(x)$	$a+\frac{1}{4}$	$b-\frac{1}{4}$	a	b	1

$a+\frac{1}{4}+b-\frac{1}{4}+a+b=1$ $a+b=\frac{1}{2}$

$E(X)=a+\frac{1}{4}+2(b-\frac{1}{4})+3a+4b=\frac{21}{8}$

$4a+6b=\frac{23}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{16}$

$b=\frac{7}{16}$

$\rightarrow p(x=1)=a+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

28. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq 5$
(나) $n=4,5,6$일 때, $f(f(n))=n$이다.

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

$f(f(4))=4.$

f(4) 값이 3이하이면, (가) 조건 만족 X.

ex) $f(4)=2 \rightarrow f(2)=4$

$\Rightarrow f(4)=4$ or 5.

i) $f(4)=4$ 이면 $\rightarrow 20\times 2=40$

$1\leq f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq 4$ ${}_4H_3$.

$f(5)=5,\ f(6)=6$

or

$f(5)=6,\ f(6)=5$ 2가지.

ii) $f(4)=5$ 이면. $\rightarrow {}_7C_3=35$

$1\leq f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq 5$ ${}_5H_3$.

$f(5)=4,\ f(6)=6$ 로 정해진다.

NEXT

단답형

29. 정규분포 $N(80, 5^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포를 따르는 확률변수 Y가

$$2X + Y = a$$

를 만족시킨다.

$E(X) = 80$

$V(X) = 25$

① $P(b \le X \le 75) = 0.1359$,
② $P(a-160 \le Y \le b) = 0.4332$

일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

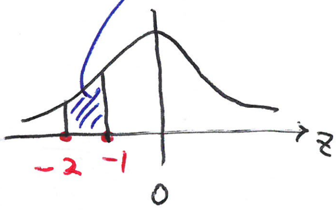
z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① $P\left(\dfrac{b-80}{5} \le Z \le \dfrac{75-80}{5}\right) = 0.1359$

-1

$\dfrac{b-80}{5} = -2$

$\therefore b = 70$



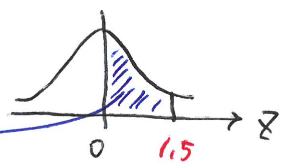
② $E(Y) = E(-2X+a) = -2E(X) + a = -160+a$

$V(Y) = V(-2X+a) = 4V(X) = 100$

확률변수 Y

$N(-160+a, 10^2)$

$P\left(0 \le Z \le \dfrac{b-(-160+a)}{10}\right) = 0.4332$.



$\dfrac{70+160-a}{10} = 1.5$

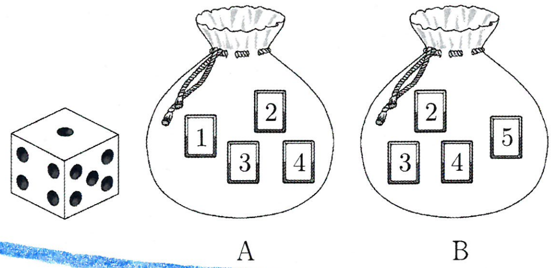
$\therefore a = 215$

$\Rightarrow a+b = 285$

30. 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 A와 2부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 3의 배수이면
> 주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 후
> 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고,
> k가 3의 배수가 아니면
> 주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸 후
> 주머니 B에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있을 때, 꺼낸 카드 중 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

i) k가 3의 배수이면,

주머니 A에서 $\boxed{1}$ 포함이 되고, 주머니 B에서 이들을 포함해서 뽑는 경우.

$\boxed{1}$ / $\boxed{2}$ ~ $\boxed{4}$

$$\Rightarrow \frac{2}{6} \times \frac{3}{{}_4C_2} \times \frac{3}{{}_4C_2}$$

주머니 A에서 $\boxed{1}$은 제외 되고, A에서 뽑힌 이들을 적어도 하나 포함.

