제 2 교시

수학 영역 KSM

홀수형

5지선다형

1. $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

2. 함수 $f(x)=3x^3+4x+1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$f'(x) = 9x^2+4$

$f'(1) = 13$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=0$일 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2\sum_{k=1}^{4}a_k - \sum_{k=1}^{4}k = 0$

$2\sum_{k=1}^{4}a_k - 10 = 0$

$\therefore \sum_{k=1}^{4}a_k = 5$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & (x<1) \\ x^2-3x+a & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3-2 = 1-3+a$

$a = 3$

5. 함수 $f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 2x^2-x-2+(x+2)(4x-1)$
$f'(1) = 2-1-2+9 = 8$

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_a b=3, \quad \log_3 \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\log_9 ab$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$\log_3 a = A$
$\log_3 b = B$

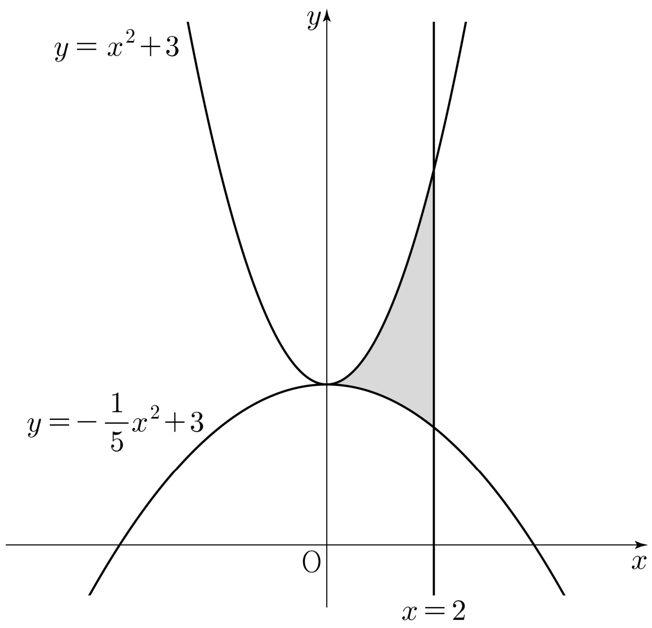
$\frac{B}{A}=3$, $B-A=\frac{1}{2}$

$B=3A \nearrow A=\frac{1}{4}, B=\frac{3}{4}$

$\log_9 ab = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}$

7. 두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{33}{10}$ ⑤ $\frac{16}{5}$



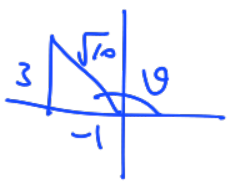
$\int_0^2 \frac{6}{5}x^2\,dx = \frac{2}{5}x^3\Big|_0^2 = \frac{16}{5}$

8. $\sin\theta+3\cos\theta=0$이고 $\cos(\pi-\theta)>0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\frac{s}{c}+3=0$ $-\cos(\theta)>0$

$\tan\theta=-3$ $\cos\theta<0$ 2사분면



$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

9. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

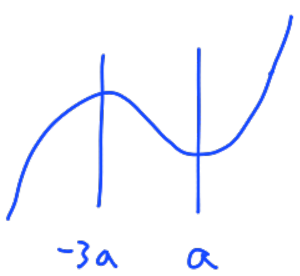
$$f(x)=x^3+3ax^2-9a^2x+4$$

라 하자. 직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x)=3x^2+6ax-9a^2$

$=3(x+3a)(x-a)$



$f(-3a)=27a^3+4=5,\ a=\frac{1}{3}$

$f(a)=4-5a^3=5,\ a<0$ (x)

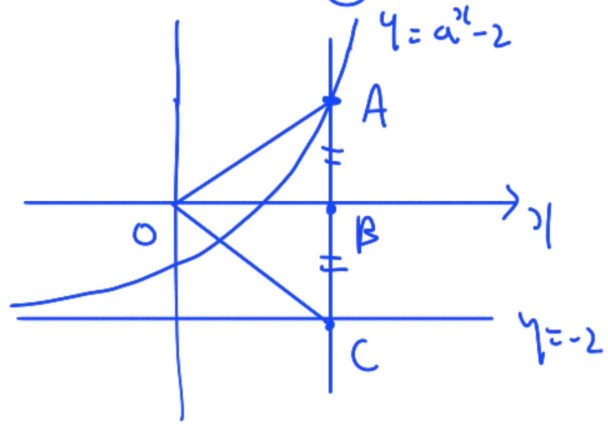
$\therefore a=\frac{1}{3}$

$f(2)=8+4-2+4$

$=14$

10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 B, 곡선 $y=a^x-2$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 삼각형 AOC의 넓이가 8일 때, $a\times\overline{OB}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $2^{\frac{13}{6}}$ ② $2^{\frac{7}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$ ④ $2^{\frac{8}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{17}{6}}$



$\overline{AC}=4,\ \triangle AOC=8$ $\therefore \overline{OB}=4$

$A(4,2)$

$a^4-2=2,\ a=\sqrt{2}$

$\therefore a\times\overline{OB}=4\sqrt{2}=2^{\frac{5}{2}}$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-kt+4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{13}{3}$이다.

