제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{-\frac{4}{3}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{-\frac{4}{3}} \times 4^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 6x^2 - 4$

$f'(1) = 6 - 4 = 2$

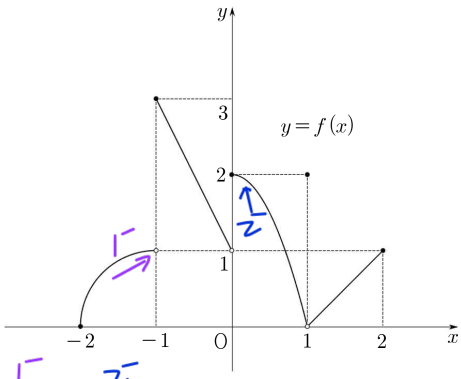
3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3,\ a_2 = 6$ 일 때, a_3 의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$

$a_3 = a_2 r = 6 \times 2 = 12$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



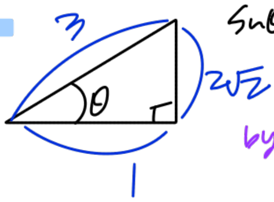
$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin^2\theta = \frac{8}{9}$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① 그려보면

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

by ① $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

6. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 5, \quad f(1) = 10$$

일 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx = \left[x^3 + 2x^2 + 5x\right]_0^1$

$= 1 + 2 + 5 = 8$

이므로 $f(0) = f(1) - 8 = 10 - 8 = 2$

7. 두 상수 a, $b\,(b>0)$가

$$a = \log_2 b, \quad b^b = 8$$

을 만족시킬 때, $a \times b$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^a = b$, $b^b = 2^3$

양변 a제곱

대입

$b^{ab} = (2^a)^3$

$b^{ab} = b^3$ 이므로 $ab = 3$

8. 다항함수 $f(x)$와 상수 k가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^2 + x + k$$

를 만족시킬 때, $f(k)$의 값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

x에 대입: $0=1+1+k \rightarrow k=-2$

미분: $f(x)=2x+1$

$f(-2)=2(-2)+1=-3$

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k-2)=3$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(k^2-a_k)$의 값은? [3점]

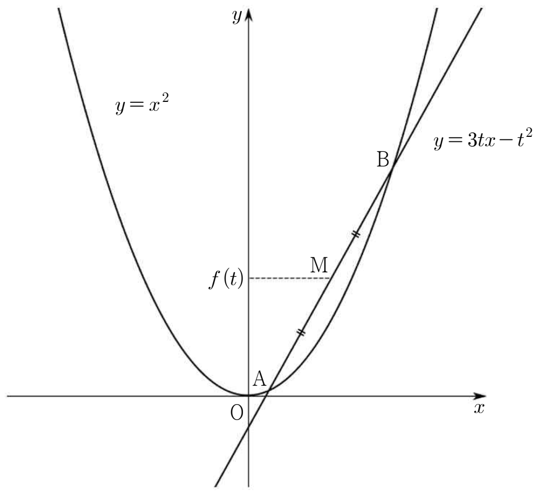
① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

$\sum_{k=1}^{5} a_k = x$라 두면

$x-10=3 \rightarrow x=13$

$\frac{5\times6\times11}{6}-13=55-13=42$

10. 그림과 같이 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=3tx-t^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점을 M이라 하고, 점 M의 y좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^2}$의 값은? [3점]



① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$x^2=3tx-t^2 \xrightarrow{\text{연립}} x^2-3tx+t^2=0$

두근 α, β이라 두면 $\alpha+\beta=3t$, $\alpha\beta=t^2$

$M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

$\alpha+\beta = 3t$, $\frac{1}{2}\left((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right)=\frac{7t^2}{2}$

$f(t)=\frac{7t^2}{2}$ 이므로 $\frac{7}{2}$

11. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$(a_2)^2-8=a_1+a_3,\quad a_3<0$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

등차중항

$a_2^2-8=2a_2 \to a_2^2-2a_2-8=0$

㉠ $a_2=4$ or -2

by + ㉠

$a_1=2,\ a_2=4$ 일때 $a_3=6$ 모순!

