제 2 교시

2027학년도 수능 대비 R20 모의고사-홍보용

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

랑데뷰수학-수능을 보다! 제0회

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~8쪽, 선택과목 확률과 통계 9~12쪽, 미적분 13~16쪽, 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 황보백T

제 2 교시

수학 영역

2026년 랑데뷰 프리미엄 자료실 자료 구성 보고

월정액에 포함되는 자료
*중3 R8 한글 4회분
*고1 R12 한글 4회분
*고2 R16 한글 4회분
*고3 R20 한글 4회분

1. R8→8문항 / R12→12문항 / R16→16문항/ R20→공통15+선택5 총 30문제)
2. 월정액에 포험되는 R8/R12/R16/R20은 기존 심화교재 문제의 약간변형이거나 이전년도에 제작된 문항의 재탕
4. 프로모션의 중3/고1/고2 콘텐츠는 학교 시험 범위에 맞춰서 제작
5. 신규 문항으로 구성되는 R-20, R-30 시리즈와 지역 한정 R+20, R+30은 가격 대폭 할인

	중3 (8문항 모의고사)	
월정액	1월~10월	R8 월 4회분 한글

	고1 (12문항 모의고사)	
월정액	1월~12월	R12 월 4회분 한글

	고2 (16문항 모의고사)	
월정액	1월~12월	R16 월 4회분 한글

	고3&N수 (20문항 모의고사)	
월정액	1월~10월	R20 월 4회분 한글

(1) 월정액에 포함되는 기본 자료 일정표 (자료 샘플 요청하시면 보내드립니다.)

	기본 자료			
월정액/월	중3	고1	고2	고3&N수
25년 12월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
26년 1월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
2월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
3월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
4월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
5월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
6월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
7월	R8 4회분	R12 3회분	R16 4회분	R20 4회분
8월 휴가 및 재충전	**R8 2회분**	**R12 2회분**	**R16 2회분**	**R20 2회분**
9월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
10월	R8 4회분	R12 4회분	R16 4회분	R20 4회분
11월		R12 4회분	R16 4회분	

그 외 프로모션

중3	각 학기 중간 기말고사 대비 1회분
고1	3,6,9,10 모고 대비 각 1회분
고2	3,6,9,10 모고 대비 각 1회분
고3	① 3,5,6,7,9,10 모고 대비 각 1회분 ② 수능특강 변형 ③ 수능완성 변형 ④ 교육청 모고 싱크로율 99% ⑤ 평가원 모고 분석서 ⑥ 강K 또는 서바이벌 주요문항

(2) 프로모션 일정표 (자료 샘플 요청하시면 보내드립니다.)

프로모션	EBS & 모의고사	중3	고1	고2	고3&N수
2월					수특/수완변형 (입고일에 맞춰서 정할 예정)
3월	3월 24일		(3모 대비 -3월10일 전)	(3모 대비 -3월10일 전)	(3모 대비 -3월10일 전) (3모 싱크로율 -3월28일 전)
4월		1학기 중간고사 대비 1회분			(5모 대비 -4월23일 전)
5월	5월 7일		(6모 대비 -5월21일 전)	(6모 대비 -5월21일 전)	(5모 싱크로율 -5월9일 전) (6모 대비 -5월21일 전)
6월	6월 4일				(6모 싱크로율 -6월6일 전) (6모 분석서 -6월19일 전) (7모 대비 -6월24일 전) (7모 싱크로율 -7월11일 전)
7월	7월 8일	1학기 기말고사 대비 1회분			
8월			(9모 대비 -8월19일 전)	(9모 대비 -8월19일 전)	(9모 대비 -8월19일 전)
9월	9월 2일	2학기 중간고사 대비 1회분			(9모 싱크로율 -9월5일 전) (9모 분석서 -6월18일 전)
10월	10월 20일	2학기 기말고사 대비 1회분	(10모 대비 -10월6일 전)	(10모 대비 -10월6일 전)	(10모 대비 -10월6일 전) (10모 싱크로율 -10월23일 전)
11월	11월19일 (수능)				(수능 싱크로율 -미정) (수능 분석서 -미정)

5지선다형

1. 곡선 $y=x^3-3x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3-3a)$에서의 접선이 곡선 $y=x^3-3x$와 만나는 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하자. 점 Q에서의 접선의 기울기가 점 P에서의 접선의 기울기와 절댓값이 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

2. 공차가 양수이고 모든 항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{50}{3},\ a_{26}=2$$

를 만족시킬 때, a_{51}의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

3. $x\ge 0$에서 정의된 함수

$$f(x)=x^3-x^2$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

4. $0\le x<2\pi$일 때, 부등식

$$1+\cos x \le 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\alpha+2\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{3}\pi$ ④ $\frac{11}{6}\pi$ ⑤ $\frac{11}{3}\pi$

5. 함수 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ $(0 \le x \le 5\pi)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점들의 집합을 S라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 집합 S에 속하지 않는 한 점과 집합 S에 속하는 서로 다른 두 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 최댓값은? [3점]

① $\frac{16}{3}\pi$　② 6π　③ $\frac{20}{3}\pi$　④ $\frac{22}{3}\pi$　⑤ 8π

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n - b_n = 2^n$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{8}(a_k - m)=300$이고 $\sum_{k=1}^{8}b_k = 30$일 때, 자연수 m의 값은? [4점]

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

7. $f(1)=1$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{at^2-at}$$

의 정의역과 치역이 각각 $\{x\,|\,x\neq 1\}$와 $\{y\,|\,y\neq 2\}$이다. $g(0)=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(가) $0\leq t\leq 2$일 때, $a(t)=k$이다.
(나) $t\geq 2$일 때, $v(t)=k(t-1)^2+2$이다.

<보 기>

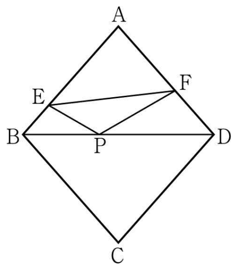
ㄱ. $a(3)=4k$
ㄴ. $v(1)=2$
ㄷ. $t=4$일 때, 점 P의 위치는 $\frac{23k}{3}+8$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 그림과 같이 $\cos A = \frac{1}{8}$인 마름모 ABCD에서 선분 AB 위의 점 E와 선분 AD위의 점 F가

$$\overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{DF}} = 2 : 3,\ \overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{19}$$

를 만족시킨다. 대각선 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{FP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하면 $\angle \mathrm{EQF} = \frac{2\pi}{3}$이다. 다음은 P = Q일 때, $\frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{EQ}}} \times \overline{\mathrm{BE}} \times \overline{\mathrm{DF}}$ 의 값을 구하는 과정이다.



> 점 F를 직선 BD에 대칭이동 하면 선분 CD위의 점이 되고 그 점을 F′라 하자. 두 직선 EF′와 BD가 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{PF'}} \ge \overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{QF'}}$이다.
> $\angle \mathrm{BQE} = \angle \mathrm{DQF'}$, $\angle \mathrm{EBQ} = \angle \mathrm{FDQ}$이므로
> $\frac{\overline{\mathrm{FQ}}}{\overline{\mathrm{EQ}}} = \boxed{\text{(가)}}$
> 이다.
> 삼각형 EQF에서 $\overline{\mathrm{FQ}} = \boxed{\text{(나)}}$이다.
> 각형 QFF′는 한 변의 길이가 $\boxed{\text{(나)}}$인 정삼각형이므로
> $\frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{EQ}}} \times \overline{\mathrm{BE}} \times \overline{\mathrm{DF}} = \boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 p, q, r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

10. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(t) & (x \le t) \\ f(t) - f(x) & (x > t) \end{cases}$$

의 최댓값을 $h(t)$라 할 때, 방정식 $h(x) = mx$의 실근의 개수가 2이기 위한 모든 m의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{4}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{15}{4}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

