TEAM METIS
2026 수능 주요문항 분석 칼럼

칼럼에 대해 궁금한 점이 있으시거나
지금까지와 앞으로의 TEAM METIS의 활동을 보고 싶으시다면

https://cafe.naver.com/metis1005
위 링크에서 METIS 카페에 가입해보세요.

14번 문항

올해 사인법칙과 코사인법칙을 주 소재로 출제된 4점 문항인 6평 14번, 9평 20번 문항들에 비해 이번 수능 문항의 체감 난이도는 더 높았을 것으로 보입니다. 아무래도 9~13번 문항들의 난이도가 쉬운 편이었기에 변별력을 확보하기 위한 것으로 보입니다. 또한, 이 유형의 문제 자체를 두려워하는 학생들이 많기 때문에, 평가원은 일부러 도형의 모양을 특이하게 하고 문제 발문도 길게 만들어 문제의 겉보기 난이도를 올렸습니다.

그러나, 풀이 과정에서 필요한 논리는 정말 단순히 사인법칙과 코사인법칙뿐입니다. 중학 과정에서 배우는 원주각 개념이나 "원에 내접하는 사각형의 마주보는 내각의 합은 180도" 같은 명제도 전혀 쓰이지 않고, 필요한 발상은 보조선 EG를 긋는 것 정도였습니다. 오히려 너무 복잡하게 생각한 학생들이 문제의 자연스러운 흐름을 놓치고 틀렸을 수도 있겠습니다만, 이것도 실력이겠죠.

실제 현장에서 학생들이 했어야 하는 사고의 핵심은 **"찾아야 하는 답에 집중하기"** 였습니다. 복잡해 보이는 그림에서도 결국 필요한 건 선분 GH의 길이였고, 따라서 자연스럽게 아래 두 가지 길을 통해 답이 나올 것을 염두에 두고 문제를 풀었으면 더 잘 풀렸을 것입니다.

1. 삼각형 CGH에서 선분 CG와 CH의 길이를 알고 끼인각($\angle HCG$)의 코사인값으로 코사인법칙 이용하기
2. $\angle HCG$의 사인값과 외접원의 반지름을 파악해 사인법칙 이용하기

1번보다 2번이 직관적으로 간단해 보입니다. 어떤 각의 사인값과 코사인값은 사실상 동시에 구해질 수밖에 없고, 2번과 달리 1번은 선분의 길이를 두 개나 알아야 하기 때문입니다. 실제로 이 문제는 삼각형 CGE를 통해 외접원의 반지름을 파악하는 2번 방법으로 푸는 문항이었습니다.

도형 문제를 풀 때는 이렇게 **"내가 구해야 하는 값이 무엇이고, 그 값을 구하려면 직전에 거치는 길이 뭘까?"**를 먼저 생각하면 아무리 어려워 보이는 문항이라도 잘 풀어낼 수 있습니다. 반대로 이걸 잊으면 점 F에 보조선을 긋는 등 쓸데없는 짓을 하며 헤맬 수밖에 없습니다. 이렇게 헤매면 문제를 못 풀어내거나, 설령 문제를 풀더라도 호흡이 길어지기 때문에 전체 시험의 시간 부족이나 불안감 같은 문제가 생길 수 있습니다.

15번 문항

 올해 9평 15번 문항과 비슷한 형식을 띠고 있습니다. 실제로 적분 식 안에 복잡한 함수의 합과 차를 넣어두고, 그 두 함수를 따로 그려서 분석하는 부분은 9평과 동일합니다. 그러나, 수능 문항의 난이도가 훨씬 더 쉽습니다. 실제로 2025/11/21 ebsi 기준 오답률을 비교해보면 9평 77.1%, 수능 61.9%로 매우 큰 차이가 나는 것을 볼 수 있습니다. 그 이유는 9평에서는 **삼차함수가 확정되지 않아** 삼차함수의 개형을 3~4개의 케이스로 분류해 풀이했어야 하지만, 수능 문항은 **일차함수의 기울기의 케이스만 1을 기준으로 분류해** 풀이할 수 있었기 때문입니다. (심지어 눈치 빠른 학생들은 최댓값이 필요하므로 1보다 클 때만 풀어서 답을 도출하고 1보다 작을 때는 고려하지도 않았을 수도 있습니다.)

 물론 $x<-1$인 범위에서 $f(x) \leq g(x)$인 조건을 이용할 때, “이차방정식의 근의 분리” 개념이 필요하다는 점은 매력적입니다. 현 교육과정 밖의 용어이긴 하지만, 이번 교육과정에서도 기출된 바(240613) 있으므로 풀이를 약간 자세히 다뤄보겠습니다.

우선 $x \leq -1$에서 함수 $f(x)=-x^2$이 함수 $g(x)=ax+a$보다 위에 있을 수 없으므로,

$x \leq\ -1$인 모든 실수 x에서 $f(x)-g(x)=-x^2-ax-a \leq 0$, 즉 $x^2+ax+a \geq 0$입니다.

