

제 2 교시

# 심화수학 영역

5지선다형

1. 두 벡터  $\vec{a} = (k, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2)$ 에 대하여  $\vec{a} + 3\vec{b} = (6, 9)$ 일 때,  $k$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{5}$       ②  $\frac{2}{5}$       ③  $\frac{3}{5}$       ④  $\frac{4}{5}$       ⑤ 1

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{\ln 5}{3}$       ②  $\frac{1}{\ln 5}$       ③  $\frac{2}{3}\ln 5$       ④  $\frac{2}{\ln 5}$       ⑤  $\ln 5$

4. 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때,  $|\vec{a} - \vec{b}|$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ②  $\sqrt{2}$       ③  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       ④  $2\sqrt{2}$       ⑤  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

5. 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{6} = 1$  위의 점  $(\sqrt{3}, -2)$ 에서의 접선의 기울기는? (단,  $a$ 는 양수이다.) [3점]

- ①  $\sqrt{3}$     ②  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     ③  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     ④  $\frac{\sqrt{3}}{4}$     ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

6. 좌표공간의 점  $A\left(3, -\frac{3}{2}, -2\right)$ 를  $yz$  평면에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

- ①  $\sqrt{21}$     ②  $\sqrt{22}$     ③  $\sqrt{23}$     ④  $2\sqrt{6}$     ⑤ 5

7. 자연수  $n(n \geq 2)$ 에 대하여 직선  $x = \frac{1}{n}$ 이 두 타원

$$C_1 : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad C_2 : 2x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

과 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P, Q라 하자.

타원  $C_1$  위의 점 P에서의 접선의  $x$ 절편을  $\alpha$ ,

타원  $C_2$  위의 점 Q에서의 접선의  $x$ 절편을  $\beta$ 라 할 때,

$6 \leq \alpha - \beta \leq 15$ 가 되도록 하는 모든  $n$ 의 개수는? [3점]

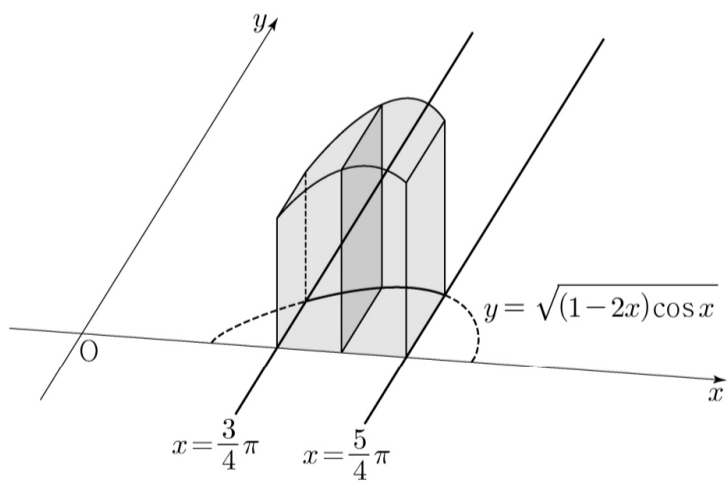
- ① 7    ② 9    ③ 11    ④ 13    ⑤ 15

8. 꼭짓점의 좌표가  $(1, 0)$ 이고, 준선이  $x = -1$ 인 포물선이 점  $(3, a)$ 를 지날 때, 양수  $a$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

9. 그림과 같이 곡선  $y = \sqrt{(1-2x)\cos x}$  ( $\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ )와

$x$ 축 및 두 직선  $x = \frac{3}{4}\pi$ ,  $x = \frac{5}{4}\pi$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ①  $\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$       ②  $\sqrt{2}\pi - 1$       ③  $2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$   
 ④  $2\sqrt{2}\pi - 1$       ⑤  $2\sqrt{2}\pi$

10. 매개변수  $t (t > 0)$ 으로 나타내어진 곡선

$$x = \ln(t^3 + 1), \quad y = \sin \pi t$$

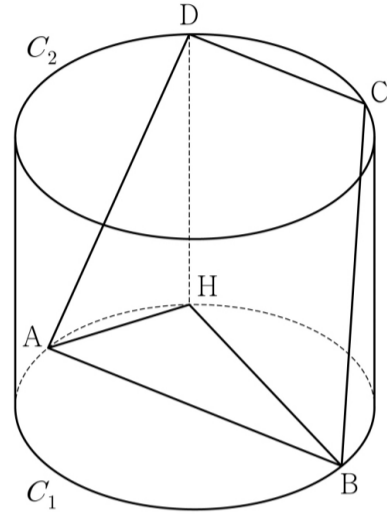
에서  $t = 1$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\frac{1}{3}\pi$       ②  $-\frac{2}{3}\pi$       ③  $-\pi$       ④  $-\frac{4}{3}\pi$       ⑤  $-\frac{5}{3}\pi$