11. $a_1 = k$이고 $a_2 = a_1 + 2$인 수열 $\{a_n\}$이 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n + 1 & \left(\sqrt{|a_{n-1} + a_n|}\text{ 이 자연수인 경우}\right) \\ a_n - k & \left(\sqrt{|a_{n-1} + a_n|}\text{ 이 자연수가 아닌 경우}\right) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_4 = a_6$을 만족하는 100이하인 자연수 k에 대하여 수열 $\{b_k\}$를

'$a_1 = k$일 때 수열 $\{a_n\}$에서의 k번째 항'

이라 할 때, $b_k = -18$인 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

단답형

12. $a_1 = 1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = a_{n+1}$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

13. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$, $g(x) = 4x + a$에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

14. x축과 만나는 점의 개수가 홀수이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

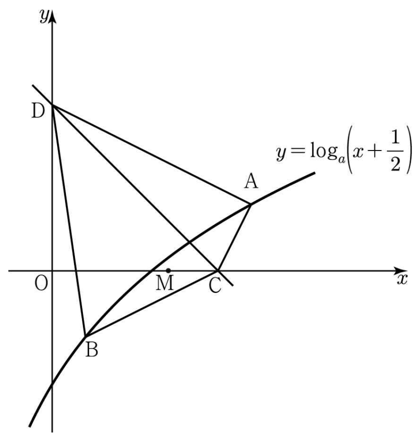
$$g(x)=\begin{cases} f(x)+2x & (f(x) \geq 0) \\ 2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 불연속인 점의 개수가 2이고 $\lim_{x\to a-} g'(x) \neq \lim_{x\to a+} g'(x)$인 실수 a의 개수는 1일 때, $f(3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

15. 곡선 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $(a>1)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A와 제4사분면에 있는 점 B에 대하여 선분 AB의 중점 M이 x축 위에 있다. 두 점 A, M 사이를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $8\times a$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\angle \mathrm{CAD}=\frac{\pi}{2}$

(나) 점 A를 직선 CD에 대하여 대칭 이동시킨 점은 선분 BC위에 있다.



＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『**선택과목(확률과 통계)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

16. $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^3$의 전개식에서 x의 계수가 6일 때, 양의 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17. 원을 같은 모양의 부채꼴 6개로 등분한 후 1부터 6까지의 자연수를 한 번씩 모두 사용하여 각 부채꼴에 하나씩 적을 때, 이웃하는 두 부채꼴에 적힌 수의 합이 모두 홀수인 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

18. 랑데뷰수학학원의 학생들의 주간지 푸는 시간은 모평균이 m, 모표준편차가 50인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학원 학생 중 n명을 임의추출하여 얻은 주간지 푸는 시간의 표본평균을 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\alpha \le m \le \beta$이다. $\beta-\alpha=28$일 때, n의 값은? (단, 주간지 푸는 시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다) [3점]

① 36 ② 49 ③ 64 ④ 81 ⑤ 100

19. 탁자 위에 놓은 5개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

5개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 2개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 하는 경우의 수는? [4점]

① 992 ② 1002 ③ 1012 ④ 1022 ⑤ 1032

단답형

20. 모든 공이 흰 공 또는 검은 공으로 50개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공의 개수가 적지 않을 확률을 p, 검은 공의 개수가 적지 않을 확률을 q, 흰 공과 검은 공의 개수가 같은 확률을 r라 할 때, $p=4r$이다. $175q$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

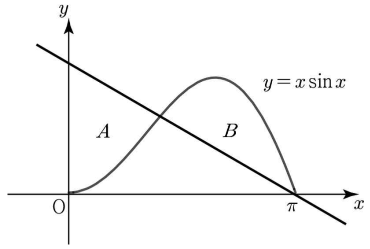
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『**선택과목(미적분)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

16. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$와 두 직선 $y=k(x-\pi)$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=x\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$와 직선 $y=k(x-\pi)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\dfrac{\pi}{6}$ 일 때, 실수 k의 값은? (단, $-\pi < k < 0$) [3점]



① $-\dfrac{5}{3\pi}$ ② $-\dfrac{2}{\pi}$ ③ $-\dfrac{3}{2\pi}$ ④ $-\dfrac{1}{\pi}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3\pi}$

17. 1보다 큰 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=e^x$가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. $f(\alpha)=1$인 실수 α에 대하여 $f'(\alpha)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{e^2-1}$ ② $\dfrac{1}{e^2+1}$ ③ $\dfrac{1}{e-1}$ ④ $\dfrac{1}{e}$ ⑤ $\dfrac{1}{e+1}$

18. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=ae^x+be^{-x}$가 있다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+x & (x<0) \\ \displaystyle\int_{\ln 3}^{x} f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

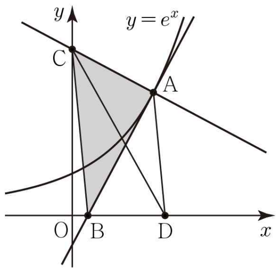
이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f'(0)$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{3}{5}$ ② -1 ③ $-\dfrac{6}{5}$ ④ $-\dfrac{8}{5}$ ⑤ -2

19. 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, e^t)$ $(t>1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하고 점 A를 지나고 접선에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. x축 위의 점 D에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이가 같을 때, 점 D의 x좌표를 $f(t)$라 하자. $\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{f(t)-1}{t-1}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{e^2+1}{e^2+2}$　② $\dfrac{e^2+2}{e^2+1}$　③ $\dfrac{2e^2+1}{e^2+1}$

④ $\dfrac{2e^2+1}{e^2+2}$　⑤ $\dfrac{2e^2+3}{e^2+1}$



단답형

20. 모든 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n(2-i)\right\}^n=a_n+b_n\times i$$

를 만족시킨다.

$$p_n=\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{(2a_n+b_n)(a_n-2b_n)},\quad q_n=\frac{{a_{n+1}}^2-{b_{n+1}}^2}{(3a_n-b_n)(a_n+3b_n)}$$

라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4p_n+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n-1}}{q_n+\left(\dfrac{1}{32}\right)^n}$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『**선택과목(기하)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2027학년도 대학수학능력시험 대비 R20 제0회

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

16. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 의 변 AB 의 중점을 M 이라 할 때, $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

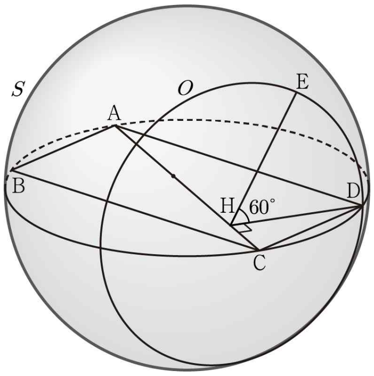
17. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F, F′이고, 점 P가 쌍곡선 위의 점이다. 삼각형 PFF′에 내접하는 원의 중심의 x의 좌표가 3일 때, $|\overline{PF}-\overline{PF'}|$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

18. 초점이 F인 포물선 $y^2=8px$ 위의 제1사분면의 점 P를 중심으로 하고, 두 직선 $x=-p$, $y=-p$에 모두 접하는 원 C가 있다. 원 C의 넓이가 81π일 때, $\overline{OF}+\overline{PF}$의 값은? (단, O는 원점이고, $p>0$이다.) [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

19. 좌표공간에 직사각형 ABCD와 $\overline{\mathrm{AC}}$를 지름으로 하는 구 S가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 점 D에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{DH}}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{HE}}$, $\angle\mathrm{EHD}=\frac{\pi}{3}$를 만족하는 점 E가 있다. 세 점 E, H, D를 포함하는 원을 O라 하고, 원 O 위의 점 E에서 직선 BD까지의 최단거리는? [4점]

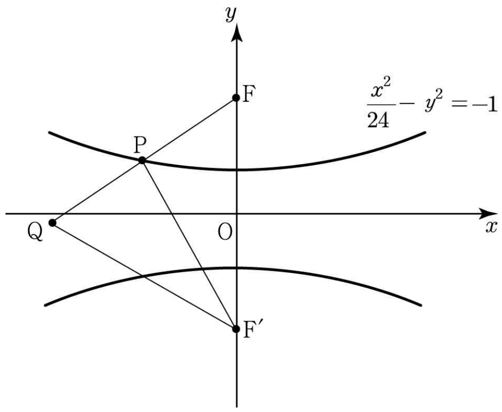


① $\frac{4\sqrt{105}}{25}$ ② $\frac{2\sqrt{105}}{25}$ ③ $\frac{\sqrt{105}}{25}$ ④ $\frac{2\sqrt{105}}{5}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{105}}{5}$

단답형

20. 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{24}-y^2=-1$이 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 점 Q를 잡자.