ㄴ. $k=3$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

ㄷ. $k=5$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{k}{2}t^2+4t$

ㄱ. $x(t)=\frac{1}{3}t^3+4t$

$x(1)=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$

ㄴ. $v(t)=t^2-3t+4>0$

운동방향 변화 X

ㄷ. $v(t)=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$

$x(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t$

$x(0)=0$

$x(1)=\frac{11}{6}$　　$\therefore \int_0^2 |v(t)|dt = \frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$

$x(2)=\frac{2}{3}$

12. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2(a_1+a_4+a_7)=a_4+a_7+a_{10}=6$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{22}{7}$　② $\frac{24}{7}$　③ $\frac{26}{7}$　④ $\frac{30}{7}$　⑤ $\frac{32}{7}$

$2=\frac{a_4+a_7+a_{10}}{a_1+a_4+a_7}=r^3$

$a_1+a_4+a_7=a+2a+4a=7a$

$\therefore 2\times 7a=6,\ a=\frac{3}{7}$

$a_{10}=ar^9=\frac{3}{7}\times 8=\frac{24}{7}$

13. 함수 $f(x) = x^2 - 4x - 3$에 대하여
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1,\ -6)$에서의 접선을 l이라 하고,
함수 $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$에 대하여
곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선을 m이라 하자.
두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

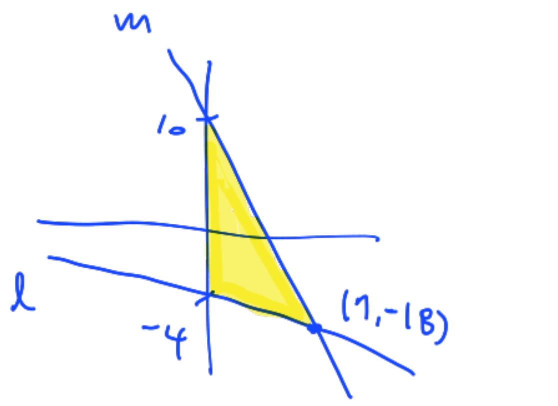
① 21 ② 28 ③ 35 ④ 42 ⑤ 49

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(1) = -2$, $l : y = -2x - 4$

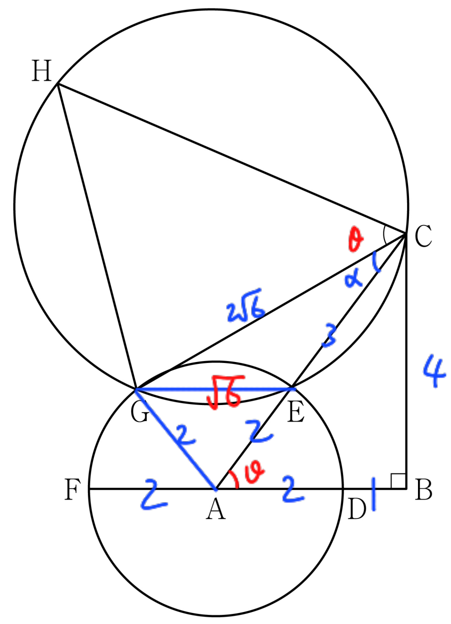
$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$

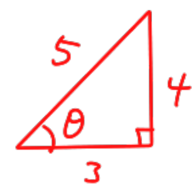
$g'(1) = f(1) - f'(1) = -4$, $m : y = -4x + 10$



$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 14 = 49$

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 3$, $\overline{\mathrm{BC}} = 4$이고 $\angle \mathrm{B} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{\mathrm{CG}} = 2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle \mathrm{HCG} = \angle \mathrm{BAC}$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는? [4점]





$\sin\theta = \frac{4}{5}$

① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{38\sqrt{10}}{25}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$ ④ $\frac{32\sqrt{15}}{25}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

$\triangle CGA$, $\cos\alpha = \frac{25+24-4}{2\cdot 5\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{9}{4\sqrt{6}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{6}}$

$\overline{GE}^2 = 9 + 24 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{9}{4\sqrt{6}}$

$= 33 - 27 = 6$, $\overline{GE} = \sqrt{6}$

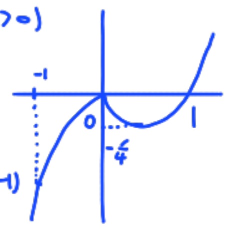
$\frac{\overline{GE}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{GH}}{\sin\theta}$ $\therefore \overline{GH} = \sqrt{6} \times \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{15}} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{96}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{15} = \frac{32}{25}\sqrt{15}$

15. 함수 $f(x)$가

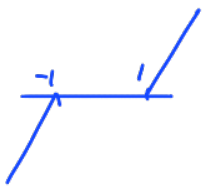
$f' = \begin{cases} -2x & (x<0) \\ 2x-1 & (x>0) \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x \ge 0) \end{cases}$$



이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1 \le x < 1) \\ ax-a & (x \ge 1) \end{cases}$$



이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x \left(g(t)-f(t)\right)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자. $a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은? [4점]

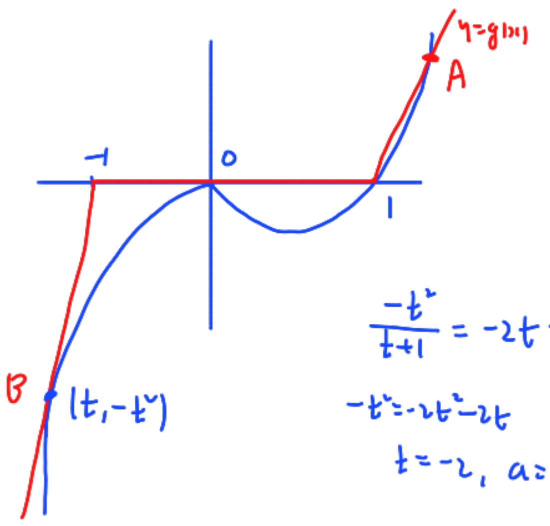
① $\frac{9}{2}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$　④ $\frac{15}{2}$　⑤ $\frac{17}{2}$

