출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석)+친구들

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	④	12	④	23	②	23	③		
2	③	13	①	24	③	24	①		
3	⑤	14	①	25	④	25	⑤		
4	⑤	15	⑤	26	⑤	26	②		
5	④	16	4	27	③	27	④		
6	③	17	13	28	②	28	④		
7	③	18	3	29	190	29	25		
8	③	19	10	30	42	30	43		
9	④	20	117						
10	②	21	75						
11	③	22	28						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@naver.com 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!

<해설강의 QR코드>

띵수학정다움

공통과목

1. 정답) ④ [수학 I － 지수함수와 로그함수]

해설 : $2^{-\frac{2}{3}} \times \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{2}{3}} \times 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{3}} = 2$

2. 정답) ③ [수학II － 미분]

해설 : 함수 $f(x)=3x^2(x-1)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+6x(x-1)$이고

$f'(0)+f'(1)=0+3=3$이다.

3. 정답) ⑤ [수학 I － 수열]

해설 : 등차중항의 성질에 의해 $a_1a_5=a_3^{\,2}=3a_3$이고

$a_3=3>0$이다.

공비를 r라 할 때, $a_2=2$에서 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}=r$이고

$\frac{a_6}{a_4}=\frac{a_4\times r^2}{a_4}=r^2=\frac{9}{4}$이다.

4. 정답) ⑤ [수학II － 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x\to 0}f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=5$이다.

5. 정답) ④ [수학 I － 삼각함수]

해설 : $3\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}=-2$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$3\cos^2\theta-1=-2\cos\theta$이고 정리하면

$3\cos^2\theta+2\cos\theta-1=(3\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$이다.

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\cos\theta>0$이고 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$이고

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\tan\theta = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$ 이므로

$\sin\theta - \tan\theta = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이다.

6. 정답) ③ [수학Ⅱ – 미분]

해설 : 방정식 $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + k = 0$의 실근의 개수는

곡선 $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + k$와 x축의 교점의 개수와 같다.

함수 $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + k$의 도함수는 $y' = 3x^2 - 9x + 6$이고

$y' = 3(x-1)(x-2) = 0$에서 함수 $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + k$는

$x = 1$에서 극댓값 $\frac{5}{2} + k$, $x = 2$에서 극솟값 $2 + k$를 가진다.

곡선 $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + k$와 x축의 교점의 개수가 2이려면

극값이 0이어야 하고, $\frac{5}{2} + k = 0$ 또는 $2 + k = 0$에서

$k = -\frac{5}{2}$ 또는 $k = -2$이다.

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 5이다.

7. 정답) ③ [수학Ⅱ – 적분]

해설 : $x^2 - 3x + 2 = x - 1$에서 $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$이고

곡선 $y = x^2 - 3x + 2$와 직선 $y = x - 1$이 만나는 두 점의

x좌표는 각각 1 또는 3이다.

$\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}$ 이므로

곡선 $y = x^2 - 3x + 2$와 직선 $y = x - 1$로

둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

$x^2 = ax$에서 $x^2 - ax = x(x-a) = 0$이고

곡선 $y = x^2$과 직선 $y = ax$가 만나는 두 점의 x좌표는

각각 0 또는 a이다.

$\int_0^a (x^2 - ax)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} = -\frac{a^3}{6}$ 이므로

곡선 $y = x^2$과 직선 $y = ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{a^3}{6}$ 이고

$\frac{a^3}{6} = \frac{4}{3}$에서 $a^3 = 8$, $a = 2$이다.

8. 정답) ③ [수학Ⅰ – 지수로그]

$3a - b = \log_2 36$, $a - b = \log_4 3$을 변변 빼면

$2a = \log_2 36 - \log_2 \sqrt{3} = \log_2 \frac{36}{\sqrt{3}} = \log_2\left(4 \times \frac{9}{\sqrt{3}}\right)$

$= \log_2 4 + \log_2 3\sqrt{3} = 2 + \frac{3}{2}\log_2 3$

$\therefore\ a = 1 + \frac{3}{4}\log_2 3$

$b = a - \log_4 3 = 1 + \frac{3}{4}\log_2 3 - \frac{1}{2}\log_2 3$

$= 1 + \frac{1}{4}\log_2 3$

따라서 $a + b = 2 + \log_2 3 = \log_2 12$이다.