이때, 선분 F'Q의 길이가 10일 때, △PQF'의 넓이를 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{QF}}$이다.) [4점]



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2027학년도 수학영역 랑데뷰 R20 제0회

공통과목

1	⑤	2	②	3	③	4	⑤	5	②
6	⑤	7	①	8	③	9	②	10	④
11	④	12	5	13	35	14	66	15	27

확률과 통계

16	②	17	②	18	②	19	④	20	46

미적분

16	①	17	③	18	⑤	19	③	20	68

기하

16	⑤	17	②	18	③	19	①	20	24

2027학년도 수학영역 랑데뷰 R20 제0회 -풀이

공통과목

〔제작자 : 랑데뷰수학 황보백
010-5673-8601〕

1) 정답 ⑤

함수 $y=x^3-3x$의 도함수가 $y'=3x^2-3$이므로

곡선 $y=x^3-3x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3-3a)$에서의 접선의 방정식은

$y=(3a^2-3)(x-a)+a^3-3a=(3a^2-3)x-2a^3$

이 접선이 곡선 $y=x^3-3x$와 만나는 점의 x좌표는

$x^3-3x=(3a^2-3)x-2a^3$에서 $(x-a)^2(x+2a)=0$

$\therefore\ x=a$ 또는 $x=-2a$

따라서 점 Q의 x좌표는 $-2a$이다.

점 Q에서 곡선 $y=x^3-3x$에 접하는 직선의 기울기는

$3(-2a)^2-3=12a^2-3$이므로

$|12a^2-3|=|3a^2-3|$에서

$12a^2-3=3a^2-3$ 또는 $12a^2-3=-3a^2+3$

$a>0$이므로 $12a^2-3=-3a^2+3$에서

$15a^2=6$

$a^2=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

2) 정답 ②

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{a_na_{n+1}}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{50}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{51}}\right)$

$=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_{26}-25d}-\dfrac{1}{a_{26}+25d}\right)$

$=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{2-25d}-\dfrac{1}{2+25d}\right)$ $(\because\ a_{26}=2)$

$=\dfrac{50}{4-(25d)^2}=\dfrac{50}{3}$

$4-(25d)^2=3$

$\therefore\ d=\dfrac{1}{25}$

따라서 $a_{51}=a_{26}+25d=2+25\times\dfrac{1}{25}=3$

3) 정답 ③

$f(x)=x^3-x^2$

$f'(x)=3x^2-2x$

$f'(1)=1$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=x-1$

이다.

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^1 \{f(x)-(x-1)\}\,dx$

$=\int_0^1 (x^3-x^2-x+1)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1$

$=\frac{3-4-6+12}{12}=\frac{5}{12}$

이다.

4) 정답 ⑤

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$1+\cos x \le 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$에서

$1+\cos x \le 2\sin^2 x$

$1+\cos x \le 2-2\cos^2 x$

$2\cos^2 x+\cos x-1 \le 0$

$(\cos x+1)(2\cos x-1) \le 0$

$-1 \le \cos x \le \frac{1}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값이 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로 부등식 $-1 \le \cos x \le \frac{1}{2}$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5}{3}\pi$

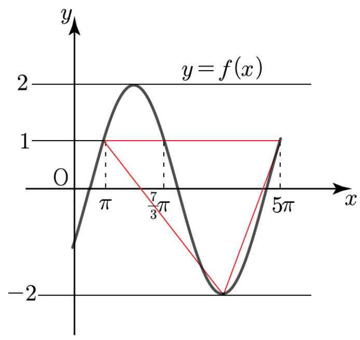
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{3}+2\times\frac{5}{3}\pi=\frac{11}{3}\pi$

5) 정답 ②

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이고, 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

또한, 함수 $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 함수 $y=2\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나므로

$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1$에서

$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

곧, $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$의 값이 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$,이므로

$S=\left\{(\pi,\ 1),\ \left(\frac{7}{3}\pi,\ 1\right),\ (5\pi,\ 1)\right\}$

집합 S에 속하는 두 점 사이의 거리의 최댓값은

$5\pi-\pi=4\pi$

한편, 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이므로 집합 S에 속하지 않는 한 점을 꼭짓점으로 하고 S에 속하는 두 점을 연결한 선분을 밑변으로 하는 삼각형의 높이의 최댓값은

$1-(-2)=3$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 4\pi\times 3=6\pi$

6) 정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{8}(a_k-m)=300$, $\sum_{k=1}^{8}b_k=30$에서 변변 빼면

$\sum_{k=1}^{8}(a_k-b_k-m)=270$이고 $a_k-b_k=2^k$이므로

$\sum_{k=1}^{8}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{8}2^k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=2^9-2=510$이다.

따라서

$510-8m=270$

$8m=240$

$\therefore\ m=30$

7) 정답 ①

$g(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{at^2-at}$

$\quad=\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{at(t-1)}$

에서 함수 $g(x)$의 정의역에 $x=0$이 포함되므로 함수 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=x(px+q)$라 할 수 있다.

$f(1)=1$이므로 $p+q=1$에서 $q=1-p$

$f(x)=x(px+1-p)$이다.

$g(x)=\lim_{t\to x}\frac{t(pt+1-p)}{at(t-1)}=\frac{px+1-p}{a(x-1)}$

$g(0)=\frac{1-p}{-a}=1 \to a=p-1$

그러므로 $g(x)=\frac{px+1-p}{(p-1)x-p+1}$

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{p}{p-1}$이고 함수 $g(x)$의 치역에 2가 포함되지 않으므로 $\frac{p}{p-1}=2$이다.

$\therefore\ p=2$

따라서 $f(x)=x(2x-1)$이다.

$f(2)=2\times3=6$

8) 정답 ③

k17

[검토자 : 필재T]

ㄱ.

$t\ge2$일 때, $a(t)=2k(t-1)$이므로 $a(3)=4k$이다. (ㄱ. 참)

ㄴ.

$0\le s\le2$인 실수 s에 대하여

$v(2)-v(s)=\int_s^2 a(t)dt=\int_s^2 k\,dt=(2-s)k$

이고, 조건 (나)에 의하여 $v(2)=k+2$이므로

$v(s)=v(2)-(2-s)k=k+2-2k+ks=ks-k+2$

즉, $0\le s\le2$일 때, $v(t)=kt-k+2$

$\therefore\ v(1)=2$ (ㄴ. 참)

ㄷ.

$$v(t)=\begin{cases}kt-k+2 & (0\le t\le2)\\ k(t-1)^2+2 & (t\ge2)\end{cases}$$

점 P의 시각 $t(t\ge0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(0)=0$이므로

$$\begin{aligned}x(4)&=\int_0^4 v(t)dt\\&=\int_0^2(kt-k+2)dt+\int_2^4\{k(t-1)^2+2\}dt\\&=\left[\frac{k}{2}t^2+(2-k)t\right]_0^2+\left[\frac{k(t-1)^3}{3}+2t\right]_2^4\\&=2k+4-2k+\frac{26k}{3}+4\\&=\frac{26k}{3}+8\end{aligned}$$

(ㄷ. 거짓)

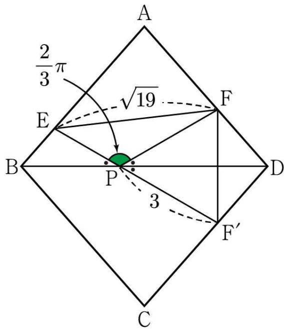
9) 정답 ②

점 F를 직선 BD에 대칭이동 하면 선분 CD위의 점이 되고 그 점을 F′라 하자. 두 직선 EF′와 BD가 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{PF'}}\ \ge\ \overline{\mathrm{EP}}+\overline{\mathrm{QF'}}$이다.