공차: 2

$a_1=2,\ a_2=-2$ 일때 $a_3=-6$

공차: -4

$a_4=-10$

12. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-8t$$

이다. 시각 $t=k\,(k>0)$에서의 점 P의 가속도가 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도의 4배일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

속도 $x'(t)=3t^2-2t-8=(t-2)(3t+4)$

$x'(2)=0$

가속도 $x''(t)=6t-2$

$x''(k)=4\times x''(2)$

$6k-2=4\times(12-2)$

$6k=42 \to k=7$

13. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(2^n-6)(n-6)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{8} f(n)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$x^n=(2^n-6)(n-6)$

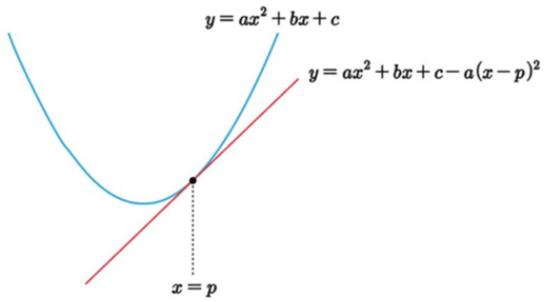
n	2	3	4	5	6	7	8
$(2^n-6)(n-6)$	+	−	−	−	0	+	+
$f(n)$	2	1	0	1	1	1	2

by $2+1+0+1+1+1+2=8$

14. 최고차항의 계수가 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 원점을 지나는 직선 l이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 각각 두 점 $\mathrm{A}(1, f(1))$, $\mathrm{B}(2, g(2))$에서 접한다. ㉠ $f'(3)=2$일 때, $g(6)$의 값은? [4점]

① 1 ② 4 ③ 7 ④ 10 ⑤ 13

[이차함수의 접선 구하기]



이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 위의 $x=p$에서의 접선의 방정식은 $y=ax^2+bx+c-a(x-p)^2$이다.

[증명]

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$, 직선 $g(x)=ax^2+bx+c-a(x-p)^2$라 하면

두 식을 변변차하면 $f(x)-g(x)=a(x-p)^2=0$으로 중근 p를 갖는다.

따라서 직선 $g(x)$는 $x=p$에서 $f(x)$에 접한다.

by 직선 l: $y=mx$

$mx=f(x)-(x-1)^2 \rightarrow f(x)=(x-1)^2+mx$

by ㉠ $2=2(3-1)+m$

㉡ $m=-2$

$mx=g(x)-(x-2)^2$

by ㉡ $g(x)=(x-2)^2-2x$

$g(6)=16-12=4$

15. 상수 $a\,(a>0)$에 대하여

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin x$가 있다.

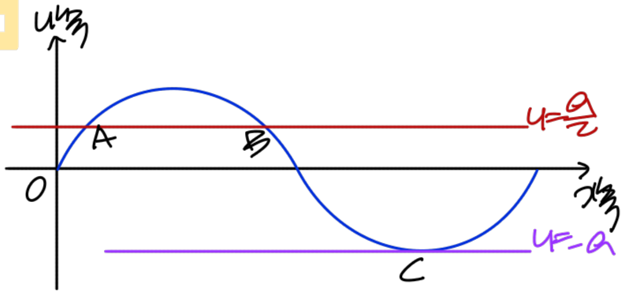
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{a}{2}$가 만나는 두 점을 A, B,

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 만나는 점을 C라 하자.