$h'(x) = g(x) - f(x) = 0$, $g(x) = f(x)$

$f'(1) = 1$

$a \le 1 \to h(x)$ 극값 X

$\therefore a > 1$



$\frac{-t^2}{t+1} = -2t = a$

$-t^2 = -2t^2 - 2t$

$t=-2$, $a=4$　$\therefore 1<a\le 4$

$k=4$

$4x-4 = x^2-x$, $x=1, 4$　$\therefore A(4,12)$

$h(3) = \int_0^3 (g(t)-f(t))dt$

$= \int_0^1 (g(t)-f(t))dt + \int_1^3 -(t-1)(t-4)dt$

$= \frac{1}{6}(1-0)^3 - \int_0^2 t(t-3)dt$　t^2-3t

$= \frac{1}{6} - \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right]_0^2$

$= \frac{1}{6} - \frac{8}{3} + 6 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$\therefore k+h(3) = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=n^2 a_n + 1$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{9}$

$a_2 = a_1 + 1 = 2$

$a_3 = 4a_2 + 1 = 9$

17. 함수 $f(x)=4x^3-2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=4$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{16}$

$F(x) = x^4 - x^2 + 4$

$F(2) = 16 - 4 + 4 = 16$

18. $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$이고 $\cos(\angle\mathrm{BAC})=-\frac{3}{5}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

$\sin(\angle BAC) = \frac{4}{5}$ $\boxed{12}$

$\therefore S = \frac{1}{2}\times 5\times 6\times\frac{4}{5} = 12$

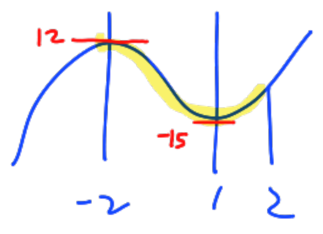
19. $-2\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-k\le \underbrace{2x^3+3x^2-12x-8}_{f(x)}\le k$$

가 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

$\boxed{15}$

$f'(x) = 6x^2+6x-12$
$= 6(x+2)(x-1)$



$f(-2) = 12$

$f(1) = -15$

$\begin{cases} k\ge 12 \\ -k\le -15 \end{cases}$

$\therefore k\ge 15$

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1=7$
- 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10 = \frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}(n(n-1)+60)$$

이다.

다음은 $\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{(가)}\ \frac{1}{3}n$$

$\frac{1}{6}(n(n+1)-n(n-1)) = \frac{1}{6}\cdot 2n = \frac{1}{3}n$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{(가)}\ \frac{1}{3}n \quad\cdots\cdots ㉠$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\ (n\ge 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_2=\boxed{(나)}\ 10 \quad\cdots\cdots ㉡$$

$a_1+a_2 = \frac{2}{3}a_2+\frac{1}{6}\times 62$, $\frac{1}{3}a_2 = -7+\frac{31}{3} = \frac{10}{3}$

$a_2 = 10$

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$

$$=\boxed{(다)}\ 52$$

$2a_n+a_{n+1}=n$

이다.

$2a_{2k+1}+a_{2k+2}=2k+1 \Rightarrow 7+10+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)$

$= 17+(6^2-1) = 52$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{p\times q}{f(12)}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{130}$

$\frac{10\times 52}{4} = 130$

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<t)\\ f(x) & (x\ge t)\end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

$\boxed{65}$

$\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=0$
$\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)=0$
$g(x)$ 연속 $\Rightarrow f(0)=0$

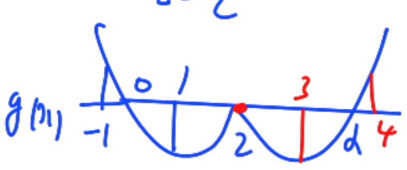
$g(-1)>0$
$g(1)<0$

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{\ominus}{\ominus}=\oplus$
$\therefore m\ge2$
$g(m^+)<0$인 m이 2개

$f(x)$  $\Rightarrow$ $x>2$에서 $g(x)>0$ (×)

$\therefore f(x)$  $f(x)=px(x-2)(x-\alpha)$

$t=2$

$g(x)$ 

$t=\alpha$

$g(x)$ 

$x>2$에서 $g(x)>0$ (×)

$m=2,3,\ \alpha\ge4$
$f(x)=px(x-2)(x-\alpha)$
$g(-1)=-f(-1)=3p(\alpha+1)=3\ /\ 2$
$-\frac{7}{2}g(1)=\frac{7}{2}f(1)=\frac{7}{2}p(\alpha-1)=2\ /\ 3$

$\Downarrow$ $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{7}{4}$, $4\alpha+4=7\alpha-7$, $\alpha=\frac{11}{3}$ (○)

$\Downarrow$ $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{7}{9}$, $7\alpha-7=9\alpha+9$, $\alpha=-8$ (×)

$p=\frac{1}{\alpha+1}=\frac{3}{14}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{14}x(x-2)\left(x-\frac{11}{3}\right)$
$g(-5)=-f(-5)=-\frac{3}{14}(-5)(-7)\left(-\frac{26}{3}\right)=5\times13=65$

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$A'(b,a)$

$\boxed{457}$

$A(a,b)\Rightarrow b=\log_{16}(8a+2)\Rightarrow 8a+2=16^b$
$B(p,q)\Rightarrow 4^{p-1}-\frac{1}{2}=q\Rightarrow 4^p-2=4q$
$A'(b,a)$, O, A', B 일직선 위 $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{q}{p}$, $p=bk$, $q=ak$

$4^{bk}-2=4ak$

$\begin{cases}4ak+2=4^{bk}\\ 8a+2=16^b\end{cases}$ $k=2$, $p=2b,\ q=2a$

AB의 중점 $\left(\frac{a+2b}{2},\frac{b+2a}{2}\right)=\left(\frac{77}{8},\frac{133}{8}\right)$

