2. 그래프 문제

-문제

10

10. 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$에서 정의된 함수

$$f(x)=3\sin\frac{\pi x}{a}+b$$

의 그래프가 x축과 오직 한 점 $(2, 0)$에서 만날 때, $a+b$의 값은? [4점]

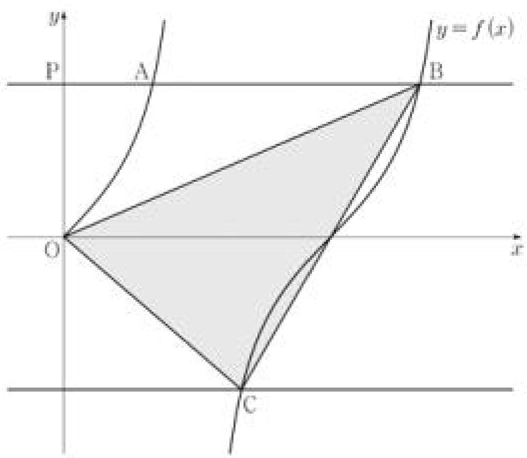
① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

9

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, 0 \le x < \frac{3k\pi}{2},\ x \ne \frac{k\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$가 있다. 점 $\mathrm{P}(0, p)\ (p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, $\mathrm{B}\ (\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{PB}})$라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{PA}}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{9}$



7

10. 다음과 같이 $0 \le x < 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

$n-1 \le x < n$일 때, $f(x)=3^n\sin\pi x+4$이다. (단, $n=1$, 2)

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

6

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+1$의 최댓값이 8이고 주기가 π일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

4

20. 양수 t에 대하여 닫힌구간 $\left[0, \frac{2}{t}\right]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sqrt{3}\sin(t\pi x),\quad g(x)=-3\cos(t\pi x)$$

가 있다. $0<k<\frac{2}{t}$인 상수 k에 대하여 $f(k)=g(k)=3k$일 때, $60(t+k)$의 값을 구하시오. [4점]

3

13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

-해설

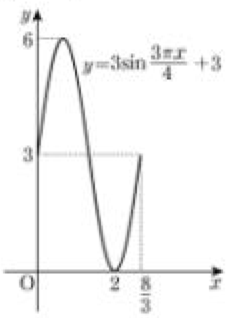
10

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=3\sin\frac{\pi x}{a}$의 그래프를 y축의 방향으로 $b(b>0)$만큼 평행이동한 것이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 오직 한 점에서 만나므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다. 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3a}{2}$일 때, 최솟값 0을 가지므로 $\frac{3a}{2}=2$, $a=\frac{4}{3}$이고

$f\left(\frac{3a}{2}\right)=-3+b=0$, $b=3$

따라서 $a+b=\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$



9

14. **출제의도** : 삼각함수의 주기와 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

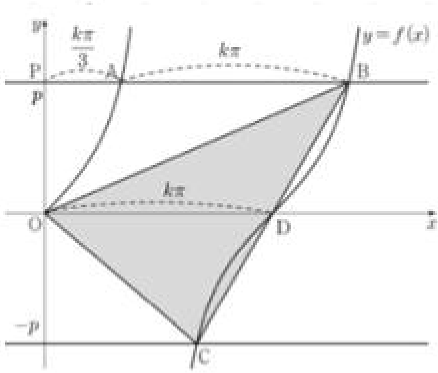
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D라 하자.