이때 축의 방정식, 즉 $x=-\dfrac{a}{2}$에 대하여 축이 -1이거나 -1보다 오른쪽에 있을 때, $a \leq 2$이고, 이차함수의 개형을 그려보면 $x=-1$일 때 함수 $y=x^2+ax+a$가 최솟값 1을 가지므로 항상 성립합니다.

또한, 축이 -1보다 왼쪽에 있을 때, 즉 $a>2$일 때,

최솟값은 꼭짓점일 때 나타나므로 $x=-\dfrac{a}{2}$를 함수 $y=x^2+ax+a$에 대입 시,

$a-\dfrac{a^2}{4} \geq 0,\ \therefore k=4$임을 알 수 있습니다.

위와 같이 축의 방정식이 문제에서 제시하는 값을 기준으로 왼쪽에 있을 때와 오른쪽에 있을 때를 나누어 근의 개수를 판단하는 것을 “이차방정식의 근의 분리”(정확한 정의는 아님) 라고 생각하시면 편합니다. 이 문제를 학습한 후 꼭 240613도 풀어보시면 큰 도움이 되실 거라 믿습니다.

 또한, 특정 점을 지나는 직선의 기울기를 조정해 가며 곡선과의 교점 개수 문제를 풀어나가는 논리는 평가원 수학 고난도 문제에 정말 자주 나오는 논리입니다. 심지어 이번 수능 미적 30번에도 같은 논리가 쓰였습니다. 그렇기에 기울기가 미정인 직선과 어떤 곡선 사이의 교점을 다루는 문항을 여러 개 풀어보면서, 이 문항 패턴에 익숙해지시면 고난도 문제 풀이 실력 향상에 큰 도움이 될 것입니다.

21번 문항

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<t)\\ f(x) & (x\ge t)\end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

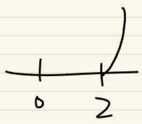
(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다. → $g(0)=0$, $g(2)=0$

(나) $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다. → $g(-1)>0$, $g(1)<0$

조건 만족 m 2개!!

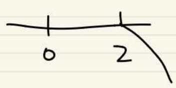
$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq-\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

* (나)조건 만족시키려면 g(x)



이 그림은 (나) 만족 자연수 m이
m이 하나 뿐이라 모순

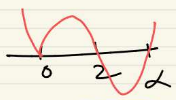
g(x)



이 그림은
(나) 만족 m 무한개 나와서
모순

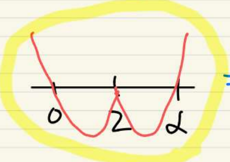
* 즉 g(x)식은 $0<2<\alpha$인 2 α가 존재한다는것을 인지

Case① $t=0$



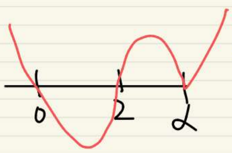
⇒ $g(1)<0$가 아니라 탈락.

case② $t=2$

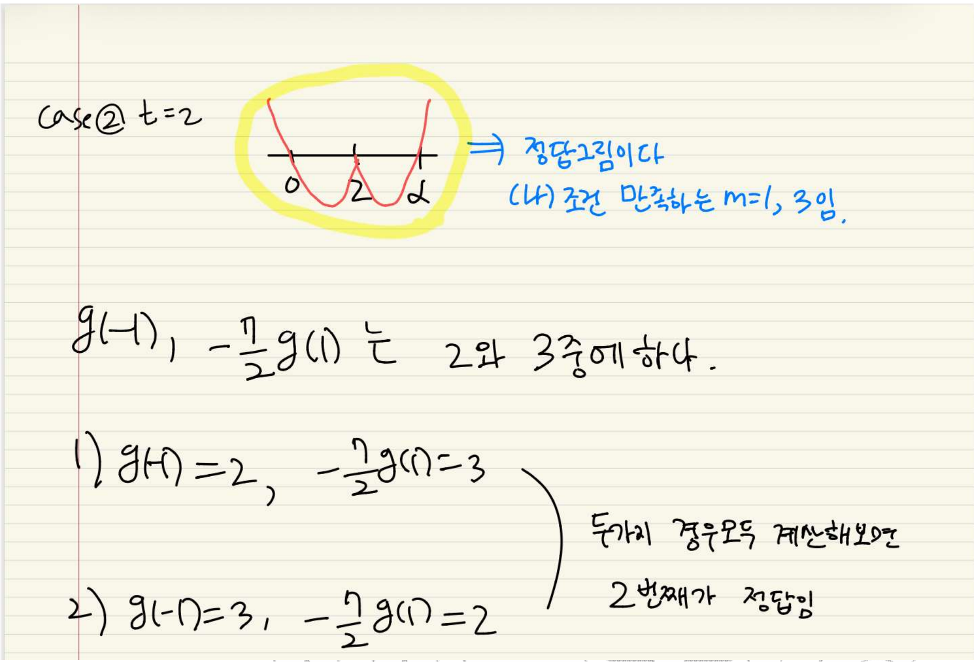


⇒ 정답그림이다
(나)조건 만족하는 $m=2,3$임.