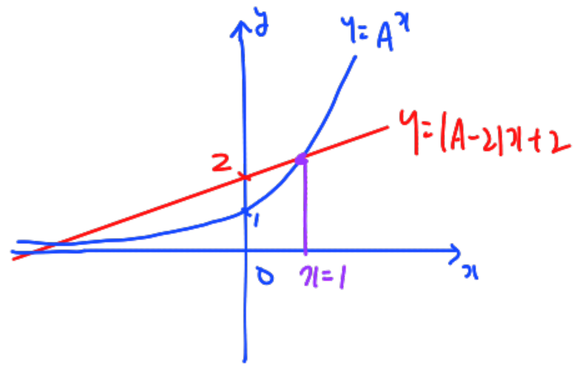
$\begin{cases}a+2b=\frac{77}{4}\\ 2a+b=\frac{133}{4}\end{cases}$ $a+b=\frac{70}{4}$, $\therefore a=\frac{63}{4}$, $b=\frac{7}{4}$, $a\times b=\frac{441}{16}$

$\begin{cases}16^b=8a+2\\ (16^b)^{\frac{k}{2}}=8a\cdot\frac{k}{4}+2\end{cases}$ $\Rightarrow k=2$

$16^b=A$, $8a=A-2$

$a>0$, $8a+2>2$, $16^b>2$, $b>\frac{1}{4}$, $A>2$

$A^x=(A-2)x+2$의 양근은 $x=1$뿐



$\therefore \frac{k}{2}=1$, $k=2$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

$4^3 = 64$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A \cup B) = 1$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{17}{20}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$, $P(A\cap B) = \frac{1}{4}P(A) = \frac{1}{10}$

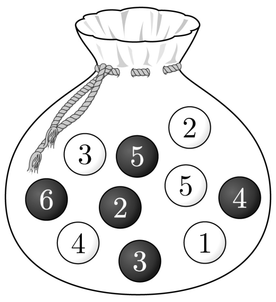
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{10}$

$\therefore P(B) = \frac{7}{10}$

25. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$



1
2 – 2
3 – 3
4 – 4
5 – 5
6

$\frac{{}_5C_2 + {}_5C_2 + 4}{{}_{10}C_2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

26. 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $1.2 \le m \le a$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.1 ② 5.2 ③ 5.3 ④ 5.4 ⑤ 5.5

$a - 1.2 = 2 \times 2.58 \times \frac{5}{6}$

$a = 4.3 + 1.2 = 5.5$

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{|2x-1|}{12} & (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ a & (x=4)\end{cases}$$

일 때, $\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{a}X\right)$의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

X	0	1	2	3	4	
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	a	1

$a=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$E(X)=\frac{1+6+15+8}{12}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$

$V(X)=\frac{1+12+45+32}{12}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{15}{2}-\frac{25}{4}=\frac{5}{4}$

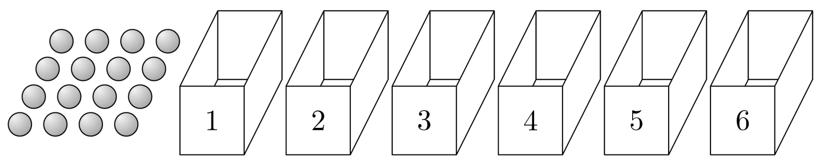
$\therefore V\left(\frac{1}{a}X\right)=36V(X)=45$

28. 16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 홀수이면
> 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
> k가 짝수이면
> k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$



k
1,3,5 → 1,3,5 홀
2 → 1,2 짝
4 → 1,2,4 홀
6 → 1,2,3,6 짝
홀 ⇒ $\frac{2}{3}$
짝 ⇒ $\frac{1}{3}$

개수합	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1
		2		2		2
	3		3		3	3
				4		
	5		5		5	
						6

4번 시행
모든 공의 개수합이 홀수 ⇒ 짝 3 홀 1 ⇒ $_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$
짝 1 홀 3 ⇒ $_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$] $\frac{40}{81}$

3이 나옴 ⇒ 1,3,5 $\frac{1}{2}$
2가 나옴 ⇒ 2,4 $\frac{1}{3}$
2,3이 나옴 ⇒ 6 $\frac{1}{6}$

4번 시행

3의 개수	2의 개수
4	3
3	2
2	1 (X)
1	0 (X)

6	135	2	4
3	1	0	0
1	2	0	1

$_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{108}$

$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$

$\frac{1}{108}+\frac{1}{12}=\frac{5}{54}$

$\therefore \frac{5}{54}\times\frac{81}{40}=\frac{3}{16}$

단답형

29. 6 이하의 자연수 a에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같으면
> 동전을 5번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고,
> 나온 눈의 수가 a보다 크면
> 동전을 3번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다.

이 시행을 19200번 반복하여 기록한 수가 3인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X) = 4800$일 때, $\mathrm{P}(X \leq 4800 + 30a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k이다. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

$\boxed{977}$

$X \sim B(19200, p)$, $E(X) = 19200p = 4800$

$p = \frac{1}{4}$

a보다 작거나 같은 확률 ⇒ $\frac{a}{6}$

a보다 큰 확률 ⇒ $\frac{6-a}{6}$

$\frac{a}{6} \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6-a}{6} \cdot {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{a}{6} \times \frac{10}{32} + \frac{6-a}{6} \times \frac{1}{8}$

$= \frac{5a+12-2a}{6 \times 16} = p = \frac{1}{4}$

$\therefore 3(a+4) = 24$, $a = 4$

$X \sim B\left(19200, \frac{1}{4}\right)$, $X \sim N(4800, 60^2)$

$P(X \leq 4920) = P\left(Z \leq \frac{4920-4800}{60}\right) = P(Z \leq 2)$

$= 0.977 = k$

$\therefore 1000k = 977$

30. 비어 있는 주머니 10개가 일렬로 놓여 있고, 공 8개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

$\boxed{262}$

> (가) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.
> (나) 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

i) 1 1 1 1 2 2 0 0 0 0

0 0 0 0

2 2개 ⇒ ${}_5C_2 = 10$

2가 들어간 구역은 1이 X, 1은 남은 3개 구역에 위치

⇒ ${}_3H_4 = 15$

$10 \times 15 = 150$

ii) 1 1 1 1 1 1 2 0 0 0

0 0 0

${}_4C_1 \times {}_3H_6 = 4 \times 28 = 112$

$\therefore 150 + 112 = 262$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{2x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\sqrt{s(1-s^2)} = \sqrt{s \cdot c^2} = c\sqrt{s}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$ $\quad \sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$