$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ / $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ / $\boxed{2}$ $\boxed{4}$

$$\Rightarrow \frac{2}{6} \times \frac{3}{{}_4C_2} \times \left(1 - \frac{1}{{}_4C_2}\right)$$

A에서 뽑힌 이들 말고 나머지를 뽑는 경우의 수.

ii) k가 3의 배수가 아니면,

주머니 A와 B에서 같은 숫자 1개씩 뽑는 경우.

$$\frac{3}{4 \times 4}$$

(A, B)
(2, 2)
(3, 3)
(4, 4)

$$\Rightarrow \frac{4}{6} \times \frac{3}{16}$$

iii) 주머니 A와 B에서 $\boxed{4}$ 1개씩 뽑는 경우.

3의 배수	주머니 A	주머니B		3의배수 X	주머니A	주머니B

$$\Rightarrow \frac{2}{6} \times \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{\text{iii}}{\text{i} + \text{ii}} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}}{\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right) + \frac{1}{8}} = \frac{9}{25}$$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\boxed{7x}}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{7x}{x}$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \sin t, \quad y = -4\cos t + 2\sin^2 t$$

에서 $t = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{dy}{dt} = 4\sin t + 4\sin t \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \cos t$$

$\Rightarrow$ $t = \frac{\pi}{3}$ 대입

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}$$

25. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^{n}+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = A$

일 때, $f(k)=5$를 만족시키는 모든 양수 k의 값의 합은? [3점]

① $\frac{51}{2}$ ② $\frac{53}{2}$ ③ $\frac{55}{2}$ ④ $\frac{57}{2}$ ⑤ $\frac{59}{2}$

i) $0<\frac{x}{5}<1$ 이면. $A=0$.

$f(x)=\frac{0+2x}{0+1}=2x=5$

$\rightarrow k=\frac{5}{2}$

ii) $\frac{x}{5}=1$ 이면, $A=1$

$f(x)=\frac{1+2x}{1+1}\neq 5$ 5 10

iii) $\frac{x}{5}>1$ 이면. A는 ∞

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{5}+\frac{2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}}$

$f(x)=\frac{x}{5}$ $\quad \frac{\frac{x}{5}+0}{1+0}$

$x=k$. $\frac{k}{5}=5$

$\therefore k=25$.

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 한 점 $P\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$와 점 $A(0,1)$을 지나는 직선의 기울기를 $f(t)$라 할 때, $\int_1^e f(t)dt$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$ ④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

$f(t)=\frac{\frac{\ln t}{t}-1}{t-0}=\frac{\ln t - t}{t^2}$

$\Rightarrow \int_1^e\left(\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$

$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{t^2}dt-\left[\ln t\right]_1^e$

*부분적분 $\int \ln t \times t^{-2}\,dt$ 적분

미분

$=\ln t \times \frac{1}{-1}t^{-1}$

$-\int \frac{1}{t}\times -\frac{1}{t}\,dt$

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 실수 $k\,(k \neq 0)$에 대하여 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\frac{f(x)+k}{e^{f(x)}}$$

가 $x=3$에서 극대이고 $g(3)=e$일 때, $g(k)$의 값은? [3점]

① $-2e^6$　② $-3e^5$　③ $-2e^5$　④ $-3e^4$　⑤ $-2e^4$

중심축 $x \neq 3$ —㊍

$$g'(x) = \frac{f'(x)\times e^{f(x)} - (f(x)+k)\times e^{f(x)}\cdot f'(x)}{e^{2f(x)}}$$

$$= \frac{f'(x)(1-f(x)-k)}{e^{f(x)}}$$

$$\Rightarrow g'(3) = \frac{f'(3)(1-f(3)-k)}{e^{f(3)}} = 0.$$

$f'(3)=\cancel{0}$ or $f(3)=1-k$

㊍조건.

$$\Rightarrow g(3) = \frac{1-k+k}{e^{1-k}} = e^{k-1} = e$$

$\hookrightarrow k=2.$

$\Rightarrow$ $f(-1)=f(3)=-1$

$f(x)+1 = (x+1)(x-3)$

$\therefore f(2) = 3\times(-1)-1 = -4$

$$g(2) = \frac{f(2)+2}{e^{f(2)}} = \frac{-4+2}{e^{-4}}$$

28. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(-x)}{x} & (x<0) \\ -x^2+2x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(0<t<2)$에 대하여 $f'(x)=t$를 만족시키는 음수 x의 값을 $g(t)$라 하고, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 값을 $h(t)$라 하자.