$\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이고 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$ ② $\frac{1}{4}\pi^2$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$ ④ $\frac{1}{2}\pi^2$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$

by



점A$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{a}{2}\right)$. 점B$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{a}{2}\right)$ 점C$\left(\frac{3\pi}{2}, -a\right)$

by

OA 기울기 × OC 기울기 = −1

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\pi}{6}} \times \frac{-a}{\frac{3\pi}{2}} = -1$$

$$a^2 = 2\times\frac{\pi^2}{4} \xrightarrow{(a>0)} a=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times BA \times \left(\frac{a}{2}+a\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{6}\times\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

16. 삼차함수 $f(x)$와 상수 k에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=4,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x-k)}{f(x)}=0$$

일 때, $f(k)$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f(x)-2x = ax^3+4x^2$

㉠ $f(x)=ax^3+4x^2+2x$

+ ㉠ $f(0)=0$ 이므로 $f(-k)=0$

로피탈: $x\to 0$ $\frac{f'(x-k)}{f'(x)}=0$

$f''(0)\neq 0$ 이므로 $f'(-k)=0$

by + ㉠ : $x=-k$ 중근!

$f(x)=a(x+k)^2\times x = ax\left(x^2+\frac{4x}{a}+\frac{2}{a}\right)$

중근 $D=0$ $\left(\frac{4}{a}\right)^2-\frac{8}{a}=0$

이므로 $a=2$

$(x+k)^2=(x^2+2x+1)=(x+1)^2$

이므로 $k=1$

$f(k)=f(1)=2\times(1+1)^2\times 1=8$

17. $0 \le x \le 2\pi$ 에서 방정식

$$-2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하자. $\frac{\alpha}{\beta}$의 값은? [4점]

① $\frac{6}{23}$ ② $\frac{7}{23}$ ③ $\frac{8}{23}$ ④ $\frac{9}{23}$ ⑤ $\frac{10}{23}$

$x-\frac{\pi}{4}=\theta$ 라 두면

ㄱ $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{7\pi}{4}$ 이고 $x+\frac{\pi}{4}=\theta+\frac{\pi}{2}$ 이다.

$-2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+3\cos\theta=0$

$-2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$

$-2+2\cos^2\theta+3\cos\theta=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

실근은 θ가 아니라 x이다.

$\theta=\cancel{-\frac{\pi}{3}},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \cancel{-\frac{5\pi}{3}}\ \cdots$ by ㄱ

$x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$

$\alpha=\frac{7\pi}{12},\ \beta=\frac{23\pi}{12}$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{7}{23}$

18. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x\le 0)\\ f(x+3) & (x>0)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

$x=0$에서 연속이므로 $-f(0)=f(3)$

$x\le 0$ 일때 $-f(x)\ge 0 \rightarrow f(x)\le 0$

↳ $f(0)=0$ 생각

$x>0$ 일때 $f(x+3)\ge 0$

↳ $x>3$ 일때 $f(x)\ge 0$

최솟값이 0으로 존재하니깐, $f(3)=0$ 생각!

+ : $f(x)=(x-0)^2(x-3)^2$

$g(1)=f(4)=16\times1=16$

19. 첫째항이 -10이고 다음 조건을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값의 합은? [4점]

↳ 여러개 존재 가능하다는 뜻!

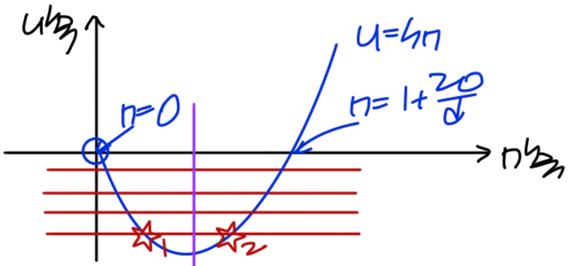
①

> 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 4이다.

① 76 ② 80 ③ 84 ④ 88 ⑤ 92

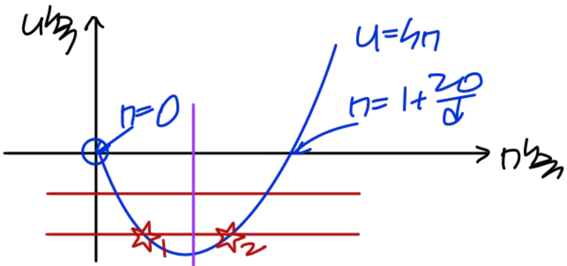
㉠ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{d}{2}n^2 + \left(-\frac{d}{2} - 10\right)n$

만족하는 그래프 그리기



$n = \frac{1}{2} + \frac{10}{d}$ 대칭축

☆1$=m$, ☆2$=n$ 이라두면 위 그래프는 $(m,n)=4\times2=8$개! 이므로 기각!