Case③ $t=\alpha$



⇒ (나) 조건 $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$ 이되는 자연수m이 0개라서 탈락



삼차함수 f(x)와 구간별로 정의된 함수 g(x) 의 구조를 해석하고 주어진 극한 조건을 통해 함수값들을 결정해 나가는 과정이 핵심 포인트였습니다.
특히, g(x) 가 x=t 를 기준으로
- 함수의 부호가 바뀌는 지점이 존재하고
- 그 지점에서 연속성을 유지해야 한다는 점
을 이해하는 게 먼저입니다. (가) 조건에서 모든 실수 a에 대해 극한이 존재한다는 것을 보자마자 **f(2)=0** , **f(0)=0**임을 빠르게 얻어내야 합니다.

이 문제를 풀 때 중요한 것은 주어진 조건을 잘 정리하고, 케이스를 나눠 가면서 정답인 그림을 찾는 것입니다. 처음부터 값을 바로 찾는 것에 매달리기보단 조건에서 던져준 정보를 해석하고 삼차함수 그림이 실근을 어디에서 갖는지 케이스를 하나하나 나눠서 판단하는 능력이 요구됩니다.

학생들이 이 문제를 어려워한 이유는 복잡하게 생긴 문제는 아니지만, 처음부터 삼차함수의 그림이 정확하게 그려지지 않고 차분히 케이스를 분류해야 한다는 점에서 풀이 출발점을 잡기가 어려웠기 때문일 겁니다.

함수 조건 문제는 공식 암기가 아니라 일단 조건을 보고 얻어낼 수 있는 정보를 최대한 정리하는 과정이 중요합니다. 이 문제로 예시를 들면
1. "삼차함수는 실근 세 개를 가지겠구나 (0, 2, α). 또 g(x)는 연속이므로 t는 0, 2, α 중에 하나겠구나"라는 생각을 한 후
2. t가 0, 2, α일때 케이스를 각각 나누고 그림도 그려서 정답이 되는 경우를 찾아내기
3. 마지막 계산
의 과정을 거쳐야 하겠죠. 결론은 **함수의 개형이 불확실한 경우에 막무가내로 푸는 것이 아니**

라 차분하게 케이스를 분류하고, 그 과정에서 조건을 최대한 이용하는 것이 핵심이라는 것입니다.

22번 문항

곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\, b)$

=> $b=\log_{16}(8a+2)$, $2a=4^{2b-1}-\dfrac{1}{2}$ $\cdots(1)$

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{A}'(b,\, a)$이 직선 OB 위에 있고

=> $\mathrm{B}(bk,\, ak)$

=> 곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$ 위의 점 B이므로 $ak=4^{bk-1}-\dfrac{1}{2}$ $\cdots(2)$

(1), (2)에 의해 $k=2$, $\mathrm{B}(2b,\, 2a)$

선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{77}{8},\, \dfrac{133}{8}\right)$

=> $a+2b=\dfrac{77}{4}$, $2a+b=\dfrac{133}{4}$

$a=\dfrac{63}{4}$, $b=\dfrac{7}{4}$

$a\times b=\dfrac{16}{441}$, $p+q=441+16=457$

선분 AB의 중점의 좌표 조건 전까지의 풀이를 통해 도출된 조건이 $\mathrm{A}(a,\, b)$이고 $\mathrm{B}(2b,\, 2a)$이므로 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 임의의 점을 직선 $y=x$에 대해 대칭이동한 점의 x좌표와 y좌표를 각각 2배한 점이 곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$을 지남을 알 수 있습니다.

함수 간 관계 파악을 하는 방법 중 하나는 위 문제처럼 **'한 곡선 위의 임의의 점'을 미지수로 놓고 그 점을 평행이동, 대칭이동, 실수배(흔히 말하는 확대-축소)하여 다른 곡선을 지나게 하는 것**입니다. 고1 수학에서도 평행, 대칭이동 시 함수 관점에서의 변화와 좌표(점) 관점에서의 변화를 둘 다 다루는데, **'임의의 좌표(점)'의 관점으로 보는 것이 함수 관점에서 관찰하는 것보다 간편한 경우가 많습니다.** 익혀 둡시다.