$\angle\mathrm{BQE}=\angle\mathrm{DQF'}$, $\angle\mathrm{EBQ}=\angle\mathrm{FDQ}$이므로

$\triangle\mathrm{EBQ}\backsim\triangle\mathrm{FDQ}$ ($\because$ AA닮음)

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{DF}}=2:3$이므로 $\overline{\mathrm{EQ}}:\overline{\mathrm{FQ}}=2:3$이다.



$\frac{\overline{\mathrm{FQ}}}{\overline{\mathrm{EQ}}}=\boxed{\frac{3}{2}}$

$\overline{\mathrm{EQ}}=2k$, $\overline{\mathrm{FQ}}=3k$라 하면

삼각형 EQF에서 $\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{19}$, $\angle\mathrm{EQF}=\frac{2\pi}{3}$이므로

$19=4k^2+9k^2-2\times2k\times3k\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$19=19k^2$

$\therefore\ k=1$

따라서 $\overline{\mathrm{FQ}}=\boxed{3}$이다.

삼각형 QFF′에서 $\angle\mathrm{FQF'}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}=3$이므로 삼각형 QFF′는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{FF'}}=3$

$\angle\mathrm{FDF'}=\pi-\angle\mathrm{BAD}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{FDF'})=-\frac{1}{8}$

$\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{DF'}}=x$라 하면

$9=x^2+x^2-2\times x\times x\times\left(-\frac{1}{8}\right)$

$9=2x^2+\frac{x^2}{4}$

$x^2=4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DF}}=2$

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{DF}}=2:3$에서 $\overline{\mathrm{BE}}=\frac{4}{3}$이다.

$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{EQ}}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{DF}}=\frac{3}{2}\times2\times\frac{4}{3}=\boxed{4}$

$p=\frac{3}{2}$, $q=3$, $r=4$이므로 $p\times q\times r=18$

10) 정답 ④

$f(x)=x^3-3x^2+2$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$의 해는 $x=0$과 $x=2$이고 증감표를 작성해보면 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=2$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-2$를 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 해는

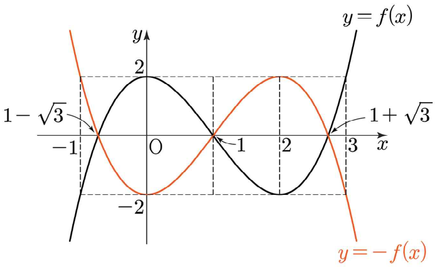
$x^3-3x^2+2=0$

$(x-1)(x^2-2x-2)=0$

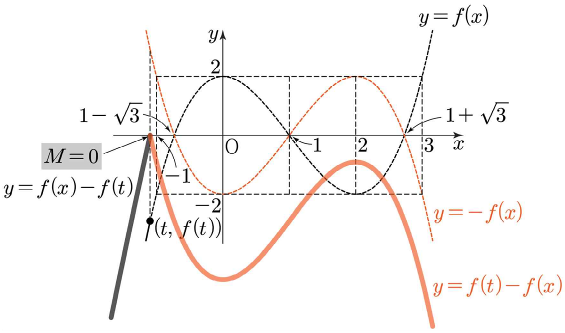
$x=1$ 또는 $x=1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$

이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=-f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

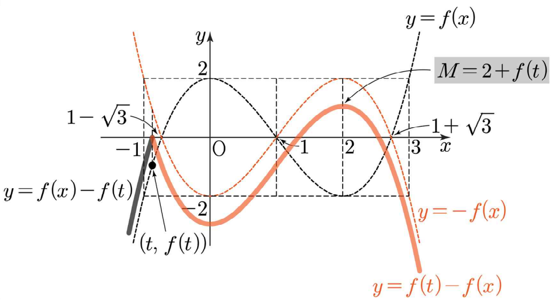


(i) $t \le -1$일 때, $f(t) \le -2$이므로
함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



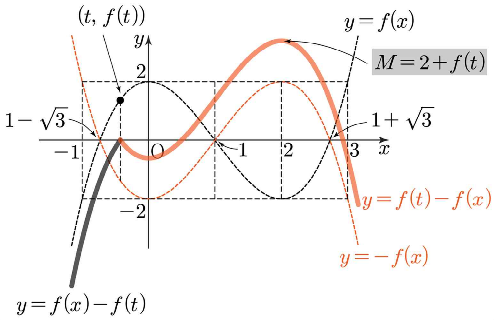
따라서 $h(t)=0$

(ii) $-1<t \le 1-\sqrt{3}$일 때, $-2<f(t) \le 0$이므로
함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



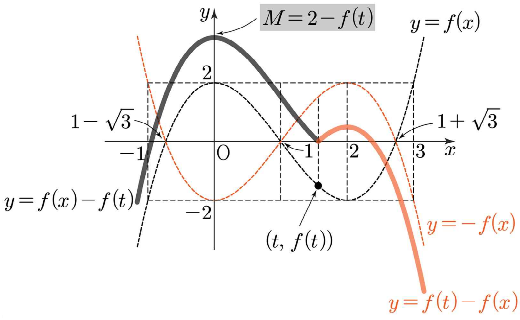
따라서 $h(t)=2+f(t)$

(iii) $1-\sqrt{3}<t \le 1$일 때, $0 \le f(t) \le 2$이므로
함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



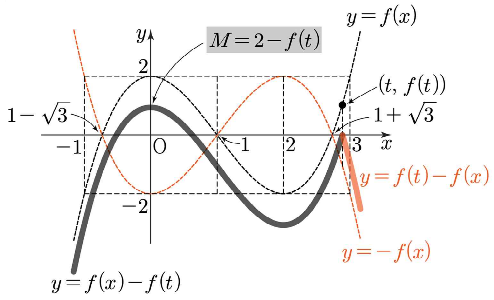
따라서 $h(t)=2+f(t)$

(iv) $1<t \le 1+\sqrt{3}$일 때, $-2 \le f(t) \le 0$이므로
함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



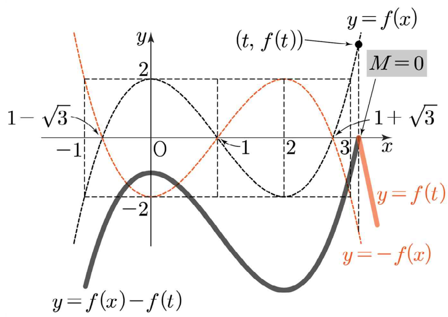
따라서 $h(t)=2-f(t)$

(v) $1+\sqrt{3}<t \le 3$일 때, $0<f(t) \le 2$이므로
함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(t)=2-f(t)$

(vi) $t>3$일 때, $f(t)>2$이므로
함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



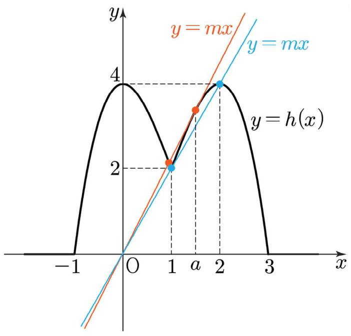
따라서 $h(t)=0$

그러므로 $h(t)=\begin{cases} 0 & (t \le -1) \\ 2+f(t) & (-1<t \le 1) \\ 2-f(t) & (1<t \le 3) \\ 0 & (t>3) \end{cases}$

따라서

$$h(x)=\begin{cases} 0 & (x \le -1) \\ x^3-3x^2+4 & (-1<x \le 1) \\ -x^3+3x^2 & (1<x \le 3) \\ 0 & (x>3) \end{cases}$$

그러므로 방정식 $h(x)=mx$의 실근의 개수가 2이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=mx$가 곡선 $y=-x^3+3x^2$에 접하거나 $(1,2)$를 지나야 한다.