11. 등비수열  $\{a_n\}$  에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = 3$  일 때,  
 $a_2$  의 값은? [3점]

- ① 16      ② 18      ③ 20      ④ 22      ⑤ 24

12. 그림과 같이 지름의 길이가 5인 두 원  $C_1, C_2$  를  
 두 밑면으로 하는 원기둥이 있고, 원  $C_1$  위의  $\overline{AB} = 5$  인  
 두 점 A, B와 원  $C_2$  위의  $\overline{CD} = 3$  인 두 점 C, D에 대하여  
 $\overline{AD} = \overline{BC}$  이다. 점 D에서 원  $C_1$  을 포함하는 평면에 내린  
 수선의 발을 H라 하자. 사각형 ABCD의 넓이가  
 삼각형 ABH의 넓이의 4배일 때, 이 원기둥의 높이는? [3점]



- ①  $3\sqrt{2}$     ②  $\sqrt{19}$     ③  $2\sqrt{5}$     ④  $\sqrt{21}$     ⑤  $\sqrt{22}$

13. 모든 항이 자연수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 4$$

이고 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}}$ 이 실수  $S$ 에 수렴할 때,  $S$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{6}$       ②  $\frac{1}{5}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{3}$       ⑤  $\frac{1}{2}$

14. 실수  $a(0 < a < 2)$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2|\sin 4x| & (x < 0) \\ -\sin ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x) = \left| \int_{-a\pi}^x f(t) dt \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,  $a$ 의 최솟값은? [4점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{3}{4}$       ③ 1      ④  $\frac{5}{4}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

15. 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $y=2nx$ 가 곡선  $y=x^2+n^2-1$ 과 만나는 두 점을 각각  $A_n, B_n$ 이라 하자. 원  $(x-2)^2+y^2=1$  위의 점  $P$ 에 대하여 삼각형  $A_nB_nP$ 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점  $P$ 를  $P_n$ 이라 할 때, 삼각형  $A_nB_nP_n$ 의 넓이를  $S_n$ 이라

하자.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

16. 그림과 같이  $\overline{A_1B_1}=2, \overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형  $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 선분  $A_1D_1$ 을 1:2로 내분하는 점을  $E_1$ 이라 하고 선분  $B_1C_1$ 을 지름으로 하는 반원의 호  $B_1C_1$ 이 두 선분  $B_1E_1, B_1D_1$ 과 만나는 점 중 점  $B_1$ 이 아닌 점을 각각  $F_1, G_1$ 이라 하자. 세 선분  $F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1$ 과 호  $F_1G_1$ 로 둘러싸인  $\curvearrowright$  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

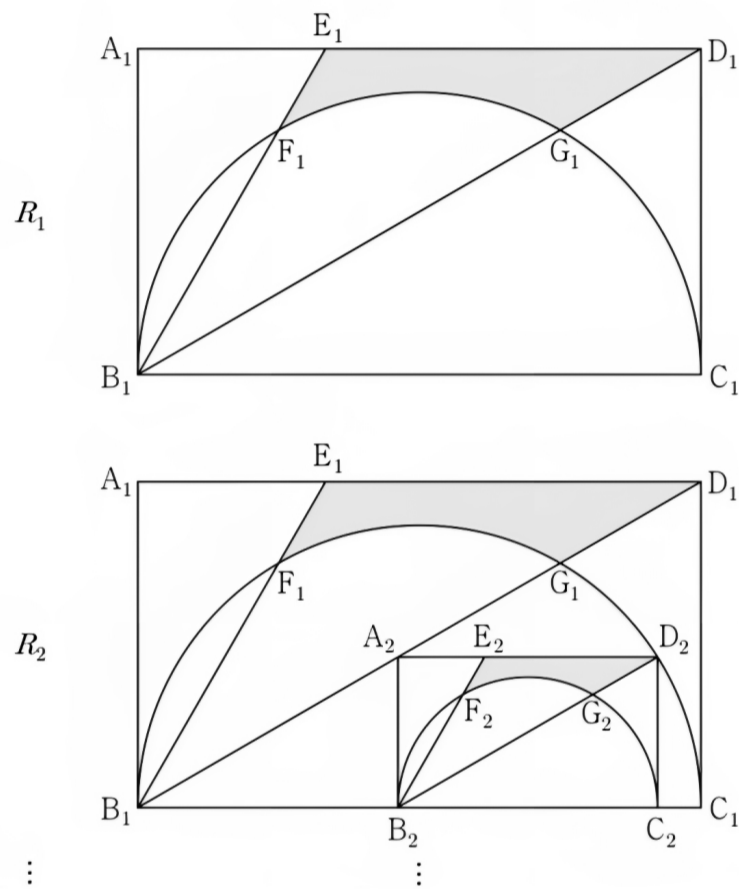
그림  $R_1$ 에 선분  $B_1G_1$  위의 점  $A_2$ , 호  $G_1C_1$  위의 점  $D_2$ 와 선분  $B_1C_1$  위의 두 점  $B_2, C_2$ 를 꼭짓점으로 하고

$\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : \sqrt{3}$ 인 직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 를 그린다.