$\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9n^2-5}+2n < a_n < 5n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$ 의 값은? [3점]

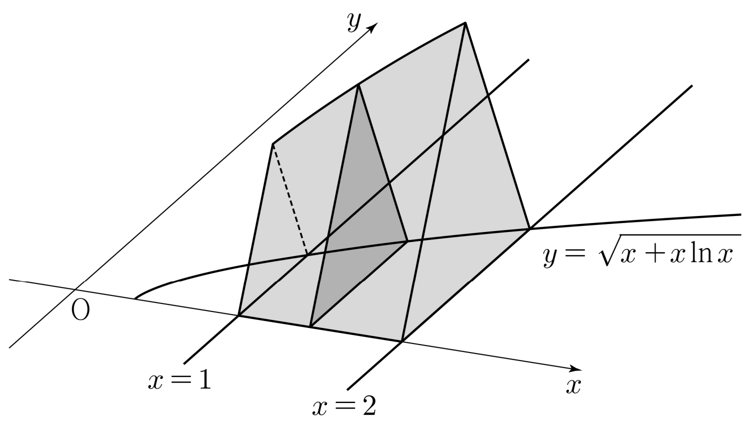
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$\frac{a_n}{n} \to 5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}$

$= \frac{25}{5+5} = \frac{5}{2}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+x\ln x}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$ ② $\frac{\sqrt{3}(5+12\ln 2)}{24}$ ③ $\frac{\sqrt{3}(1+12\ln 2)}{16}$ ④ $\frac{\sqrt{3}(1+2\ln 2)}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}(1+9\ln 2)}{12}$

$\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(x+x\ln x)\,dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + \int_1^2 x\ln x\,dx\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{2} + \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\ln 2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}(8\ln 2+3)}{16}$

$\frac{1}{2}x^2$

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^{4t}(1+\sin^2\pi t),\quad y=e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)$$

를 C라 하자. 곡선 C가 직선 $y=3x-5e$와 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\dfrac{3\pi-4}{\pi+4}$ ② $\dfrac{3\pi-2}{\pi+6}$ ③ $\dfrac{3\pi}{\pi+8}$ ④ $\dfrac{3\pi+2}{\pi+10}$ ⑤ $\dfrac{3\pi+4}{\pi+12}$

$y=3x-5e$

$e^{4t}(1-3c^2)=3e^{4t}(1+s^2)-5e$

$e^{4t}(3+3s^2+3c^2-1)=5e$

$e^{4t}\times 5=5e \quad \therefore t=\frac{1}{4}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4e^{4t}(1-3c^2)+e^{4t}(-3\cdot 2c\cdot(-s\pi))}{4e^{4t}(1+s^2)+e^{4t}(2sc\pi)}$

$=\dfrac{4-12c^2+6sc\pi}{4+4s^2+2sc\pi}=\dfrac{2-6c^2+3sc\pi}{2+2s^2+sc\pi}$

$t=\frac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{2-3+\frac{3}{2}\pi}{2+1+\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3\pi-2}{\pi+6}$

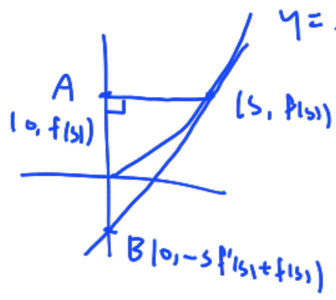
28. 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))\,(s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $\dfrac{161}{12}+\ln 3$ ② $\dfrac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\dfrac{53}{4}+\ln 2$ ④ $\dfrac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\dfrac{157}{12}+\ln 2$

$f'(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}>0$



$y=f'(s)(x-s)+f(s)$

$B(0,-sf'(s)+f(s))$

$t=\overline{AB}=|sf'(s)|=sf'(s),\ s=g(t)$

$t=\dfrac{s^3}{s+1}$ $\quad t=\frac{1}{2}\to s=1=g(\frac{1}{2})$

$s=g(t)$ $\quad t=\frac{27}{4}\to s=3=g(\frac{27}{4})$

$ds=g'(t)dt$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)dt=\Big[t\,g(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} t\,g'(t)dt$ $\quad t=\dfrac{s^3}{s+1}$, $g'(t)dt=ds$

$\displaystyle=\frac{27}{4}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1-\int_1^3\frac{s^3}{s+1}ds$ $\quad \dfrac{(s+1)^3-3s^2-3s-1}{s+1}=\dfrac{(s+1)^3-3s(s+1)-1}{s+1}$

$\displaystyle=\frac{79}{4}-\int_1^3\left((s+1)^2-3s-\frac{1}{s+1}\right)ds$

$=\dfrac{79}{4}-\left[\frac{1}{3}(s+1)^3-\frac{3}{2}s^2-\ln|s+1|\right]_1^3$

$=\dfrac{79}{4}-\left(\left(\frac{64}{3}-\frac{27}{2}-\ln 4\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}-\ln 2\right)\right)$

$=\dfrac{79}{4}-\dfrac{56}{3}+12+\ln 2$

$=\dfrac{237-80}{12}+\ln 2=\dfrac{157}{12}+\ln 2$

단답형

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 자연수 k에 대하여
>
> $b_{k+i} = \dfrac{1}{a_i} - 1 \ (i=1,\ 2,\ 3)$
>
> 이다.