확률과 통계 28번 문항

먼저 한 번 던졌을 때 각 눈이 나올 때 상자 2, 3에 들어가는 공의 개수를 정리합니다.
주사위의 눈이 1, 3, 5이면 1·3·5번 상자에만 공 1개씩 넣으므로 상자2는 0개, 상자3은 1개가 들어갑니다.
눈이 2이면 2의 약수인 1, 2번 상자에 공을 넣으므로 상자2는 1개, 상자3은 0개입니다.
같은 방법으로 눈이 4이면 상자2는 1개, 상자3은 0개입니다. 눈이 6이면 상자2는 1개, 상자3은 1개입니다.
또한 한 번에 들어가는 전체 공의 개수는 1·3·5에서 3개, 4에서 3개, 2에서 2개, 6에서 4개입니다. 따라서 한 번 던졌을 때
"전체 공이 홀수 개 들어오는 경우"는 눈이 1, 3, 4, 5일 때이고,
"전체 공이 짝수 개 들어오는 경우"는 눈이 2, 6일 때입니다.
이때 $p = P(1,3,4,5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, q = P(2,6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 입니다.
이제 네 번 시행 전체의 공 개수가 홀수라는 조건에 대해 먼저 계산합니다. 전체 공 개수가 홀수가 되려면 "홀수 개가 들어오는 시행"이 1번 또는 3번 있어야 합니다. 따라서

$$
\begin{aligned}
&P \\
&= {}_4C_1 \cdot p^1 \cdot q^3 + {}_4C_3 \cdot p^3 \cdot q^1 \\
&= 4 \cdot (\frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{3})^3 + 4 \cdot (\frac{2}{3})^3 \cdot (\frac{1}{3}) \\
&= \frac{8}{81} + \frac{32}{81} = \frac{40}{81}
\end{aligned}
$$

입니다.

다음으로 상자2, 상자3에 대한 조건을 세웁니다. 네 번의 시행 중에서
A형: 눈이 1, 3, 5 (상자2는 0, 상자3은 1)
B형: 눈이 4 (공의 개수가 상자2는 1, 상자3은 0)
C형: 눈이 2 (공의 개수가 상자2는 1, 상자3은 0)
D형: 눈이 6 (공의 개수가 상자2는 1, 상자3은 1)
이라고 두고, 네 번 동안 A형이 a번, B형이 b번, C형이 c번, D형이 d번 나왔다고 하겠습니다. 그러면
$a + b + c + d = 4$ 입니다.
이때 상자2에 들어간 공의 수는 $C2 = b + c + d$, 상자3에 들어간 공의 수는 $C3 = a + d$입니다.
조건 "3번 상자의 공이 2번 상자의 공보다 1개 더 많다"는
$a + d = (b + c + d) + 1$ 이므로
$a = b + c + 1$ 이 됩니다.
또한 전체 공의 개수가 홀수라는 조건 B는 "A형과 B형(즉 1,3,4,5)이 나온 횟수 $a + b$가 홀수 (1 또는 3)"라는 뜻입니다. 이 두 조건을 함께 만족시키는 (a,b,c,d)를 모두 찾아 봅니다.
$a = b + c + 1$ 을 전체 횟수 식에 대입하면

(b + c + 1) + b + c + d = 4 이므로
2b + 2c + d = 3, 따라서 d = 3 - 2(b + c) 입니다. d ≥ 0 이어야 하므로 b + c ≤ 1 입니다.
b + c = 0이면 b = 0, c = 0, d = 3, a = 1 이 되어 (a,b,c,d) = (1,0,0,3) 입니다. 이때 a + b = 1 이라서 B 조건(홀수)도 만족합니다.
b + c = 1이면 (b,c) = (1,0) 또는 (0,1) 입니다. d = 3 - 2·1 = 1, a = 2 입니다.
(b,c) = (1,0)이면 (a,b,c,d) = (2,1,0,1)이 되고 a + b = 3 (홀수)라서 가능하고,
(b,c) = (0,1)이면 (a,b,c,d) = (2,0,1,1)이 되어 a + b = 2 (짝수)라서 전체 공 홀수 조건을 만족하지 못하므로 버립니다.
결국 두 조건 A,B를 동시에 만족하는 가능한 경우는
① (a,b,c,d) = (1,0,0,3) : 1,3,5 중 하나가 한 번, 6이 세 번 나오는 경우
② (a,b,c,d) = (2,1,0,1) : 1,3,5 중 둘, 4가 한 번, 6이 한 번 나오는 경우
이 두 가지뿐입니다.
이제 각 경우의 확률을 구합니다. 한 시행에서 A형, B형, C형, D형의 확률은 각각 1/2, 1/6, 1/6, 1/6 입니다.
경우 ① 에서는 A형이 1번, D형이 3번 나와야 합니다.
$P(\textcircled{1}) = 4\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{108}$ 입니다.
경우 ② 에서는 A형이 2번, B형이 1번, D형이 1번 나와야 합니다.
$P(\textcircled{2}) = \frac{4!}{(2!1!1!)}\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{12}$입니다.
따라서 문제의 두 조건을 동시에 만족하는 확률은
$\frac{1}{108}+\frac{1}{12}=\frac{5}{54}$ 입니다.