9. 정답) ④ [수학Ⅱ – 미분]

해설 : 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x = 2$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하다.

즉, $g(x)$는 $x = 2$에서 연속이므로 $f(2) = 2f(2)$에서

$f(2) = 0$이다.

함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x > 2) \\ f(x) + xf'(x) & (x < 2) \end{cases}$

이고 $x = 2$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하므로

$f'(2) = f(2) + 2f'(2)$에서 $f(2) = 0$이므로 $f'(2) = 0$이다.

$f(2) = 0$, $f'(2) = 0$에서 이차함수 $f(x) = (x-2)^2$이다.

함수

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x(x-2)^2 & (x < 2) \end{cases}$$

이고 도함수

$$g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & (x > 2) \\ 3x^2 - 8x + 4 & (x \leq 2) \end{cases}$$

이다.

$x > 2$에서 $g'(x) > 0$이므로 함수 $g(x)$는 증가하고

$x \leq 2$에서 $3a^2 - 8a + 4 = (3a-2)(a-2) = 0$이므로

$x = a$에서 극댓값을 가지는 실수 a는 $a = \frac{2}{3}$이다.

따라서 $f(a) = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 = \frac{16}{9}$이다.

10. 정답) ②

$f(0)=f(a)=f'(a)=0$에서 $f(x)=\frac{1}{2}x(x-a)^2$이다.

$\therefore$ R$(a, 0)$

$\overline{OQ}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{OS}=4$, $\overline{QS}=2$이다.

따라서 Q$(4, 2)$

$f(4)=2 \rightarrow f(4)=\frac{1}{2}\times 4\times(4-a)^2=2$

$(4-a)^2=1$에서 $a=3$이다. ($\because 0<a<4$)

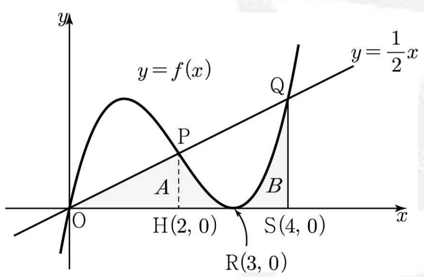
$f(x)=\frac{1}{2}x(x-3)^2$이고 $f(x)=\frac{1}{2}x$에서

$\frac{1}{2}x(x-3)^2=\frac{1}{2}x$

$(x-3)^2=1$

$x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore$ P$(2, 1)$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$A=\triangle\mathrm{OPH}+\int_2^3 f(x)dx$

$B=\int_3^4 f(x)dx$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}A+B&=\frac{1}{2}\times 2\times 1+\int_2^4 f(x)dx\\&=1+\int_2^4 \frac{1}{2}x(x-3)^2dx\\&=1+\frac{1}{2}\int_2^4(x^3-6x^2+9x)dx\\&=1+\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_2^4\\&=1+\frac{1}{2}\left(\frac{256-16}{4}-2(64-8)+\frac{9(16-4)}{2}\right)\\&=1+\frac{1}{2}(60-112+54)\\&=1+1=2\end{aligned}$$

이다.

11. 정답) ③ [수학Ⅰ – 삼각함수]

해설 : 엇각에 의해 $\angle\mathrm{CPQ}=\angle\mathrm{BCP}$이고

$\cos(\angle\mathrm{CPQ})=\cos(\angle\mathrm{BCP})=\frac{3}{4}$이다.

삼각형 CPQ에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{CQ}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{3}{4}=14$에서 $\overline{CQ}=\sqrt{14}$이고

삼각형 BCP에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{BP}^2=6^2+5^2-2\times6\times5\times\frac{3}{4}=16$에서 $\overline{BP}=4$이다.