함수 $y=\tan\frac{x}{k}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{k}}=k\pi$이므로

$\overline{AB}=\overline{OD}=k\pi$

$\overline{AB}=3\overline{PA}$이므로

$\overline{PA}=\frac{1}{3}\times\overline{AB}=\frac{k\pi}{3}$



점 A의 좌표가 $\left(\frac{k\pi}{3}, p\right)$이고 점 A가

함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$의 그래프 위의

점이므로

$p=\tan\left(\frac{1}{k}\times\frac{k\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$이고

(삼각형 OCB의 넓이)

=(삼각형 ODB의 넓이)

+(삼각형 OCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times p+\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times p$

$=2\times\frac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}k\pi$

이므로

$\sqrt{3}k\pi=\frac{5\pi}{3}$

$k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

따라서

$k+p=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}$

$=\frac{14\sqrt{3}}{9}$

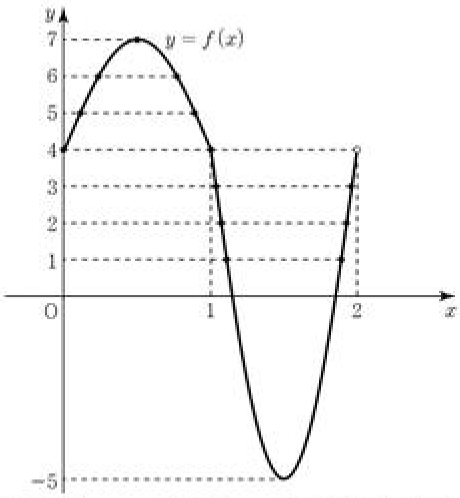
정답 ③

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$$f(x)=\begin{cases}3\sin\pi x+4 & (0\le x<1)\\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2)\end{cases}$$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4$, $y=9\sin\pi x+4$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수는 13

6

6. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이고

$a>0$이므로

$a+1=8$에서

$a=7$

함수 $f(x)$의 주기가 π이고

$b>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서

$a+b=7+2=9$

정답 ④

4

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$0<k<\dfrac{2}{t}$에서 $0<tk\pi<2\pi$

$f(k)=3k$에서 $\sin(tk\pi)=\sqrt{3}k>0$이고

$g(k)=3k$에서 $\cos(tk\pi)=-k<0$이므로

$\dfrac{\pi}{2}<tk\pi<\pi$

$f(k)=g(k)$에서 $\tan(tk\pi)=-\sqrt{3}$ 이므로

$tk\pi=\dfrac{2}{3}\pi$, $tk=\dfrac{2}{3}$

$f(k)=3k$에서 $\sqrt{3}\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}=3k$이므로

$k=\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{4}{3}$

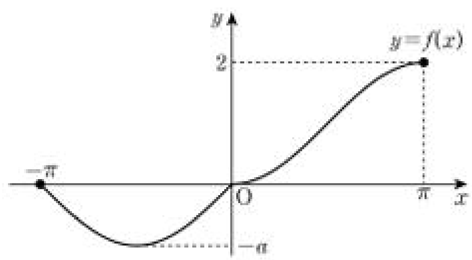
따라서 $60(t+k)=60\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}\right)=110$

3

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(ⅰ) $a>0$인 경우

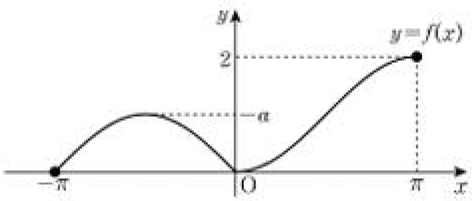
닫힌구간 $[-\pi,\pi]$에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M=2$, $m=-a$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 $2-(-a)=4$에서 $a=2$

(ii) $-2 \le a < 0$ 인 경우

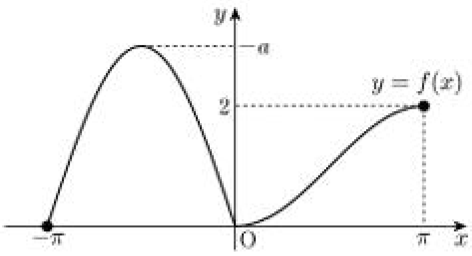
단힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M=2$, $m=0$ 이므로 $M-m=4$ 를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $a<-2$ 인 경우

단힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M=-a$, $m=0$ 이므로 $M-m=4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $-a=4$ 에서 $a=-4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a 의 값의 곱은

$2 \times (-4) = -8$