우리가 구하는 것은 "전체 공의 개수가 홀수라는 조건 아래에서, 3번 상자의 공이 2번 상자보다 1개 더 많을 확률"이므로 조건부 확률
$\frac{\frac{5}{54}}{\frac{40}{81}}=\frac{5}{54}\times\frac{81}{40}=\frac{3}{16}$ 입니다.

이 문항은 겉모습과 실제 난이도의 간극이 큰 문제였습니다. 규칙을 그대로 따라가며 모든 케이스를 전개하는 방식은 금방 막힙니다. 한 번의 시행에서 들어가는 공의 총합, 각 상자별 공의 증감, 홀·짝 조건 등 서로 성질이 다른 요소들이 동시에 얽혀 있기 때문입니다. 즉, 전체 공의 개수를 기준으로 한 큰 구조와, 2번·3번 상자에 들어가는 공의 수를 따지는 미시적인 구조가 따로 존재하고, 두 구조를 어떻게 연결할지 판단하는 과정이 문제 해결의 핵심입니다.
따라서 단순히 규칙을 나열하고 경우를 세는 방식으로 접근하면 중간에 정리가 되지 않으며, 시행을 유형별로 나누고, 전체 공의 홀짝을 이용해 불가능한 경우를 미리 배제하는 등 **계산량을 줄이는 전략적 판단**이 반드시 필요합니다. 이 문제는 이런 '정리 능력'을 가장 강하게 요구하는 유형으로, **조건의 정리 과정에서 논리적 체계를 스스로 세울 수 있는지가 변별력을 결정하는 문항**이라고 할 수 있습니다.

확률과 통계 29번 문항

풀이 과정이 꽤나 정형화되어 있으며 평가원이 최근 자주 보여줬던 패턴을 그대로 따른 문항입니다. 주사위 눈을 기준으로 두 갈래의 시행을 나누고, 그 시행에서 특정 사건이 일어날 확률을 a라는 미지수로 표현한 뒤, 기대값 조건을 이용해 a를 결정하고, 마지막에는 이항분포를 정규분포로 근사하는 구조입니다. 전체 풀이가 정해진 순서대로 흘러가기 때문에, **확률식 정리** →**정규근사**→**표준화**라는 일련의 루틴을 익힌 학생이라면 계산 과정에서 막힐 지점이 거의 없었던 문항이었습니다.

확률과 통계 30번 문항

공이 8개이고 한 주머니에 2개 이하만 넣을 수 있으므로, 공이 들어 있는 주머니는 1개짜리와 2개짜리뿐입니다. (가)에 의해 1개짜리 주머니 수가 4개 또는 6개이므로 두 가지 경우로 나누어 셉니다.

첫째, 1개짜리 주머니가 4개인 경우입니다.
이때 2개짜리 주머니는 2개가 되어 8 = 1+1+1+1+2+2 로 나타낼 수 있고, 공이 들어 있는 주머니는 모두 6개이므로 비어 있는 주머니는 4개입니다. (나)에 의해 2개짜리 주머니의 양옆은 모두 비어 있어야 하므로, 먼저 비어 있는 주머니 4개를 일렬로 두고 그 사이와 양끝에 생기는 5개의 칸에 2개짜리 주머니를 배치한다고 생각합니다. 예를 들어 □□□□ 처럼 빈 주머니 4개가 있을 때, _□_□_□_□_ 에 해당하는 _ 5개의 자리에 2개짜리 주머니를 끼워 넣는 것입니다. 이 5개 자리 중에서 2개를 골라 2개짜리 주머니를 넣는 방법의 수는 ${}_5C_2 = 10$입니다.
이제 남은 것은 1개짜리 주머니 4개를 배치하는 일입니다. 2개짜리 주머니가 들어간 뒤를 생각하면, 1개짜리 주머니는 "첫 번째 2개짜리 앞쪽 구간, 두 2개짜리 사이의 구간, 두 번째 2개짜리 뒤쪽 구간" 이렇게 3개의 구간에만 연속해서 놓일 수 있고, 각 구간에 들어가는 1개짜리 주머니 수를 a, b, c라 두면 a + b + c = 4, a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0 을 만족해야 합니다. 이는 서로 다른 3칸에 1개짜리 4개를 나누어 넣는 중복조합의 경우이므로 ${}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$입니다.
따라서 이 경우에서의 경우의 수는 10 × 15 = 150입니다.

둘째, 1개짜리 주머니가 6개인 경우입니다.
이때 2개짜리 주머니는 1개가 되어 8 = 1+1+1+1+1+1+2 가 되고, 공이 들어 있는 주머니는 7개이므로 비어 있는 주머니는 3개입니다. 마찬가지로 비어 있는 주머니 3개를 일렬로 두고 그 사이와 양끝에 생기는 4개의 자리에 2개짜리 주머니 1개를 넣는다고 생각하면, 2개짜리 주머니의 위치를 정하는 방법의 수는 4입니다.
이제 1개짜리 주머니 6개를 배치해야 하는데, 2개짜리 주머니가 한 자리에 들어간 뒤를 보면 1개짜리 주머니는 "2개짜리 앞쪽, 그 중간, 뒤쪽" 세 구간에만 들어갈 수 있습니다. 각 구간에 들어가는 1개짜리 주머니 수를 a, b, c라 두면 a + b + c = 6, a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0 이고, 경우의 수는 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$입니다.
따라서 이 경우의 수는 4 × 28 = 112입니다.