두 삼각형 APQ, ABC는 서로 닮음이고 $\overline{PQ}=2$, $\overline{BC}=6$에서

닮음비는 $1:3$이다. 닮음비에 의해 $\overline{AQ}=\frac{\sqrt{14}}{2}$,

$\overline{AP}=2$이다.

따라서 삼각형 APQ는 $\overline{AP}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이고

선분 AQ의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM은 선분 AQ를

수직이등분하고, $\cos(\angle\mathrm{PQM})=\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{8}$이다.

따라서 $\sin(\angle\mathrm{PQM})=\frac{5\sqrt{2}}{8}$이므로

삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{14}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{8}$이다.

12. 정답) ④ [수학Ⅰ – 삼각함수]

해설 : $g(t)=\frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t}$

$=f(t+1)-f(t)$

$=\sin\pi(t+1)-\sin\pi t$

$=-\sin\pi t-\sin\pi t$

$=-2\sin\pi t$

이다.

$|g(t)|=1$을 만족시키는 t는 $|-2\sin\pi t|=1$에서

$\sin\pi t=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\pi t=-\frac{1}{2}$이다.

$0\le t\le 3$에서

$\sin\pi t=\frac{1}{2}$를 만족시키는 t의 값은 $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{17}{6}$이고

$\sin\pi t=-\frac{1}{2}$를 만족시키는 t의 값은 $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$이다.

따라서 모든 t의 값의 합은

$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=9$이다.

13. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $\sum_{k=1}^{5}|a_k|=\sum_{k=1}^{7}a_{k+4}$에서

공차 d가 음수이면 $a_4<0$이므로 $0>a_4>a_5>\cdots$ 이고

$\sum_{k=1}^{5}|a_k|>0$, $\sum_{k=1}^{7}a_{k+4}=a_5+a_6+\cdots+a_{11}<0$이므로

모순이다.

공차 $d=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_4<0$이고

$\sum_{k=1}^{5}|a_k|>0$, $\sum_{k=1}^{7}a_{k+4}=a_5+a_6+\cdots+a_{11}<0$이므로

모순이다.

따라서 공차 d는 양수이고 $a_4<0$이므로

$a_1<a_2<a_3<a_4<0$이다.

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}$에서

$-a_1-a_2-a_3-a_4+|a_5|=a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}$,

$|a_5|=\sum_{k=1}^{11}a_k$이고 등차중항에 의해 $|a_5|=11a_6$이다.

$a_5>0$이면 $a_5=11a_6$에서

$11a_6-a_5=10a_6+(a_6-a_5)=10a_6+d>0$이므로 모순이다.

$a_5=0$이면 $0=11a_6$에서 $a_6=0$이므로 모순이다.

따라서 $a_5<0$이고 $-a_5=11a_6$에서

$11a_6+a_5=12a_6-d=0$, $a_6=\frac{d}{12}$이다.

$\sum_{k=2}^{10}a_k=a_2+a_3+\cdots+a_{10}=9a_6=\frac{3}{4}d$이고

$d>0$이므로 $\frac{3}{4}d$가 4 이하의 정수가 되도록 하는 d의 값은

$d=\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, 4, $\frac{16}{3}$이다.

따라서 모든 실수 d의 값의 합은 $\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+4+\frac{16}{3}=\frac{40}{3}$이다.

14. 정답) ① [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+f(t)}$의 분자는 0으로 가므로 극한값이

존재하지 않으려면 $x\to t$일 때 분모도 0으로 가야한다.

이때, $t^2-2t^2+f(t)=0$에서 $f(t)=t^2$이면

$\lim_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+f(t)}=\lim_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+t^2}=\lim_{x\to t}\frac{1}{x-t}$이므로

극한값이 존재하지 않는다.

즉, $f(t)=t^2$인 t가 2뿐이다.

ⅰ) $f(x)$의 최고차항의 계수가 1인 경우

$f(x)=x^2+a(x-2)$ 꼴이고

$f(3)=0$에서 $a=-9$, $f(x)=x^2-9(x-2)$이다.

이때, $f(0)=18$이다.