(i) $y=mx$가 곡선 $y=-x^3+3x^2$에 접할 때, 접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+3a^2)$ $(1<a<2)$이라 하면

$\dfrac{-a^3+3a^2}{a}=h'(a)$

$-a^2+3a=-3a^2+6a$

$2a^2-3a=0$

$a(2a-3)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

$m=h'(a)=h'\left(\dfrac{3}{2}\right)=-3\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+6\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-27+36}{4}=\dfrac{9}{4}$

이다.

(ii) $y=mx$가 $(1,\ 2)$를 지날 때, $m=2$이다.

따라서

$\dfrac{9}{4}+2=\dfrac{17}{4}$

11) 정답 ④

$a_1=k,\ a_2=k+2$이므로

(i) $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$가 자연수일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	$k+2$	$-k-1$	$k+2$	$-k-1$	$k+2$

$a_4=a_6$이므로 $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$가

자연수인 100이하의 k는 1, 7, 17, 31, 49, 71, 97

$a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{2p+1}$, $a_4=a_6=a_8=\cdots=a_{2p+2}$($p$는 자연수)이고

k는 모두 홀수이므로 $b_k=-k-1$

따라서 $b_k=-18$인 $k=17$이다.

(ii) $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$가 자연수가 아니고

$\sqrt{|a_2+a_3|}=\sqrt{|k+4|}$가 자연수일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	$k+2$	2	-1	2	-1

$a_4=a_6$이므로 $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$가 자연수가 아니고

$\sqrt{|a_2+a_3|}=\sqrt{|k+4|}$가 자연수인 100이하의 k는

5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96

그러나 $a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{2p+1}=2$,

$a_4=a_6=a_8=\cdots=a_{2p+2}=-1$($p$는 자연수)이므로 $b_k=-18$인 k는 존재하지 않는다.

(iii) $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$, $\sqrt{|a_2+a_3|}=\sqrt{|k+4|}$가 모두 자연수가 아니고 $\sqrt{|a_3+a_4|}=\sqrt{|4-k|}$가 자연수일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	$k+2$	2	$2-k$	$k-1$	$2-k$

$a_4=a_6$이므로 $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$, $\sqrt{|a_2+a_3|}=\sqrt{|k+4|}$가 모두 자연수가 아니고 $\sqrt{|a_3+a_4|}=\sqrt{|4-k|}$가 자연수인

100이하의 k는 3, 8, 13, 20, 29, 40, 53, 68, 85

$a_5=a_7=a_9=\cdots=a_{2p+3}$, $a_4=a_6=a_8=\cdots=a_{2p+2}$($p$는 자연수)이고

k가 홀수이면 $b_3=2,\ b_k=k-1$, k가 짝수이면 $b_k=2-k$

따라서 $b_k=-18$인 $k=20$이다.

(iv) $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$, $\sqrt{|a_2+a_3|}=\sqrt{|k+4|}$,

$\sqrt{|a_3+a_4|}=\sqrt{|4-k|}$가 모두 자연수가 아니고

$\sqrt{|a_4+a_5|}=\sqrt{|4-3k|}$가 자연수일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	$k+2$	2	$2-k$	$2-2k$	$2k-1$

$a_4=a_6$이므로 $2-k=2k-1$, $k=1$이지만

$\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$가 자연수가 되므로 모순

(v) $\sqrt{|a_1+a_2|}=\sqrt{|2k+2|}$, $\sqrt{|a_2+a_3|}=\sqrt{|k+4|}$,

$\sqrt{|a_3+a_4|}=\sqrt{|4-k|}$, $\sqrt{|a_4+a_5|}=\sqrt{|4-3k|}$가 모두 자연수가 아닐 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	$k+2$	2	$2-k$	$2-2k$	$2-3k$

$a_4=a_6$이므로 $2-k=2-3k$, $k=0$이므로 모순

따라서 (i), (iii)에서 $b_k=-18$인 $k=17,\ 20$이므로 합은 37이다.

12) 정답 5

$n=1$일 때, $\dfrac{a_1}{1}=a_2$이므로 $a_2=1$이다.

$n\geq 2$일 때,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=a_{n+1}-a_n$이므로

$\dfrac{a_n}{n}=a_{n+1}-a_n$에서

$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$ (단, $n\geq 2$)

$\therefore\ a_{10}=\dfrac{10}{9}a_9$

$=\dfrac{10}{9}\times\dfrac{9}{8}a_8$

$=\dfrac{10}{9}\times\dfrac{9}{8}\times\cdots\times\dfrac{3}{2}a_2$

$=5a_2$

$=5$

13) 정답 35

$f(x)=g(x)$, 즉 $\frac{1}{3}x^3+x^2+x=4x+a$

$\frac{1}{3}x^3+x^2-3x=a$

$h(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$라 하면

$h'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$
$h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 $x=1$에서 극소이다.
$h(-3)=-9+9+9=9$

$h(1)=\frac{1}{3}+1-3=-\frac{5}{3}$

에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $-\frac{5}{3}<a<9$이다.

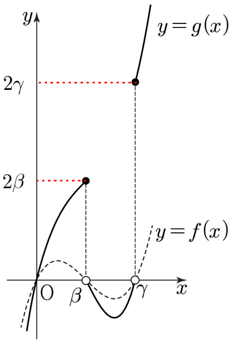
구하는 정수 a의 값의 합은
$(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8=35$

14) 정답 66
(i) 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수가 1인 경우
$f(\alpha)=0$일 때, $\lim\limits_{x\to\alpha+}g(x)=2\alpha$, $\lim\limits_{x\to\alpha-}g(x)=0$으로 $\alpha\neq 0$이면 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. 그 외 불연속점이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 못한다.

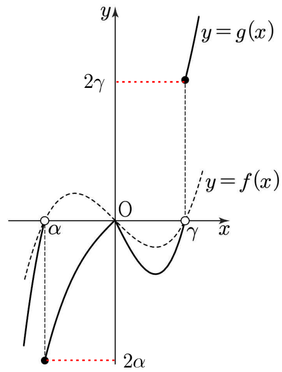
(ii) 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수가 3인 경우
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$일 때,
함수 $g(x)$가 불연속인 점의 개수가 2이기 위해서는 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$중 하나는 0이어야 한다.