직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 에 그림  $R_1$ 을 얻은 것과 같은 방법으로

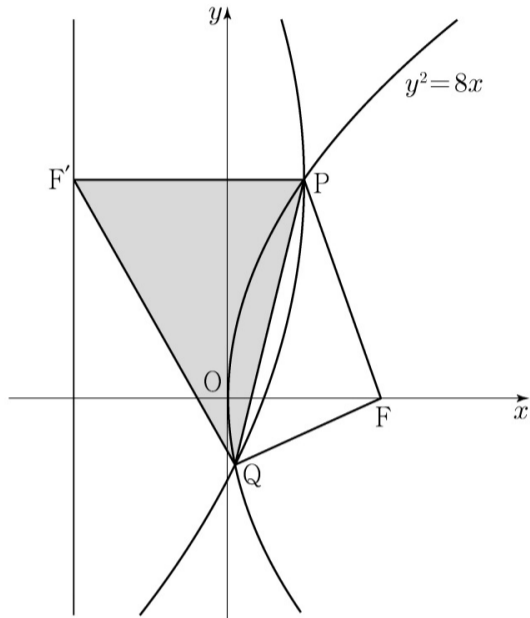
$\curvearrowright$  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$       ②  $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$   
 ③  $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$       ④  $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$   
 ⑤  $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

17. 초점이 F인 포물선  $y^2=8x$  위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선  $y^2=8x$ 의 준선과 만나는 점을 F'이라 하자. 점 F'을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선  $y^2=8x$ 와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF'QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF'Q의 넓이는  $\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

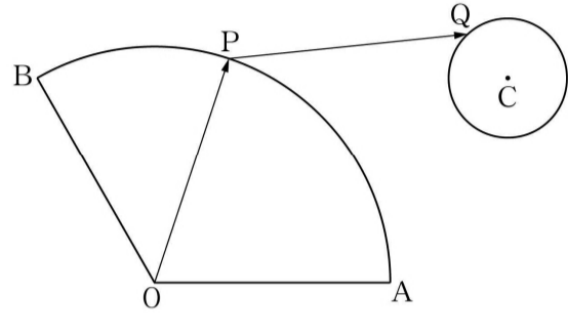


- ① 21
- ② 22
- ③ 23
- ④ 24
- ⑤ 25

18. 그림과 같이 한 평면 위에 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가  $120^\circ$ 인 부채꼴 OAB와 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 세 벡터  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 가

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 24, \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$$

을 만족시킨다. 호 AB 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여  $\vec{OP} \cdot \vec{PQ}$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때,  $M+m$ 의 값은? [4점]



- ①  $12\sqrt{3}-34$
- ②  $12\sqrt{3}-32$
- ③  $16\sqrt{3}-36$
- ④  $16\sqrt{3}-34$
- ⑤  $16\sqrt{3}-32$

19.  $7\pi$ 보다 작은 두 양수  $a, b$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \sin(a + b \cos x)$$

가 다음 조건을 만족시킬 때,  $a+b$ 의 값은? [4점]

(가) 방정식  $f'(x) = b$ 의 해가 존재한다.

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(f(a)\left(\pi + \frac{x}{4}\right)\right) = \frac{b}{a}$$

- ①  $5\pi$     ②  $\frac{25}{4}\pi$     ③  $\frac{15}{2}\pi$     ④  $\frac{35}{4}\pi$     ⑤  $10\pi$

20. 두 초점이  $F(5, 0), F'(-5, 0)$ 이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 쌍곡선 위의  $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 인 점  $P$ 에 대하여 점  $Q$ 가

$$(|\overline{FP}| + 1)\overline{F'Q} = 5\overline{QP}$$

를 만족시킨다. 점  $A(-9, -3)$ 에 대하여  $|\overline{AQ}|$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

- ① 10    ② 20    ③ 30    ④ 40    ⑤ 50

21. 양수  $k$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = (k - |x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수  $F(x)$ 에 대하여  $F(0)$ 의 최솟값을  $g(k)$ 라 하자.