$n = \frac{1}{2} + \frac{10}{d}$ 대칭축

4개 존재하므로 ☆1$=2$, ☆2$=3$ 이다

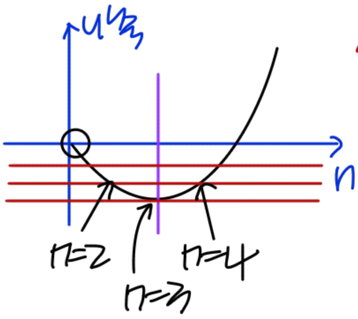
대칭성에 의해 $1+\frac{20}{d}+0=2+3$ 이다.

↳ ㉡ $d=5$

by ㉠.㉡

$S_n = \frac{5}{2}(n)(n-5)$ $S_8 = 20\times3 = 60$

by ① : 아래 그래프 생각!



$S_n = \frac{d}{2}n(n-6)$

$S_1 = -10$ 이므로 $d=4$

$S_8 = 2\times8\times2 = 32$

by 답: 92

20. 상수 $a\,(a\neq0)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) $\{x \mid f(x)=1,\ x$는 실수$\} = \{x \mid \alpha \le x \le \beta\} \cup \{4\}$

0과 a가 아닌 모든 실수 t에 대하여

$$f'(t)\times\left(f'(t)-3t^2+6t+9\right)=0$$

일 때, $f(x)=-6$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 S라 하자. $f(S+1)$의 값은? (단, $\alpha<\beta<4$) [4점]

㉠

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

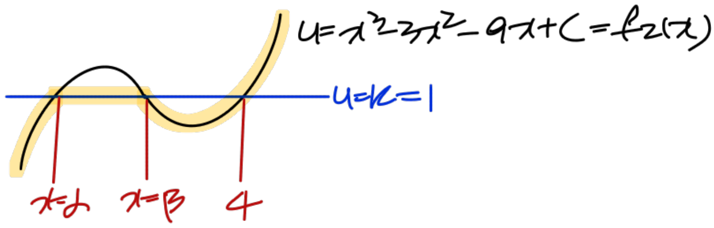
$t\neq0, a$에서 $f'(t)=0$ or $f'(t)=3(t-3)(t+1)$

$f_1(t)=k$ or $f_2(t)=t^3-3t^2-9t+C$

↳ 상수는 여러개 가능: $f_1(x)=2, 3, 4$ 등등!

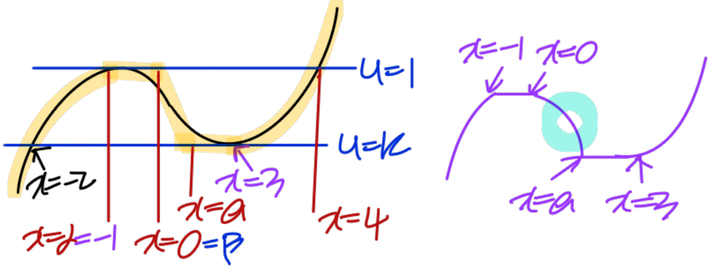
$x=0, a$에서 첨점! 좌.미.계 ≠ 우.미.계

만족하는 그래프 그리기



$f_2(4)=1$ 이므로 $64-48-36+C=1 \to C=21$

$f_2(0)=21$ 이므로 $f(\alpha=0)=1$ 모순!



$f_2(x)=x^3-3x^2-9x+21$ 이고

$k=f_2(3)=27-27-27+21=-6$

by $f_2(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f_2(a)=-6$이므로 $a^3-3a^2-9a+7=0$

$h(a)$ 에서 $h(0.6)>0$, $h(0.7)<0$ 이므로 $0.6<a<0.7$ 이다.