$b_{k+1} = \frac{1}{a_1} - 1$
$b_{k+2} = \frac{1}{a_2} - 1$
$b_{k+3} = \frac{1}{a_3} - 1$

부등식

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right) < 30$$

이 성립할 때, $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $a_1 \neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{97}$

$a_n = dn$ $\quad \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d^2}$

$b_n = br^{n-1}$

$|r|<1$ $\quad \therefore 0 < \frac{b}{1-r} - \frac{1}{d^2} < 30$

$(b_{k+2})^2 = (b_{k+1})(b_{k+3}) \Rightarrow \left(\frac{1}{2d}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{d}-1\right)\left(\frac{1}{3d}-1\right)$

$1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{4d^2} = 1 - \frac{4}{3d} + \frac{1}{3d^2}$

$\frac{1}{12d^2} - \frac{1}{3d} = 0$, $1-4d=0$, $d=\frac{1}{4}$

$b_k = 3, b_{k+1} = 1, b_{k+2} = \frac{1}{3}$ $\quad \therefore r = \frac{1}{3}$

$\therefore 0 < \frac{3}{2}b - 16 < 30$

$16 < \frac{3}{2}b < 46$, $\frac{32}{3} < b < \frac{92}{3}$

$10.xx < b < 30.xx$

$b_{k+1}=1$
$b_k = 3$
$b_{k-1} = 9$
$b_{k-2} = 27$
$b_{k-3} = 81$

$\therefore b = 27,\ k = 3$

$a_n = \frac{1}{4}n$, $b_n = 27\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \times \frac{81}{8} = \frac{81}{16}$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x) \geq 0$ / $f^{-1}(x)$: 증가

> (가) $|x| \leq 1$일 때, $4 \times \left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이다.
>
> (나) $|x| > 1$일 때, $\left|f^{-1}(x)\right| = e^{|x|-1} + 1$이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자.
함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b\ (a<b)$에서 불연속일 때,

$g(a) \times \left(\lim\limits_{m \to a+} g(m)\right) + g(b) \times \left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$) [4점] $\boxed{11}$

$|x| \leq 1$ $\quad 2f^{-1}(x) = \pm x(x^2-5)$, $f^{-1}(x)$ 증가 $\therefore f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x(x^2-5)$

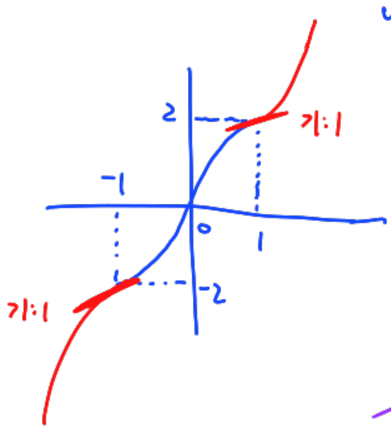
$x>1$ $\quad |f^{-1}(x)| = e^{x-1}+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{x-1}+1$

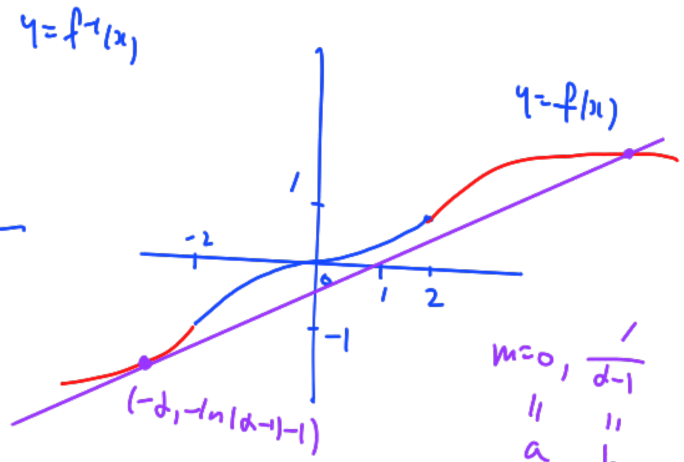
$x<-1$ $\quad |f^{-1}(x)| = e^{-x-1}+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -e^{-x-1}-1$

$(f^{-1})'(1) = 1 \rightarrow f'(1) = 1$

$(f^{-1})'(-1) = 1 \rightarrow f'(-1) = 1$

$y = f^{-1}(x)$





$m=0$, $\frac{1}{d-1}$
$\quad \| \quad\ \|$
$\quad a \quad\ b$

$x<-1$

$f^{-1}(x) = -e^{-x-1}-1$

$x = -e^{-y-1}-1$

$-y-1 = \ln(-x-1)$

$y = -\ln(-x-1)-1$

$x<-2$ $\quad f(x) = -\ln(-x-1)-1$

$f'(x) = \frac{1}{-x-1}$

$\frac{\ln(d-1)+1}{1+d} = \frac{1}{d-1}$, $\ln(d-1)+1 = \frac{d+1}{d-1} = \frac{2}{d-1}+1$

$\therefore \ln(d-1) = \frac{2}{d-1}$

$g(a) = g(0) = 1$

$\lim\limits_{m \to a+} g(m) = \lim\limits_{m \to 0+} g(m) = 3$

$g(b) = 2$

$\left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = \left(-\ln(d-1) \times (d-1)\right)^2 = 4$

$\Rightarrow 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ -1)$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 포물선 $y^2=12(x-2)$의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$p=3$

$2\times3=6$

25. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}\left(3,\ -\frac{3}{2},\ -2\right)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$B\left(-3, -\frac{3}{2}, -2\right)$

$C\left(-3, \frac{3}{2}, 2\right)$

$\overline{BC} = \sqrt{9+16} = 5$

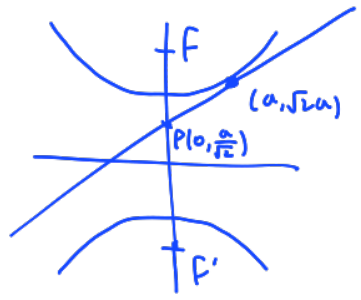
26. 양수 a에 대하여 두 초점이 F, F$'$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ 위의 점 $(a,\ \sqrt{2}a)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=8$일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{ax}{a^2} - \frac{\sqrt{2}ay}{a^2} = -1$