ⅱ) $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이 아닌 경우

$f(x)=x^2+b(x-2)^2$ 꼴이고

$f(3)=0$에서 $b=-9$, $f(x)=x^2-9(x-2)^2$이다.

이때, $f(0)=-36$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(0)$의 최댓값은 18, 최솟값은

-36이고 합은 -18이다.

15. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 미분]

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $f(0)=7$, $f'(0)=9$이다.
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는
$f(x)=x^3+bx^2+9x+7$
라 할 수 있다.
$f'(x)=3x^2+2bx+9$

따라서 $g'(x)=\begin{cases}2ax+9 & (x<0)\\ 3x^2+2bx+9 & (x>0)\end{cases}$

이다.

$a>0$이므로 $x<0$일 때, 방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $x=-\frac{9}{2a}$로

개수는 1이다.
함수 $g'(x+2)$는 함수 $g'(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼
평행이동한 함수이므로 $x<0$일 때, 방정식 $g'(x)\times g'(x+2)=0$의
실근의 개수는 적어도 2이다.
이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 양의 근을 갖고
조건 (나)를 만족시키기 위해서는
$x<0$일 때, 방정식 $g'(x)\times g'(x+2)=0$의 실근의 개수가 2이고
$x>0$일 때, 방정식 $g'(x)\times g'(x+2)=0$의 실근의 개수가 2이어야
한다.
따라서 두 근의 차가 2이어야 x축의 방향으로 -2만큼
평행이동할 때 두 방정식 $f'(x)=0$과 $f'(x+2)=0$의 실근 중
중복되는 근이 생겨서 $x>0$일 때, 방정식 $g'(x)\times g'(x+2)=0$의
실근의 개수가 2일 수 있다.

따라서 이차함수 $f'(x)$의 축이 양수이어야 하므로 $-\frac{b}{3}>0$에서

$b<0$이다. ⋯⋯ ㉠

$3x^2+2bx+9=0$의 두 양의 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3}$, $\alpha\beta=3$

$(\alpha-\beta)^2=\left(-\frac{2b}{3}\right)^2-4\times3=2^2$

$\frac{4b^2}{9}-12=4$

$b^2=36$

$\therefore\ b=-6$ ($\because$ ㉠)

$x \le 0$일 때, $g(x)=ax^2+9x+7$

$g'(x)=2ax+9$

$g'(-1)=0 \rightarrow -2a+9=0 \rightarrow a=\frac{9}{2}$

$$g(x)=\begin{cases} \frac{9}{2}x^2+9x+7 & (x \le 0) \\ x^3-6x^2+9x+7 & (x>0) \end{cases}$$

$g\left(\frac{2a}{3}\right)=g(3)=27-54+27+7=7$이다.

16. 정답) 4 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\log_3 18+\frac{1}{2}\log_3\frac{81}{4}=\log_3 18+\log_3\frac{9}{2}$

$=\log_3 18\times\frac{9}{2}$

$=\log_3 81$

$=4$

17. 정답) 13 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $f'(x)=3x^2-4x+1$의 양변을 부정적분하면

$f(x)=x^3-2x^2+x+C$이다. (단, C는 적분상수)

$f(1)=1-2+1+C=C=1$에서

$f(x)=x^3-2x^2+x+1$이므로

$f(3)=27-18+3+1=13$이다.

18. 정답) 3 [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $\sum_{k=1}^{10}(a_k+m)(b_k+m)=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+ma_k+mb_k+m^2)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+m\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{10}m^2$

$=10m^2-20m+10$

이고

$10m^2-20m+10=40$,

$10(m^2-2m-3)=10(m-3)(m+1)=0$이므로

$m=3$이다.

19. 정답) 10 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : 점 P의 시각 t에서의 위치와 가속도를 각각 $x(t)$, $a(t)$라 할 때, $x(t)=\int_0^t v(t)dt=\frac{1}{2}at^2+bt$, $a(t)=v'(t)=a$이다.

$x(2)=2a+2b=4$, $a(2)=a=4$에서 $a=4$, $b=-2$이다.