$S=-2+1+2+3=4$

이므로 $f(S+1)=f(5)=5^3-3\times5^2-9\times5+21=26$

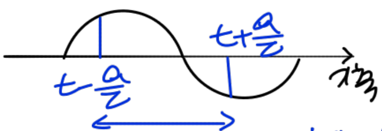
21. 두 양수 a, $b\,(b>2)$에 대하여 함수 $f(x)=9\sin\dfrac{\pi}{a}x+b$가 있다. 실수 t에 대하여 닫힌구간 $\left[t-\dfrac{a}{2},\ t+\dfrac{a}{2}\right]$에서의 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> (가) $0<t<b$에서 $g(t)=9\cos\dfrac{\pi}{a}t+b$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 범위는 $1\le t\le 2$이다.
>
> (나) 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 -18이다.

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

생각: $f(x)$ 주기 따라서 $2\pi \div \frac{\pi}{a} = 2a$

$t-\frac{a}{2}\le x\le t+\frac{a}{2}$ 는 a구간에서 함수 값 체크!



a구간 에서의 최솟값을 $g(t)$라 정의

$\frac{\pi}{a}t=u$ 로 치환하면

a구간은, $y=\sin u$ 에서 구간 π 만큼 생각!

$t-\frac{a}{2}\le x\le t+\frac{a}{2} \to \theta-\frac{\pi}{2}\le u\le \theta+\frac{\pi}{2}$ 변환의미

즉, $y=\sin u$ 에서 $\left[\theta-\frac{\pi}{2},\ \theta+\frac{\pi}{2}\right]$ 안에서의 최솟값을 구하는 것과 같다.

따라서 가능한 최솟값은

$$\min(\sin u)\begin{cases} -1 & \text{: 구간이 } -1\text{을 포함} \\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \text{ or } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) & \text{미포함} \end{cases}$$

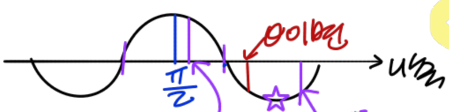
$-\cos\theta$ or $\cos\theta$ 이므로 $|\cos\theta|$

따라서

$$g(t)=b+9\times\min(\sin u)\begin{cases} b-9 & (-1\text{ 포함}) \\ b-9|\cos\theta| & (\text{미포함}) \end{cases} \qquad \theta=\frac{\pi t}{a}$$

최소가 $b-9|\cos\theta| = b-9\cos\theta$ 이므로 $\cos\theta\le 0 \to \frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$ 인데 -1을 포함하는 구간을 배제해야한다. 만족하는, θ는 $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$

구간의 길이 $\frac{\pi}{2}$



$\theta-\frac{\pi}{2}$　$\theta+\frac{\pi}{2}$ 에서 ☆$=-1$ 포함!

by $1\le t\le 2$에서 구간의 길이 $1=\frac{2a}{4} \to a=2$

최대 b ($|\cos\theta|=0$ 일때) 이므로 최소 $b-9$

$b\times(b-9)=-18 \to b=3$ or 6

모순인 이유: 주기가 $2a=4$라서

(가): $1\le t\le 2$에서 $5\le t\le 6$ 이 더 존재하는!

단답형

22. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{4x+1}-3}$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x^2-4}^{\,x+2}}{\cancel{4x-8}_{\,4}}\times\left(\sqrt{4x+1}+3\right)$$

$$=\frac{4\times(3+3)}{4}=6$$

23. 방정식 $\log_3(x-2)=\log_9(8x-7)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