> $k \geq a$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$g(1)+h'(1)$의 값은? (단, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$) [4점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ 1

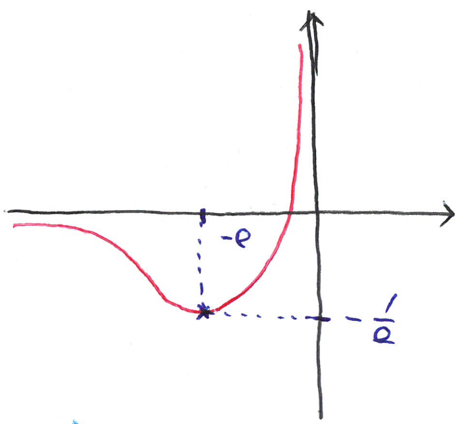
$$y = \frac{\ln(-x)}{x} \quad (x<0).$$

$$\lim_{x\to -0} y = \frac{\ln(+0)}{-0} = \frac{-\infty}{-0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} y = \frac{\ln\infty}{-\infty} = -0$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(-x)\times 1}{x^2} = 0$$

$1-\ln(-x)=0$　$x=-e$

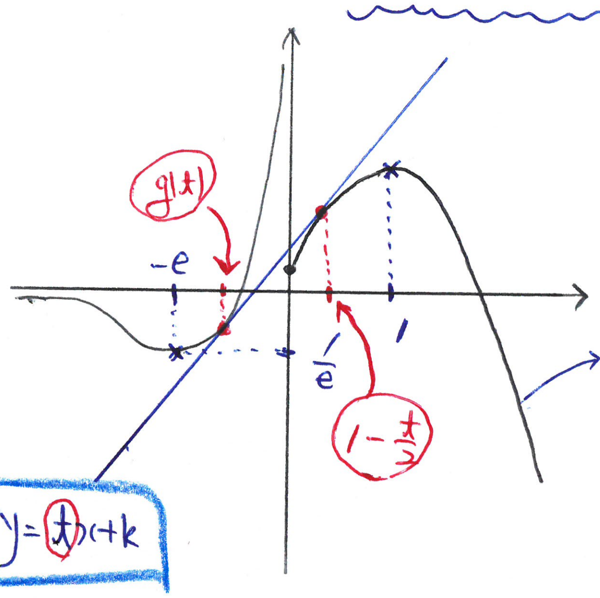


$\Rightarrow$ NEXT

✓ $0<t<2, \quad f'(x) = -2x+2 = t \rightarrow x = 1 - \frac{t}{2}$

$0 > -\frac{t}{2} > -1.$ ☆ $0 < 1 - \frac{t}{2} < 1$

☆ $\begin{cases} f'(g(t)) = t \\ f'\left(1-\frac{t}{2}\right) = t \end{cases}$



$y = -x^2+2x+a$

대칭축 $x = -\frac{2}{2\times(-1)} = 1.$

$y = tx + k$

→ 두점 $(g(t), f(g(t)))$, $\left(1-\frac{t}{2}, a+1-\frac{t^2}{4}\right)$을 지나는 직선

기울기 $= \dfrac{a+1-\frac{t^2}{4} - f(g(t))}{1-\frac{t}{2} - g(t)} = t$ ☆이식을 만족하는 a값 $= h(t)$

✓ $a = h(t) = f(g(t)) - t\,g(t) - \frac{t^2}{4} + t - 1$

✓ $h'(t) = \cancel{\underbrace{f'(g(t))}_{t} \cdot g'(t)} - g(t) - \cancel{t \cdot g'(t)} - \frac{t}{2} + 1$

$= -g(t) - \frac{t}{2} + 1$

$\Rightarrow \quad g(t) + h'(t) = -\frac{t}{2} + 1 \qquad \therefore g(1) + h'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

NEXT

단답형

29. 첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n+1|-a_n-1)=26$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

30. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}dt$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$h(g(x)+2)=2x^3+6f(1)x^2+1$$

을 만족시킨다. $\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=k\times\{f(1)\}^2$일 때, 실수 k의 값을 구하시오. [4점]

"A_n"
$=|a_n+1|-a_n-1$ $\begin{cases} a_n \ge -1 \text{ 이면, } 0 \\ a_n < -1 \text{ 이면, } -2a_n-2 \end{cases}$

ex) $a=2$, $r=-\frac{1}{2}$ 　 2 / -1 / $\frac{1}{2}$ / $-\frac{1}{4}$ / $\frac{1}{8}$ … 모두 -1 보다 크거나 같다.