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x)+2\ (f(x)>0) \\ 2f'(x) \quad (f(x)<0)\end{cases}$$

$f(t)=0$일 때, $\lim\limits_{x\to t-}g'(x)=\lim\limits_{x\to t+}g'(x)$이기 위해서는
$f'(t)+2=2f'(t)$에서 $f'(t)=2$이어야 한다.
① $\alpha=0$일 때,

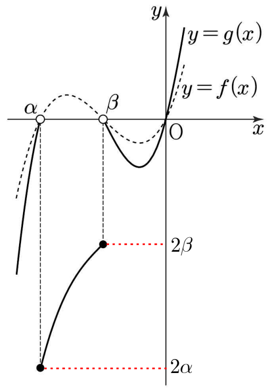


$f'(\beta)<0$이므로 $f'(0)=f'(\gamma)=2$이어야 $\lim\limits_{x\to a-}g'(x)\neq\lim\limits_{x\to a+}g'(x)$인 실수 a는 β뿐이므로 개수가 1이다.
$f(x)=x(x-\beta)(x-\gamma)$에서 $f'(0)=2$, $f'(\gamma)=2$이다.
$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+x(x-\gamma)+x(x-\beta)$
$f'(0)=\beta\gamma=2$
$f'(\gamma)=\gamma(\gamma-\beta)=2 \rightarrow \gamma^2-2=2 \rightarrow \therefore\ \gamma=2,\ \beta=1$
따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이다.
$\therefore\ f(3)=6$
② $\beta=0$일 때,



$f'(\beta)=f'(0)<0$
이므로 $\lim\limits_{x\to 0-}g'(x)=f'(0)+2>2f'(0)=\lim\limits_{x\to 0+}g'(x)$이다.
따라서 $f'(\alpha)=f'(\gamma)=2$이어야 $\lim\limits_{x\to a-}g'(x)\neq\lim\limits_{x\to a+}g'(x)$인 실수 a는 0뿐이므로 개수가 1이다.
$f(x)=(x-\alpha)x(x-\gamma)$에서 $f'(\alpha)=2$, $f'(\gamma)=2$이다.
$f'(x)=x(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)x$
$f'(\alpha)=\alpha(\alpha-\gamma)=2$, $f'(\gamma)=(\gamma-\alpha)\gamma=2$
에서 변변 나누면

$-\frac{\alpha}{\gamma}=1$에서 $\alpha=-\gamma \rightarrow \alpha=-1,\ \gamma=1$
따라서 $f(x)=(x+1)x(x-1)$이다.
$\therefore\ f(3)=24$
③ $\gamma=0$일 때,



$f'(\beta)<0$이므로 $f'(\alpha)=f'(0)=2$이어야 $\lim_{x\to a-}g'(x)\neq\lim_{x\to a+}g'(x)$인

실수 a는 β뿐이므로 개수가 1이다.

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)x$에서 $f'(0)=2$, $f'(\alpha)=2$이다.

$f'(x)=(x-\beta)x+(x-\alpha)x+(x-\alpha)(x-\beta)$

$f'(0)=\alpha\beta=2$

$f'(\alpha)=(\alpha-\beta)\alpha=2 \rightarrow \alpha^2-2=2 \rightarrow \therefore\ \alpha=-2,\ \beta=-1$

따라서 $f(x)=(x+2)(x+1)x$이다.

$\therefore\ f(3)=60$

(i), (ii)에서 $M=60$, $m=6$이다.

$\therefore\ M+m=66$

15) 정답 27

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하고 점 C를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 F라 하자. 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G라 하면 이등변삼각형 BCD($\because$ (가))에서 $\overline{CG}=\overline{BG}$이고

$\angle DGC=\frac{\pi}{2}$이다.

(나)에서 점 A가 점 G로 대칭 이동되므로 $\triangle DCG\equiv\triangle DCA$

따라서 $\overline{BC}=2\overline{AC}$이다.

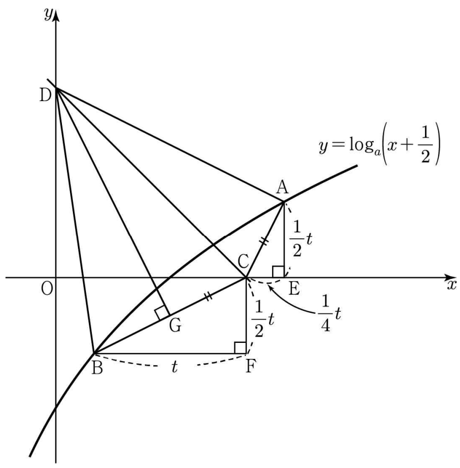
삼각형 CBF와 삼각형 CAE에서 $\angle CFB=\angle CEA=\frac{\pi}{2}$이고

$\angle DCF=\angle DCE$에서 $\angle BCF=\angle ACE$ 이므로 $\triangle CBF\backsim\triangle CAE$이고 닮음비는 $2:1$이다.

한편, 두 점 A, B의 중점 M이 x축 위에 있으므로 $\overline{AE}=\overline{CF}$이다.

$\overline{BF}:\overline{AE}=2:1$에서 $\overline{BF}:\overline{CF}=2:1 \rightarrow \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}}=\frac{1}{2}$이다.

그러므로 직선 BC의 기울기는 $\frac{1}{2}$, 직선 AC의 기울기는 2, 직선 AD의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. …… ㉠



$\overline{BF}=t$ $(t>0)$라 하면 $\overline{CF}=\overline{AE}=\frac{1}{2}t$, $\overline{CE}=\frac{1}{4}t$

따라서 점 B의 y좌표를 $-\frac{1}{2}t$, 점 A의 y좌표를 $\frac{1}{2}t$이다.

$\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t \rightarrow x=a^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{B}\left(a^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}t\right)$

$\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}t \rightarrow x=a^{\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{A}\left(a^{\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t\right)$

직선 CD의 방정식을 $y=-x+b$ $(b>0)$라 하면 C$(b, 0)$, D$(0, b)$이다.

$\overline{BF}=t=b-\left(a^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}\right) \rightarrow a^{-\frac{1}{2}t}=b-t+\frac{1}{2}$ …… ㉡

$\overline{CE}=\frac{1}{4}t=a^{\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}-b \rightarrow a^{\frac{1}{2}t}=b+\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠에서 직선 AD의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\frac{1}{2}t-b}{a^{\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2} \rightarrow a^{\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}=-t+2b$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $b+\frac{1}{4}t=-t+2b$

$\therefore\ b=\frac{5}{4}t$

㉡, ㉢에서

$a^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}t}=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$

변변 곱하면

$1=\left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)$

$1=\frac{3}{8}t^2+\frac{7}{8}t+\frac{1}{4}$

$3t^2+7t-6=0$

$(3t-2)(t+3)=0$

$\therefore\ t=\frac{2}{3}$

따라서 $a^{-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}$

$a^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a=\frac{27}{8}$

$8a=27$이다.

확률과통계

[출제자 : 황보백 010-5673-8601]

16) 정답 ②

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^3$의 일반항은

${}_3\mathrm{C}_r(x^2)^r(a)^{3-r}(x^{-1})^{3-r}={}_3\mathrm{C}_r a^{3-r}x^{3r-3}$

따라서

$r=1$일 때, $x\times{}_3\mathrm{C}_1a^2=3a^2x$

$r=2$일 때, $-\frac{1}{x^2}\times{}_3\mathrm{C}_2ax^3=-3ax$

x의 계수는 $3a^2-3a$이다.

$3a^2-3a=6$ ⇨ $a^2-a-2=0$ ⇨ $(a+1)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$이다.

17) 정답 ②

이웃하는 두 부채꼴에 적힌 수의 합이 모두 홀수이려면
홀수와 짝수가 번갈아가며 나열되어야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는
$(3-1)!\times3!=12$이다.

18) 정답 ②

이 학원 학생 중 임의추출한 n명의 주간지 푸는 시간의 평균을 $\bar{x}$ 라고 하자. 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}$ 이므로

$\beta-\alpha=2\times1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}$

$=\frac{196}{\sqrt{n}}$

$=28$

$\sqrt{n}=\frac{196}{28}=7$

따라서 $n=49$

19) 정답 ④

동전에 왼쪽부터 번호를 지정하면 다음과 같다.

1번	2번	3번	4번	5번
앞면	앞면	앞면	뒷면	뒷면

(i) 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 앞면이 될 때,
뒷면인 동전은 홀수번, 앞면인 동전은 짝수번 시행이 이뤄져야 한다.