진수 $x-2>0 \to x>2$
$8x-7>0 \to x>\frac{7}{8}$　㉠ $x>2$

식정리: $(x-2)^2=8x-7$

$x^2-12x+11=0$

$x=11$, $\cancel{1}$ by ㉠

24. 상수 a에 대하여

$$\int_{-2}^{2} ax^2\,dx = 36 + \int_{1}^{2} 2ax^2\,dx$$

일 때, a의 값을 구하시오. [3점]

$$2\times\frac{a}{3}x^3\Big]_0^2 = 36 + \frac{2a}{3}x^3\Big]_1^2$$

$$\frac{16a}{3} = 36 + \frac{16a}{3} - \frac{2a}{3}$$

이므로 $\frac{2a}{3} = 36 \rightarrow a = 54$

25. 함수 $f(x) = 2^{x-1} + 3$에 대하여 곡선 $y = f(x)$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프가 곡선 $y = 4 \times f(x)$와 일치할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

$y = 2^{x-p-1} + 3 + q$

$y = 4f(x) = 2^{x+1} + 12$

같으므로 $p = -2$, $q = 9$

이므로 $p + q = 7$

26. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $F(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$3F(x) = xf(x) + 2x^2 + 3$$

을 만족시킨다. ㉠ $F(1) = 5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$F'(x) = f(x)$

by ㉠ x에 대입 : $15 = f(1) + 5 \rightarrow f(1) = 10$

미분: $3f(x) = f(x) + xf'(x) + 4x$

㉡ $2f(x) = xf'(x) + 4x$

$x = 0$ 대입: $f(0) = 0$

$f(x) = ax^n \cdots$ 라두면 (최고차항만 생각!)

$2ax^n = nax^n$ 이므로 $n = 2$

by $f(x) = ax^2 + (10 - a)x$

㉡대입 $2ax^2 + (20 - 2a)x = 2ax^2 + (14 - a)x$

에서 $20 - 2a = 14 - a \rightarrow a = 6$

대입

$f(2) = 4a + 20 - 2a = 20 + 2a = 32$

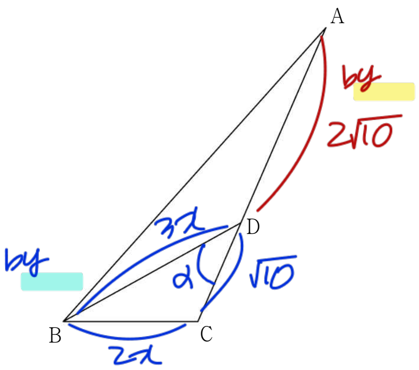
27. 그림과 같이 $\angle C > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 할 때,

① $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\cos(\angle BDC) = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\overline{BC} : \overline{BD} = 2 : 3$, $\overline{CD} = \sqrt{10}$

α

이다. 삼각형 ABD의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



△BCD cos법칙

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{9x^2+10-4x^2}{2\times3x\times\sqrt{10}}$

$60x = 20x^2+40 \rightarrow x^2-3x+2=0$

㉠ $x = 1$ or 2

$\cos C = \frac{10+4x^2-9x^2}{2\times2x\times\sqrt{10}} < 0$ 이므로 by ㉠ $x=2$

△ABD cos법칙!

$AB^2 = BD^2+DA^2-2BD\times DA\times\cos(\pi-\alpha)$

$AB^2 = 36+40-2\times6\times2\sqrt{10}\times\frac{-\sqrt{10}}{4}$

$= 76+60 = 136$

$AB = 2\sqrt{34}$

△ABD sin법칙

$\cancel{2}R = \frac{AB}{\sin(\pi-\alpha)} = \cancel{2}\sqrt{34}\times\frac{4}{\sqrt{6}}$

$\pi R^2 = 34\times\frac{16}{6} = \frac{272}{3}\pi$

28. 모든 항의 계수가 정수이고 상수항이 자연수인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(0)+g(0)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

> ㉠ $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{x-n}$ 의 값과 ㉡ $\lim_{x\to n}\frac{(g(x))^2\times(x-2)}{(x-n)^{n-1}}$ 의 값이 모두 존재하고 그 값이 모두 0이 아니도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은 8이다.

㉠ $f(n)=0$ 이고 $f'(n)\neq0$ 이중근, 이상 안됨!