결국 (가), (나)를 모두 만족하는 전체 경우의 수는 두 경우를 더한 150 + 112 = 262입니다.

이 문항은 조건이 만들어내는 배치 구조를 먼저 파악해야만 풀리는 조합적 배열 문제입니다. 특히 2개짜리 주머니가 서로 이웃할 수 없다는 제한은, 공을 배치하기 전에 반드시 빈 주머니의 위치와 개수부터 확정해야 한다는 결론으로 이어집니다.
이 문제의 핵심은 "합이 8이 되도록 1과 2를 몇 개 쓸 수 있느냐"가 아니라, **조건이 허용하는 '형태' 자체가 무엇인지를 먼저 찾아내는 것**입니다. 즉, 1개짜리 주머니가 몇 개인지를 기준으로 케이스를 명확히 나누고, 각 케이스에서 빈 주머니로 만들어지는 틈의 구조를 분석해, 그

틈에 2개짜리를 어떻게 끼워 넣을지를 결정하는 방식입니다. 이후 남은 공간에 1개짜리를 분배하는 과정은 중복조합 공식으로 자연스럽게 처리됩니다.

정리하면, 이 문항은 배치 구조 파악 → 케이스 확정 → 틈 구조 분석 → 중복조합 적용으로 이어지는 다층적인 사고를 요구합니다. 익숙한 틀에서 벗어난 형태라 난도가 높지만, 구조를 제대로 잡으면 깔끔하게 정리되는 문제입니다. 평가원이 최근 강조하는 **“기준을 세우고, 그 기준으로 개수를 분류하는 능력”**을 정확히 측정하는 문항으로 볼 수 있습니다.

미적분 28번 문항

점 $(s,\, f(s))$ $(s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발 $(0,\, f(s))$과

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\, f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점의 거리가 t

=> $y=f'(s)(x-s)+f(s)$의 y절편인 $\left(0,\, -sf'(s)+f(s)\right)$

=> $t=\left|f(s)-\{-sf'(s)+f(s)\}\right|=\left|sf'(s)\right|$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$이므로 $\qquad f'(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$

$t=\left|sf'(s)\right|=\left|\dfrac{s^3}{s+1}\right|=\dfrac{s^3}{s+1}\ \ (s>0)$

s의 값을 $g(t)$ => $s=g(t)$

$s=g(t)$이므로 $t=g^{-1}(s)=\dfrac{s^3}{s+1}$이고, $dt=g'^{-1}(s)ds$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt=\int_{g(\frac{1}{2})}^{g(\frac{27}{4})} sg'^{-1}(s)\,ds$ 이다.

$s=1$일 때 $g^{-1}(1)=t=\dfrac{1}{2}$이고

$s=3$ 일 때 $g^{-1}(3)=t=\dfrac{27}{4}$ 이므로 부분적분법을 이용하면

$\displaystyle\int_{g(\frac{1}{2})}^{g(\frac{27}{4})} sg'^{-1}(s)\,ds=\int_1^3 sg'^{-1}(s)\,ds=sg^{-1}(s)=[sg^{-1}(s)]_1^3\ -\int_1^3 g^{-1}(s)\,ds$ 이다.

$g^{-1}(s)=\dfrac{s^3}{s+1}=\dfrac{s^3+1-1}{s+1}=s^2-s+1-\dfrac{1}{s+1}$임을 이용하면

$$[sg^{-1}(s)]_1^3\ -\int_1^3 g^{-1}(s)\,ds=3g^{-1}(3)-g^{-1}(1)\ -\int_1^3 (s^2-s+1-\frac{1}{s+1})\ ds$$

$$=\frac{81}{4}-\frac{1}{2}-[\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{2}s^2+s-\ln(s+1)]_1^3=\frac{81}{4}-\frac{1}{2}-\frac{26}{3}+4-2+\ln 2=\frac{157}{12}+\ln 2$$

엄밀하게는 $g(t)$가 $s>0$에서 일대일대응인지 확인이 필요하나, 문제 발문상 역함수 적분 이외의 풀이 방향이 보이지 않으므로 현장에서 풀 때는 위 풀이와 같이 진행해도 무방합니다.

실제로 $s>0$에서 $g^{-1}(s)=t=\dfrac{s^3}{s+1}$은 증가함수이므로 역함수인 $g(t)$가 존재하죠.

역함수 정적분은 치환적분과 부분적분을 동시에 요구합니다. $sg'(s)$**와 같은 꼴이 보인다면, 역함수 정적분을 의심해 보는 게 좋습니다.** 221130, 231129로 연습해 보면 좋을 듯합니다.