$x - \sqrt{2}y + a = 0$ $P\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$a^2+a^2=2a^2=c^2$ $\therefore c=\sqrt{2}a$



$F(0, \sqrt{2}a)$

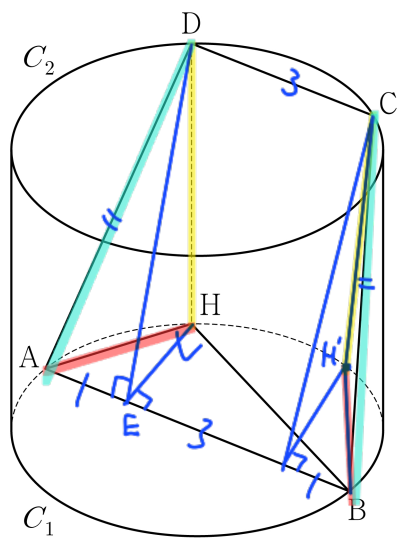
$F'(0, -\sqrt{2}a)$

$\overline{PF} \times \overline{PF'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

$= \frac{3}{2}a^2 = 8$

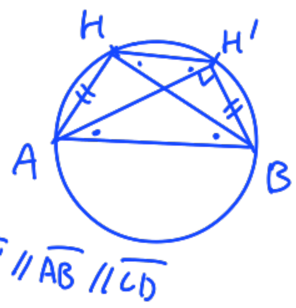
$\therefore a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

27. 그림과 같이 지름의 길이가 5인 두 원 C_1, C_2를 두 밑면으로 하는 원기둥이 있고, 원 C_1 위의 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B와 원 C_2 위의 $\overline{CD}=3$인 두 점 C, D에 대하여 $\overline{AD}=\overline{BC}$이다. 점 D에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 ABH의 넓이의 4배일 때, 이 원기둥의 높이는? [3점]



① $3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{21}$ ⑤ $\sqrt{22}$

$\overline{DH}=\overline{CH'}$, $\overline{DA}=\overline{CB}$ ⇒ $\overline{HA}=\overline{H'B}$



$\overline{HH'}\,//\,\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$

□ABCD: 등변사다리꼴

□ABCD = 4×□ABH

$\frac{1}{2}\times(3+5)\times\overline{DE} = 4\times\frac{1}{2}\times5\times\overline{EH}$

$2\overline{DE}=5\overline{EH}$, $\overline{DE}:\overline{EH}=5:2$

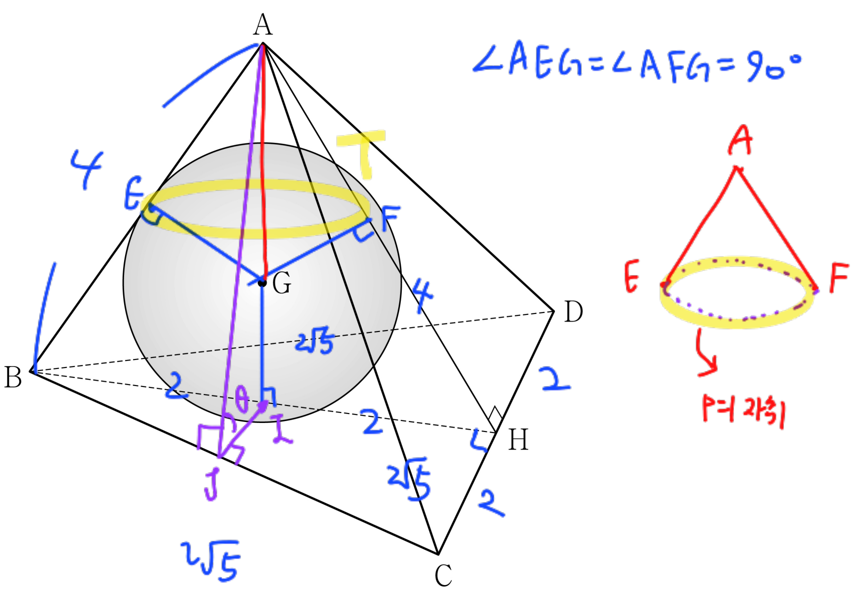
△AHB ⇒ $\overline{EH}^2=\overline{AE}\times\overline{EB}=4$,

∴ $\overline{EH}=2$

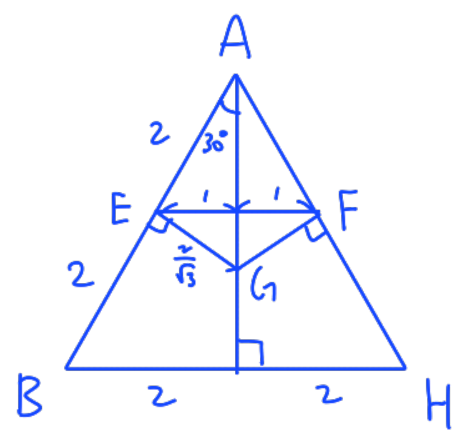
$\overline{DE}=5$

$\overline{DH}=\sqrt{21}$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{BC}=\overline{BD}=2\sqrt{5}$인 사면체 ABCD가 있고, 점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발 H에 대하여 두 평면 ABH와 BCD는 서로 수직이고 $\overline{AH}=4$이다. 삼각형 ABH의 무게중심을 G라 하고, 점 G를 중심으로 하고 평면 ACD에 접하는 구를 S라 하자. $\angle APG=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 T라 할 때, 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{\pi}{7}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{5}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