$\{A_n\}$ 0 0 0 0 0

✓ $a=3$ 이면 　 3 / $-\frac{3}{2}$ / $\frac{3}{4}$ / $-\frac{3}{8}$ / $\frac{3}{16}$ …

$\{A_n\}$ 0 1 0 0 0

✓ $a=9$ 가 되면 　 9 / $-\frac{9}{2}$ / $\frac{9}{4}$ / $-\frac{9}{8}$ / $\frac{9}{16}$ …

$\{A_n\}$ 0 7 0 $\frac{1}{4}$ 0

✓ $a=33$ 이 되면 　 33 / $-\frac{33}{2}$ / $\frac{33}{4}$ / $-\frac{33}{8}$ / $\frac{33}{16}$ / $-\frac{33}{32}$ …

$\{A_n\}$ 0 31 0 $\frac{25}{4}$ 0 $\frac{1}{16}$

* 그런데, 합이 26보다 커진다.

⇒ 따라서

	a_1	a_2	a_3	a_4	…
	p	$-\frac{p}{2}$	$\frac{p}{4}$	$-\frac{p}{8}$	
$\{A_n\}$	0	$p-2$	0	$\frac{p}{4}-2$	

$\therefore p-2+\frac{p}{4}-2=26 \rightarrow p=24$

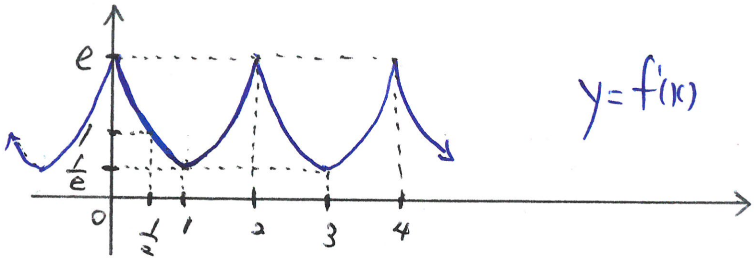
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1-(-\frac{1}{2})} = 16.$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$\vee\ f(0)=0,\ f'(x)=e^{\cos \pi x}$



★ 주기 2인 함수.

$$f'(x+2)=f'(x)$$

$$\boxed{f(x+2)=f(x)+c}$$

$(\because f(0)=0)\quad f(2)=f(0)+c$

$\therefore c=f(2)$

★ $f(1)=\int_0^1 e^{\cos\pi t}\,dt$

$f(2)=\int_0^2 e^{\cos\pi t}\,dt = 2\int_0^1 e^{\cos\pi t}\,dt$

$= 2f(1)$

$\Rightarrow\ h(g(x)+2) = 2x^3+6f(1)x^2+1$

★ $f(x)$의 역함수 $g(x)$

$g(x)=t \rightarrow f(t)=x.$

$g(x)=t$

$h(t+2) = 2(f(t))^3+6f(1)(f(t))^2+1$

$h'(t+2) = 6(f(t))^2 f'(t) + 12f(1)f(t)f'(t)$

$\Rightarrow\ \int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}\,dx$ ★ $x=t+2$ 치환

$$= \int_1^5 \frac{h'(t+2)}{f(t+2)}\,dt = \int_1^5 \frac{6f(t)\cdot f'(t)\cancel{(f(t)+2f(1))}}{\cancel{f(t)+f(2)}}\,dt$$

$$= \left[3(f(t))^2\right]_1^5 = 3\left((f(5))^2-(f(1))^2\right)$$

$$= 3\left(25(f(1))^2-(f(1))^2\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(5) &= f(3)+f(2) \\ f(3) &= f(1)+f(2) \\ \Rightarrow f(5) &= f(1)+2f(2) \\ &= 5f(1) \end{aligned}}$$

$\therefore\ \int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}\,dx = 72 \times (f(1))^2$