㉡ $n=1$ 일때 만족! $g(1)\neq0$

$n=2$ 일때, $\frac{g(x)^2\times(x-2)}{(x-2)^1}\neq0$ 이므로, $g(2)\neq0$ 일때 만족

$n\geq3$ 일때 $g(n)=0$ 이고 약분하고 가지려면 k중근이라 하면 $\frac{(x-n)^{2k}}{(x-n)^{n-1}}$ 에서 $2k=n-1$

by $k=1,2,3$ 가능! $n=3,5,7$ 가능

by 케이스 분류

① $n=1,2,5$ 일때

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)$

$g(x)=(x+a)(x-5)^2$ (a는 정수 이지만 상수항 자연수 이므로 $a>0$)

$f(0)=10$, $g(0)=25a\geq25\times1=25$ 이므로

$f(0)+g(0)=35$ 최소

② $n=1,7$ 일때

$f(x)=(x-1)(x-7)(x+a)$ (a는 자연수)

$g(x)=(x-7)^3$

$f(0)=7a\geq7\times1=7$, $g(0)=7^3$

③ $n=3,5$ 일때

$f(x)=(x-3)(x-5)(x+a)$ (a 자연수)

$g(x)=(x-3)(x-5)^2$

$f(0)=15a\geq15$, $g(0)=75$

29. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

㉠

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n-n+1}{2} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\ a_n+n & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=55$이도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

예비해결

by ㉠: k는 자연수!

$a_n \begin{cases} 2a_{n+1}+n-1 & (a_n=3k) \\ a_{n+1}-n & (a_n\neq 3k)\end{cases}$

필지성 나열

a_7: 55

3배수 / 3배수 X

a_6: ~~115~~ 49

a_5: 102 44

a_4: 207 98 ~~91~~ 40

a_3: ~~416~~ ~~204~~ 198 95 ~~82~~ 37

a_2: ~~397~~ 196 ~~191~~ ~~93~~ 75 35

a_1: ~~392~~ ~~195~~ 150 74 ~~70~~ 34

답: 150+74+34=258

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\le a)\\ \displaystyle\int_x^b f(a-t)\,dt & (x>a)\end{cases}$$

"(가)"라 두면

$H(b)-H(x) \xrightarrow{\text{미분}} -h(x)=-f(a-x)$

는 $x=a$에서만 극값을 갖는다. $g(a)=-\dfrac{1}{3}$일 때, $a\times f(2a)$의 값을 구하시오. [4점]

$x=a$ 연속: ① $\int_0^a f(t)dt=\int_a^b f(a-t)dt$

$x=a$ 미분가능: $g'(x)\begin{cases} x<a\text{일 때} & f(x)\\ x>a\text{일 때} & -f(a-x)\end{cases}$

$g'(a^+)=g'(a^-)$에서 ㉠ $-f(0)=f(a)$이다.

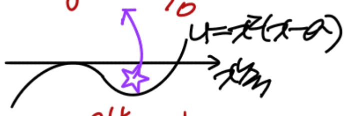
+㉠ $g'(a)=f(a)=0$ 이므로 $f(0)=0$

$a>0$이면 $g'(x)=f(x)$ $(x<a)$에서 $x=0$ 극값 가지면 안되므로 $f'(0)=0$ (이중근!)

$f(x)=x^2(x-a)$

$g(a)=\int_0^a x^2(x-a)dx=-\frac{1}{12}(a-0)^4=-\frac{a^4}{12}$

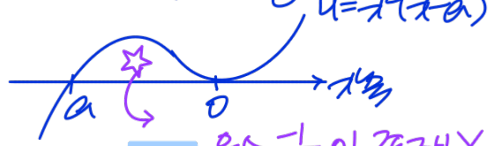
삼차함수 넓이 공식



$-\frac{a^4}{12}=-\frac{1}{3}$ 이므로 $a^4=4 \rightarrow a=\sqrt{2}$

$af(2a)=4a^4=16$

참고: a가 음수이면



음수 $-\frac{1}{3}$이 절대 X. 모순!

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.