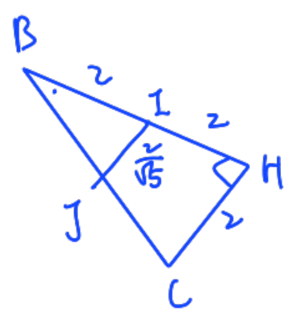


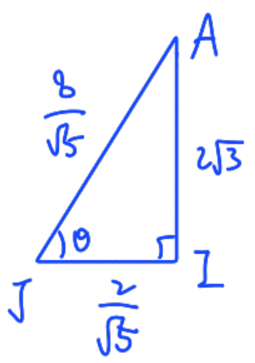
도형 T: E, F를 지름의 양끝으로 하는 원

T의 넓이: π

T와 △BCD는 평행

∴ T와 ABC가 이루는 각의 크기 = BCD와 ABC가 이루는 각의 크기 = θ





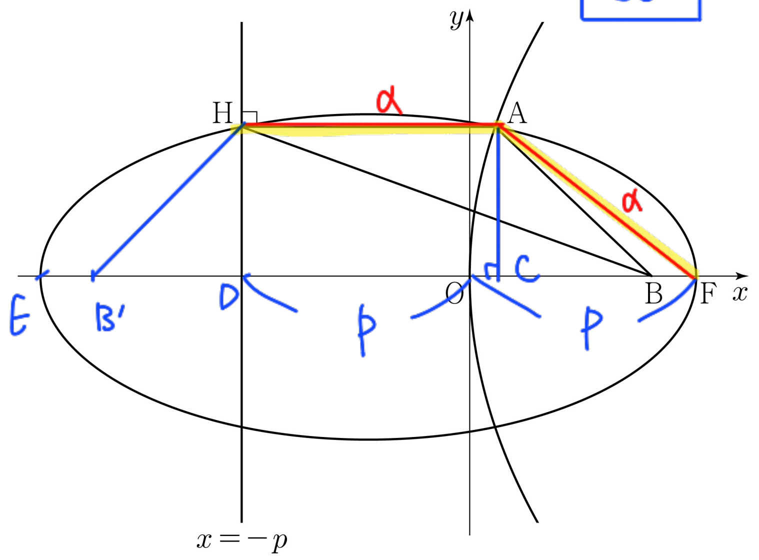
$\cos\theta=\frac{1}{4}$

∴ $\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$

단답형

29. 그림과 같이 초점이 F$(p,\ 0)\ (p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 초점이 x축 위에 있고 세 점 F, A, H를 지나는 타원의 x좌표가 양수인 초점을 B라 하자. 삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$, 넓이가 $2p+12$일 때, 선분 HF의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{360}$



$\overline{CF}=\overline{DE}=2p-\alpha$, $\overline{AB}+\overline{HB}$

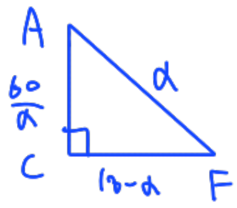
$=\overline{AB}+\overline{AB'}=\overline{FE}=2p-\alpha+2p-\alpha+\alpha$

$=4p-\alpha$

∴ △AHB 둘레 $=\overline{FE}+\overline{AH}=4p-\alpha+\alpha=4p=p+27$

∴ $p=9$, $\overline{CF}=2p-\alpha=18-\alpha$

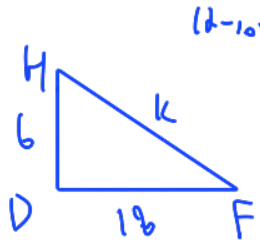
△AHB 넓이 $=\frac{1}{2}\alpha\cdot\overline{AC}=2p+12=30$ ∴ $\overline{AC}=\frac{60}{\alpha}$



$\alpha^2=\alpha^2-36\alpha+324+\frac{3600}{\alpha^2}$

$\alpha-9-\frac{100}{\alpha^2}=0$, $\alpha^3-9\alpha^2-100=0$

$(\alpha-10)(\alpha^2+\alpha+10)=0$ ∴ $\alpha=10$



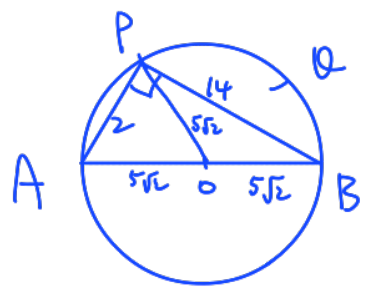
$k^2=324+36=360$

30. 좌표평면에서 길이가 $10\sqrt{2}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PB}|=14$일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. $\boxed{221}$

(단, $|\overrightarrow{QB}|>0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\overline{PA}=\sqrt{200-196}=2$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$

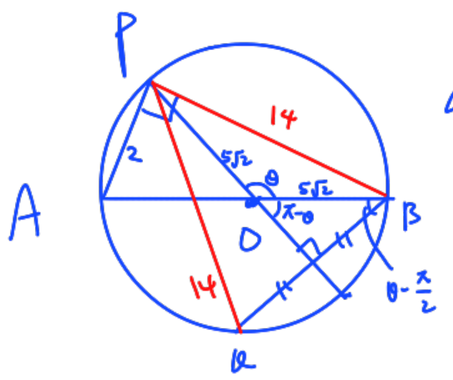
∴ $2\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OP})=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2$

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB})+\cancel{2|\overrightarrow{PO}|^2}=\cancel{|\overrightarrow{OQ}|^2}+\cancel{|\overrightarrow{OP}|^2}-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{PO}\cdot(-\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB})=0$

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{BQ})=0$ ∴ PO⊥BQ



$\cos\theta=\frac{100-196}{2\cdot 50}=-\frac{24}{25}$, $\sin\theta=\frac{7}{25}$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PQ})$

$=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$

∴ $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}|$

$=2\times14\times\cos(\theta-\frac{\pi}{2})$

$=28\sin\theta=\frac{196}{25}=\frac{q}{p}$

∴ $p+q=221$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.