미적분 29번 문항

#26 수능 미적 29번

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 자연수 k에 대하여
> $b_{k+i} = \dfrac{1}{a_i} - 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$
> 이다.

부등식

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) < 30$$

이 성립할 때, $a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $a_1 \neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 등차 a_n 첫째항 $= d$, 공차 $= d$) 설정

② i에다 $1, 2, 3$ 대입하기

$b_{k+1} = \dfrac{1}{a_1} - 1 = \dfrac{1}{d} - 1$

$b_{k+2} = \dfrac{1}{a_2} - 1 = \dfrac{1}{2d} - 1$

$b_{k+3} = \dfrac{1}{a_3} - 1 = \dfrac{1}{3d} - 1$

③ b_n은 등비수열이므로 $(b_{k+1})(b_{k+3}) = (b_{k+2})^2$임을 이용하기

$\left(\dfrac{1}{d} - 1\right)\left(\dfrac{1}{3d} - 1\right) = \left(\dfrac{1}{2d} - 1\right)^2$ 즉 $d = \dfrac{1}{4}$이다. $a_1 = d = \dfrac{1}{4}$

④ $b_{k+1} = 3$ $b_{k+2} = 1$ $b_{k+2} = \dfrac{1}{3}$이다. 즉 b_n의 공비 $r = \dfrac{1}{3}$

⑤ 마지막 부등식 이용하기!

$\dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) = 4\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{b_1}{1-r} = \dfrac{3}{2}b_1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{4}{a_1} = 16$

$0 < \dfrac{3}{2}b_1 - 16 < 30 \rightarrow \dfrac{32}{3} < b_1 < \dfrac{92}{3}$

근데 $b_{k+1} = 3$이고 $r = \dfrac{1}{3}$이므로 b_1으로 $9, 27, 81, 243 \cdots$ 가능

즉 $b_1 = 27$이다

⑥ 구하는 것 $a_2 = \dfrac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \dfrac{b_2}{1-r^2} = \dfrac{81}{8}$ 답 $\dfrac{81}{16}$

$p+q = 97$

수1 등차수열과 등비수열의 구조적 특성을 연계하여 출제를 하였고, 주어진 무한급수 조건을 활용해 b_1을 결정하는 것이 키포인트였습니다. 문제 자체가 9월에 출제된 급수 문제보다도 훨씬 무난했고, 수1 과정의 등비중항 개념만 이용하면 첫째항 공차 공비를 금방 구할 수 있었습니다.

이 문제에서 그나마 살펴볼수 있는 부분은 마지막 범위 조건으로 b_1을 구하는 과정인데요 b_n의 k+1번째 항이 3이고 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 b_1이 될 수 있는 숫자는 9, 27, 81, 243... 이고 범위에 들어가는 것이 27이라고 결정할 수 있습니다.

미적분 30번 문항

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$
=> $f^{-1}(x)$또한 실수 전체 집합에서 증가하는 연속함수

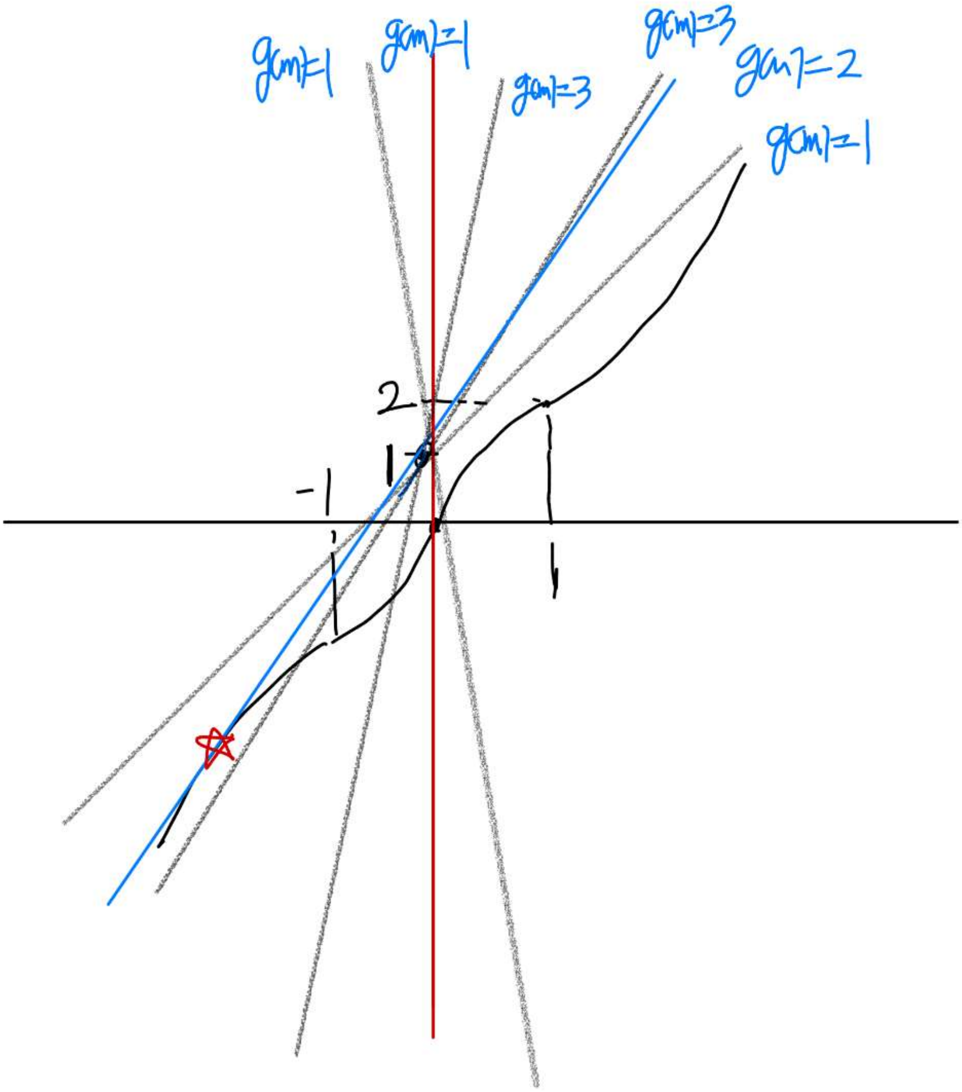
(가) $|x| \le 1$일 때, $4 \times \left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이고
(나) $|x| > 1$일 때, $\left|f^{-1}(x)\right| = e^{|x|-1}+1$입니다.