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\int_0^k|v(t)|dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\{-v(t)\}dt+\int_{\frac{1}{2}}^k v(t)dt$$

$$=\left[-2t^2+2t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[2t^2-2t\right]_{\frac{1}{2}}^k$$

$$=2k^2-2k+1$$

이다. 움직인 거리가 25 이하이므로 $2k^2-2k+1\le 25$에서

$2k^2-2k-24=2(k+3)(k-4)\le 0$, $-3\le k\le 4$이다.

범위 내의 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

20. 정답) 117 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $3\log_2\sqrt{\frac{2}{3}n+2}=k$ (k는 정수)라 두면

$3\log_2\sqrt{\frac{2}{3}n+2}=\frac{3}{2}\log_2\frac{2n+6}{3}=k$이고

$\log_2\frac{2n+6}{3}=\log_2\frac{n+3}{3}+1=\frac{2}{3}k$, $2^{\frac{2}{3}k-1}=\frac{n}{3}+1$

$3\times2^{\frac{2}{3}k-1}-3=n$이다.

n이 300 이하의 자연수가 되려면 k가 3의 배수이어야 하므로

$k=3$일 때, $3\times2^{2-1}-3=3=n$

$k=6$일 때, $3\times2^{4-1}-3=21=n$

$k=9$일 때, $3\times2^{6-1}-3=93=n$

$k=12$일 때, $3\times2^{8-1}-3=381=n>300$

이고 $3+21+93=117$이다.

21. 정답) 75 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $f(x)\ge 0$ ($x\le a$, $x\ge 3a$)에서

$f(x)+|f(x)|=2f(x)$

$=2(x-a)(x-3a)$

$=2x^2-8ax+6a^2$

이고

$f(x)<0$ ($a<x<3a$)에서 $f(x)+|f(x)|=0$이다.

$g(0)=0$이므로

$$g(x)=\int_0^x \{f(t)+|f(t)|\}dt$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x^3-4ax^2+6a^2x & (x\le a) \\ \dfrac{8}{3}a^3 & (a<x<3a) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4ax^2+6a^2x+\dfrac{8}{3}a^3 & (x\ge 3a) \end{cases}$$

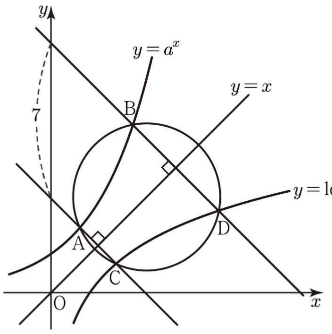
에서 $g(4a)=\dfrac{16}{3}a^3$이다.

$\dfrac{g(4a)-g(0)}{4a-0}=\dfrac{4}{3}a^2=3$에서 $a^2=\dfrac{9}{4}$, $a=\dfrac{3}{2}$이고

$50a=75$이다.

22. 정답) 28

두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$은 역함수 관계로 직선 $y=x$에 대칭이다.
중심이 직선 $y=x$위에 있는 원 또한 직선 $y=x$에 대칭이므로 두 점 A, C와 두 점 B, D는 각각 직선 $y=x$에 대칭이다.
따라서 두 직선 AC, BD는 기울기가 -1인 직선이다.



점 A의 x좌표를 p, 점 B의 x좌표를 q $(p<q)$라 하자.
$A(p,\ a^p)$, $B(q,\ a^q)$
이므로
직선 AC의 방정식은
$y=-(x-p)+a^p=-x+p+a^p$
직선 BD의 방정식은
$y=-(x-q)+a^q=-x+q+a^q$
이다.
직선 AC와 직선 BD의 y절편의 차가 7이므로
$|(p+a^p)-(q+a^q)|=7$
$(q-p)+(a^q-a^p)=7$ …… ㉠
두 직선 AB와 CD는 y축 대칭이므로 직선 AB의 기울기를 m이라 하면 직선 CD의 기울기는 $\dfrac{1}{m}$이고 $a>1$이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$은 증가하므로 $m>0$이고 $m>\dfrac{1}{m}$이므로 $m>1$이다.