① 4번 동전과 5번 동전이 각각 1회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(4, 0, 0) (2, 2, 0)			(1, 1)	

$(4,0,0)\to\frac{6!}{4!}\times3\times1=90$

$(2,2,0)\to\frac{6!}{2!2!}\times3\times1=540$

따라서 $90+540=630$

② 4번 동전과 5번 동전 중 하나가 1회, 다른 하나가 3회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(2, 0, 0)			(1, 3)	

$(2,0,0)\to\frac{6!}{3!2!}\times3\times2=360$

③ 4번 동전과 5번 동전이 각각 3회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(0, 0, 0)			(3, 3)	

$(0,0,0)\to\frac{6!}{3!3!}\times1\times1=20$

④ 4번 동전과 5번 동전 중 하나가 1회, 다른 하나가 5회 일어날 때

1번	2번	3번	4번	5번
(0, 0, 0)			(1, 5)	

$(0,0,0)\to\frac{6!}{5!}\times1\times2=12$

①~④에서 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 앞면인 경우의 수는

$630+360+20+12=1022$

(ii) 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 뒷면이 될 때,
뒷면인 동전은 짝수번, 앞면인 동전은 홀수번 시행이 이뤄져야 한다.
그런데 앞면인 동전이 3개이고 각각이 모두 홀수번 시행이 이뤄지면 시행의 합이 홀수가 되고 그럼 뒷면인 동전의 시행의 합도 홀수가 되어야 해서 모순이다.
즉, 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 뒷면이 될 수 없다.
(i), (ii)에서 시행을 6번 반복한 후 5개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 하는 경우의 수는 1022가지이다.

20) 정답 46

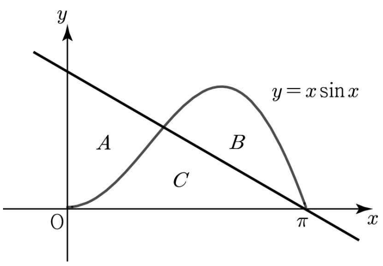
흰 공의 개수를 x라 하면 검은 공의 개수는 $50-x$이다.
흰 공의 개수가 적지 않기 위해서는 흰 공을 2개를 꺼내거나 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$p=\frac{{}_x\mathrm{C}_2+{}_x\mathrm{C}_1\times{}_{50-x}\mathrm{C}_1}{{}_{50}\mathrm{C}_2}$

이다.
검은 공의 개수가 적지 않기 위해서는 검은 공을 2개를 꺼내거나 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로
$$q=\frac{{}_{50-x}\mathrm{C}_2+{}_{50-x}\mathrm{C}_1\times{}_x\mathrm{C}_1}{{}_{50}\mathrm{C}_2}$$
이다.
흰 공과 검은 공의 개수가 같기 위해서는 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로
$$r=\frac{{}_{50-x}\mathrm{C}_1\times{}_x\mathrm{C}_1}{{}_{50}\mathrm{C}_2}$$
이다.
$p=4r$에서
$$\frac{x(x-1)}{2\times1}+x(50-x)=4\times x(50-x)$$
$$\frac{x(x-1)}{2\times1}=3x(50-x)$$
$$x^2-x=300x-6x^2$$
$$7x^2-301x=0$$
$$7x(x-43)=0$$
$x=43$이다.
따라서 흰 공의 개수는 43이고 검은 공의 개수는 7이다.
그러므로
$$q=\frac{{}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_1\times{}_{43}\mathrm{C}_1}{{}_{50}\mathrm{C}_2}=\frac{7\times6+7\times43\times2}{50\times49}$$
$$=\frac{3+43}{25\times7}=\frac{46}{175}$$
따라서 $175q=46$

미적분
[출제자 : 황보백 010-5673-8601]

16) 정답 ①
곡선 $y=x\sin x$와 직선 $y=k(x-\pi)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하면
$B+C=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$, $A+C=\int_0^{\pi}k(x-\pi)\,dx$이다.



따라서
$$B-A=(B+C)-(A+C)$$
$$=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx-\int_0^{\pi}k(x-\pi)\,dx$$
이때,
$$\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$
$$=\Big[x(-\cos x)-(-\sin x)\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi$$
$\int_0^{\pi}k(x-\pi)\,dx=\left[\frac{k(x-\pi)^2}{2}\right]_0^{\pi}=-\frac{k\pi^2}{2}$이므로
$$B-A=\pi+\frac{k\pi^2}{2}=\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{k\pi^2}{2}=-\frac{5\pi}{6}$$
$$\therefore\ k=-\frac{5}{3\pi}$$

17) 정답 ③
주어진 조건에 의해
방정식 $x+t=e^x$의 해가 $x=f(t)$이므로
$e^{f(t)}=f(t)+t$이고 양변 t에 관해 미분하면
$f'(t)e^{f(t)}=f'(t)+1$ ……㉠
이고, $f(\alpha)=1$이므로 ㉠에 $t=\alpha$를 대입하면
$$f'(\alpha)e=f'(\alpha)+1$$
$$\therefore\ f'(\alpha)=\frac{1}{e-1}$$

18) 정답 ⑤
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x=0$에서 연속이다. → $0=\int_{\ln3}^{0}f(t)dt$
따라서
$$\int_0^{\ln3}(ae^t+be^{-t})dt=\Big[\ ae^t-be^{-t}\ \Big]_0^{\ln3}$$
$$=3a-\frac{1}{3}b-(a-b)=2a+\frac{2}{3}b=0$$
$$\therefore\ b=-3a$$
$$g'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & (x<0)\\ f(x) & (x>0)\end{cases}$$
에서 $x=0$에서 미분가능하므로 $f(0)=1$이다.
$\therefore\ a+b=1$
따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이다.
$$f(x)=-\frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$$
$f'(x)=-\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}e^{-x}$에서 $f'(0)=-2$

19) 정답 ③
$y'=e^x$이므로 점 A를 지나는 접선의 방정식은
$y=e^t(x-t)+e^t$이다.
$y=0$일 때, $e^tx=te^t-e^t$, $x=t-1$이므로
$\mathrm{B}(t-1,\ 0)$이다.
점 A를 지나는 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)+e^t=-\dfrac{1}{e^t}x+\dfrac{t}{e^t}+e^t$이므로

$C\left(0,\ \dfrac{t}{e^t}+e^t\right)$이다.

$D(f(t),\ 0)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이가 같기 위해서는 두 직선 BC와 AD가 평행해야 한다. …… ㉠

직선 BC의 기울기는 $\dfrac{-\dfrac{t}{e^t}-e^t}{t-1}=-\dfrac{e^{2t}+t}{e^t(t-1)}$

직선 AD의 기울기는 $\dfrac{-e^t}{f(t)-t}$

따라서

$\dfrac{-e^t}{f(t)-t}=-\dfrac{e^{2t}+t}{e^t(t-1)}$

$\dfrac{1}{f(t)-t}=\dfrac{e^{2t}+t}{e^{2t}(t-1)}$

$f(t)-t=\dfrac{e^{2t}(t-1)}{e^{2t}+t}$

$\therefore\ f(t)=\dfrac{e^{2t}(t-1)}{e^{2t}+t}+t$

$f(t)-1=\dfrac{e^{2t}(t-1)}{e^{2t}+t}+t-1$이므로

$\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{f(t)-1}{t-1}$

$=\lim\limits_{t\to1+}\left(\dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+t}+\dfrac{t-1}{t-1}\right)$

$=\dfrac{e^2}{e^2+1}+1$

$=\dfrac{2e^2+1}{e^2+1}$

[참고] - ㉠

㉠을 삼각형의 등적변형이라 한다.