=> $|f^{-1}(x)| = \begin{cases} \left|\dfrac{x(x^2-5)}{2}\right| & (|x| \le 1) \\ e^{|x|-1}+1 & (|x| \ge 1) \end{cases}$ 이고, 증가하는 연속함수이려면

$f^{-1}(x) = \begin{cases} -e^{-x-1}-1 & (x < -1) \\ -\dfrac{x(x^2-5)}{2} & (-1 \le x \le 1) \\ e^{x-1}+1 & (x > 1) \end{cases}$이여야만 합니다.

기울기가 m이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점의 개수를 살펴보는 것과, 기울기가 $\dfrac{1}{m}$이고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선이 곡선 $y = f^{-1}(x)$와 만나는 점의 개수를 살펴보는 것은 동일합니다.

기울기가 $\dfrac{1}{m}$이고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선과 곡선 $y = f^{-1}(x)$의 그래프를 그려보면
다음과 같습니다.



$\lim\limits_{\frac{1}{m}\to\infty} m = 0$이고 $b > 0$이므로 $a = 0$이다. 따라서 $g(a) = 1$, $\lim\limits_{m\to a} g(m) = 3$입니다.

$m = b$일 때, $g(m) = 2$이고, $f^{-1}(x)$와 점 $(0, 1)$을 지나는 직선은 접합니다. 이 때의 접점을 $(k, -e^{-k-1}-1)$으로 두면,

(두 점을 이은 직선의 기울기)=(접선의 기울기)이므로 $\dfrac{-e^{-k-1}-2}{k} = e^{-k-1} = \dfrac{1}{b}$입니다.

$k+1 = \ln b$이고 $-\dfrac{1}{b} - 2 = \dfrac{k}{b}$이므로 $\dfrac{k+1}{b} = \dfrac{\ln b}{b} = -2$입니다.

$g(a) \times \left(\lim\limits_{m\to a+} g(m)\right) + g(b) \times \left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2 = 1\times 3 + 2 \times (-2)^2 = 11$ 입니다.

먼저, 변곡접선에서 $g(m)$이 불연속이 아닌 것이 이 문제의 중요 부분이라고 볼 수 있습니다. **변곡접선을 의심해보는 태도는 좋지만, 그것을 바로 답인 것처럼 확신하는 태도를 평가원이 저격한 것이 아닐까 싶습니다.**

또한 $\lim_{\frac{1}{m}\to\infty} m=0$이므로 역함수의 그래프에서는 기울기가 양의 무한대와 음의 무한대로 발산할 때를 관찰해야 하는 것이 어려운 부분입니다. 수2 관련 문제이긴 하나 2025학년도 경찰대 1차시험 수학 18번을 같이 풀어보면 좋겠습니다.
마지막으로 $\lim_{m\to a+} g(m)$을 구하는 과정에서, 지수함수가 직선보다 더 증가율이 크므로 그림상으로는 지수함수가 아래에 있지만 어느 순간 교점이 생길 수밖에 없음을 인지하여야 합니다.
(증가율 : 지수 > 다항 > 로그)
실수할 만한 부분이 3가지나 되어 매우 어려운 문제라고 볼 수 있습니다. 241130과 같이 학습하면 좋을 듯합니다.