모든 실수  $x$ 에 대하여  $F'(x) = f(x)$ 이고  $F(x) \geq f(x)$ 이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = pe + q$ 일 때,  $100(p+q)$ 의 값을 구하시오.

(단,  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ 이고,  $p$ 와  $q$ 는 유리수이다.) [4점]

- ① 10    ② 15    ③ 19    ④ 25    ⑤ 27

단답형

22. 두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n}$ 의 값은? [3점]

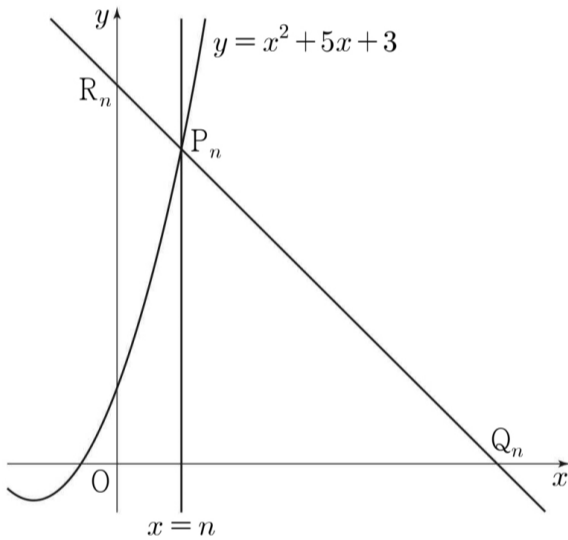
23. 좌표평면에서 점  $(1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원을  $C$ 라 하자. 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점  $(n^2, 2n)$ 에서의 접선이 원  $C$ 와 만나도록 하는 자연수  $n$ 의 개수는? [3점]

24. 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n^2 + 2n} - a_n) = \frac{1}{3}$  일 때, 수열  $\{a_n\}$ 의 공차는? [3점]

25. 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y = x^2 + 5x + 3$ 과 직선  $x = n$ 이 만나는 점을  $P_n$ 이라 하고, 점  $P_n$ 을 지나고 기울기가  $-1$ 인 직선이  $x$ 축과 만나는 점을  $Q_n$ ,  $y$ 축과 만나는 점을  $R_n$ 이라 하자.

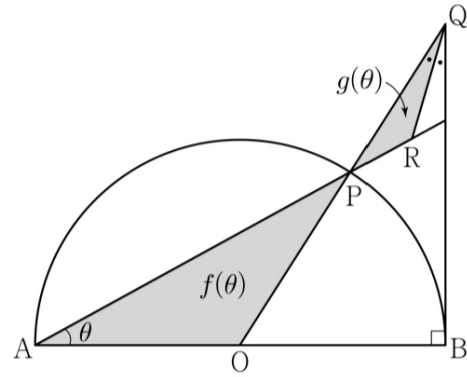
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{2}}{P_n Q_n - P_n R_n}$ 의 값을  $\frac{q}{p}$ 라고 할 때,  $p+q$ 의 값은? [3점]

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)



26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고,  $\angle OQB$ 의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자.  $\angle OAP = \theta$ 일 때, 삼각형 OAP의 넓이를  $f(\theta)$ , 삼각형 PQR의 넓이를  $g(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) [4점]



27. 두 초점이  $F(5, 0)$ ,  $F'(-5, 0)$ 이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 쌍곡선 위의  $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 인 점  $P$ 에 대하여 점  $Q$ 가

$$(|\overline{FP}|+1)\overline{F'Q} = 5\overline{QP}$$

를 만족시킨다. 점  $A(-9, -3)$ 에 대하여  $|\overline{AQ}|$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

28. 함수  $f(x) = 6\pi(x-1)^2$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x)$$

라 하자.  $0 < x < 2$ 에서 함수  $g(x)$ 가 극소가 되는  $x$ 의 개수는?  
[4점]

29. 양수  $c$ 에 대하여 두 점  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$ 을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점  $P$ ,  $Q$ 가 존재하도록 하는 모든  $c$ 의 값의 합을 구하시오. [4점]

- (가) 점  $P$ 는 제1사분면 위에 있고, 점  $Q$ 는 직선  $PF'$  위에 있다.
- (나) 삼각형  $PF'F$ 는 이등변삼각형이다.
- (다) 삼각형  $PQF$ 의 둘레의 길이는 28이다.

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $f(1) = 1$ ,  $\int_1^2 f(x) dx = \frac{5}{4}$
- (나) 함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $x \geq 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(2x) = 2f(x)$ 이다.

$\int_1^8 xf'(x) dx = \frac{q}{p}$  일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]