20) 정답 68

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(2-i)\right\}^n=a_n+b_n\times i$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}(2-i)\right\}^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\times i$이고

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}(2-i)\right\}^{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(n+1)^2}(2-i)^{n+1}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n^2+2n+1}(2-i)^{n+1}$

$=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(2-i)\right\}^n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}(2-i)$

$=(a_n+b_n\times i)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}(2-i)$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}\{(2a_n+b_n)+(-a_n+2b_n)\times i\}$

이므로

$a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}(2a_n+b_n),\ b_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}(-a_n+2b_n)$ …… ㉠

㉠의 두 식을 곱하면

$a_{n+1}b_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n+2}(2a_n+b_n)(-a_n+2b_n)$

이므로

$p_n=\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{(2a_n+b_n)(a_n-2b_n)}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n+2}=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ …… ㉡

㉠의 두 식의 양변을 각각 제곱하면

${a_{n+1}}^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n+2}(2a_n+b_n)^2,\ {b_{n+1}}^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n+2}(-a_n+2b_n)^2$

이고

${a_{n+1}}^2-{b_{n+1}}^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n+2}\{(2a_n+b_n)^2-(-a_n+2b_n)^2\}$

$=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2n+1}(3a_n-b_n)(a_n+3b_n)$

이므로

$q_n=\dfrac{{a_{n+1}}^2-{b_{n+1}}^2}{(3a_n-b_n)(a_n+3b_n)}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2n+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4p_n+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n-1}}{q_n+\left(\dfrac{1}{32}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4\times\left\{-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n\right\}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n-1}}{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n+\left(\dfrac{1}{32}\right)^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{16}\right)^n+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n-1}}{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n+\left(\dfrac{1}{32}\right)^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+16}{\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{16}{32}\right)^n}$

$=\dfrac{1+16}{\dfrac{1}{4}+0}$

$=68$

기하

[출제자 : 황보백 010-5673-8601]

16) 정답 ⑤

한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=0$이므로

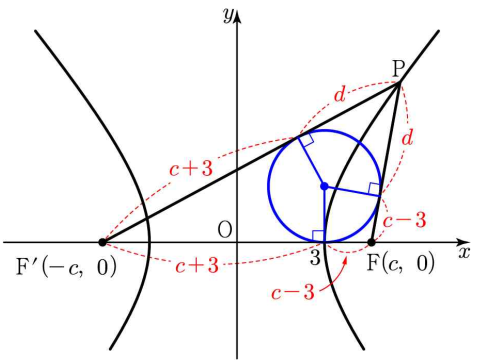
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$

$=|\vec{0}+\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

17) 정답 ②

초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$, 제 1사분면의 쌍곡선위의 점 P라 하면, 내접원의 중심의 좌표가 3이고 x축과 접하므로

다음 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{PF'}}=d+c+3$, $\overline{\mathrm{PF}}=d+c-3$ ($\because$ 접선의 길이는 같으므로)

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=6$

18) 정답 ③

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C가 두 직선 $x=-p$, $y=-p$에 모두 접하므로 점 P의 좌표는 $(r-p,\ r-p)$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(r-p,\ r-p)$는 포물선 $y^2=8px$ 위의 점이므로

$(r-p)^2=8p(r-p)$

$r^2-2pr+p^2=8pr-8p^2$

$r^2-10pr+9p^2=0$, $(r-p)(r-9p)=0$

이때 $r-p>0$이어야 하므로 $r=9p$

$\mathrm{P}(8p,\ 8p)$이고 포물선의 준선은 $x=-2p$이다.

그런데 원 C의 넓이가 81π이므로

$(9p)^2\pi=81\pi$, $p^2=1$

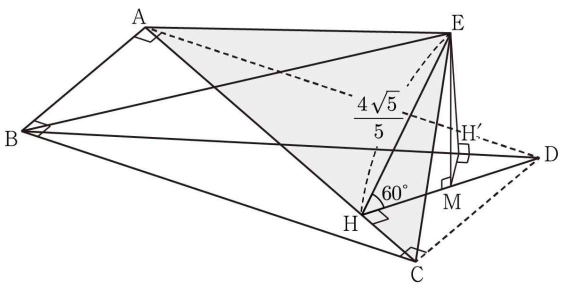
$p=1$

따라서 $\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{PF}}=2p+r=2p+10p=12p=12$

19) 정답 ①

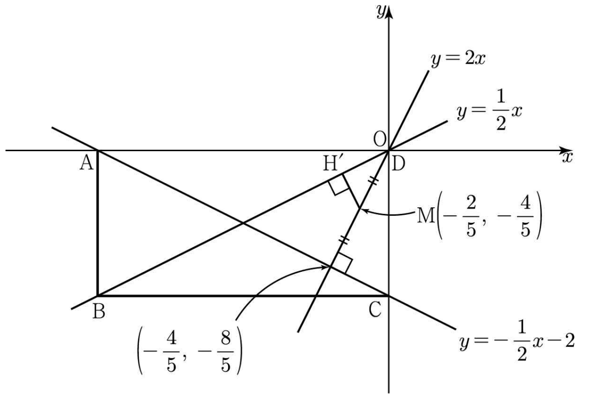
구 위에 직사각형ABCD에서 D에서 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DH}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$이다. 사각형 ABCD와 점 E, $\angle\mathrm{EHD}=\dfrac{\pi}{3}$을 단순화하여 그리면 아래와 같다.

원 O 위의 점 E에서 직선 BD까지의 최단거리를 구해야 하므로 점 E에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 내린 수선의 발을 H′라 하면 아래 그림과 같다.



여기서 $\overline{\mathrm{EH'}}$가 최단 거리가 된다. 일단 $\angle\mathrm{EHD}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 점 E에서 $\overline{\mathrm{DH}}$에 내린 수선의 발을 M이라 할 때, M은 $\overline{\mathrm{DH}}$의 중점에 떨어지게 되고, M에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 수선의 발을 내리면 점 H′이므로 $\overline{\mathrm{EH'}}^2=\overline{\mathrm{MH'}}^2+\overline{\mathrm{EM}}^2$이 성립함을 알 수 있다.

직사각형의 점 D를 원점 O로 좌표평면에 표현하면 아래와 같다.



직선 AC의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$이고 점 O(=D)를 지나는 수선은 $y=2x$가 된다. 두 직선의 교점은 $\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{8}{5}\right)$이므로 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$이다.

직선 OB와 점 M사이의 거리를 구해보자. 직선 OB : $x-2y=0$, $\mathrm{M}\left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{MH'}}=\dfrac{\left|-\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{5}\right|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$이다.

또, $\overline{\mathrm{EM}}$은 $\triangle\mathrm{EHM}$에서 $\angle\mathrm{EHM}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{EM}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$이다.

$\overline{\mathrm{EH'}}^2=\overline{\mathrm{MH'}}^2+\overline{\mathrm{EM}}^2$에 대입해보면

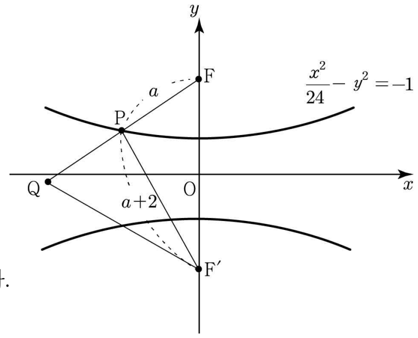
$\overline{\mathrm{EH'}}^2=\dfrac{36}{125}+\dfrac{12}{5}$

$\overline{\mathrm{EH'}}^2=\dfrac{36}{125}+\dfrac{300}{125}=\dfrac{336}{125}$

$\overline{\mathrm{EH'}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{5\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{105}}{25}$이다.

20) 정답 24

아래 그림과 같이 선분 FP의 길이를 a라 하였을 때, 선분 PF′의 길이는 $a+2$이다.



또한, $c^2=1+24$에서 $c=5$이므로 $|\overline{\mathrm{FF'}}|=|\overline{\mathrm{F'Q}}|=10$이다.

따라서 삼각형FQF′은 이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$에서 $\angle\mathrm{FPF'}=90^\circ$임을 알 수 있다. 따라서 $a=6$이므로 $\triangle\mathrm{PQF'}$의

넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times8=24$이다.