$m+\dfrac{1}{m}=\dfrac{10}{3}$
$3m-10m+3=0$
$(3m-1)(m-3)=0$
$\therefore\ m=3$
따라서 두 점 $A(p,\ a^p)$, $B(q,\ a^q)$을 지나는 직선의 기울기가 3이므로
$\dfrac{a^q-a^p}{q-p}=3$
$a^q-a^p=3(q-p)$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $4(q-p)=7$에서 $q-p=\dfrac{7}{4}$이다.

$\alpha=\dfrac{7}{4}$이므로 $16\alpha=28$이다.

확률과 통계

23. 정답) ② [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : $0 \le r \le 6$인 정수 r에 대하여

각 항은 ${}_6\mathrm{C}_r 2^r x^r \left(-\frac{1}{4}\right)^{6-r} = {}_6\mathrm{C}_r(-1)^{6-r}2^{3r-12}x^r$이므로

$r=3$일 때, x^3의 계수는

${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3 2^{-3} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$이다.

24. 정답) ③ [확률과 통계 - 확률]

해설 : 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

각각의 두 사건

A와 B^C, A^C과 B, A^C과 B^C

도 모두 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(B-A) = \mathrm{P}(B \cap A^C) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C)$이고

$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B-A) = \frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$이다.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A-B) &= \mathrm{P}(A \cap B^C) \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

25. 정답) ④ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : 여학생 4명이 앉는 경우의 수 ⇨ $\frac{4!}{4} = 3! = 6$

이웃할 두 명의 남학생을 뽑는 경우의 수 ⇨ ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$

여학생 4명의 사이사이에 이웃할 남학생 두 명과 남은 한 명의 남학생이 앉는 경우의 수 ⇨ ${}_4\mathrm{P}_2 \times 2! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 3 \times 24 = 432$이다.

26. 정답) ⑤ [확률과 통계 - 통계]

해설 : 확률밀도함수의 정의에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

함수 $y=\frac{1}{2}f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$이고

세 직선 $y=\frac{1}{2}k$, $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k이다.

따라서 $k-\frac{1}{2}=1$, $k=\frac{3}{2}$이다.

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

이므로 $g(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}f(x)$에서

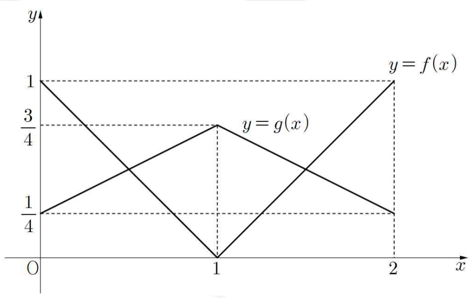
$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & (0 \le x \le 1) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{4} & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

이고

$\mathrm{P}\left(0 \le Y \le \frac{1}{k}\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Y \le \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$

[참고]

두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.



27. 정답) ③ [확률과 통계 - 확률]

해설 : 모든 함수 $f : X \to X$의 개수는 $4^4 = 256$

네 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$로 가능한 순서쌍을 모두 구하면

3은 적어도 한 개 포함하고,

2 두 개와 4 한 개 중에서 한쪽만을 포함해야 하므로

$(2, 2, 3, 3)$ ⇨ $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

$(2, 2, 3, 1)$ ⇨ $\frac{4!}{2!} = 12$

$(4, 3, 3, 3)$ ⇨ $\frac{4!}{3!} = 4$

$(4,3,3,1) \Rightarrow \frac{4!}{2!}=12$

$(4,3,1,1) \Rightarrow \frac{4!}{2!}=12$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$6+12+4+12+12=46$이고

따라서 임의의 함수 f가 주어진 조건을 만족시킬 확률은

$\frac{46}{256}=\frac{23}{128}$이다.

28. 정답) ② [확률과 통계 - 통계]

해설 : 주머니에서 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 할 때, 5 이하의 모든 자연수 k에 대하여

$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{5}$이다.

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$, ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(Y^2)=\frac{1+4+9+16+25}{5}=11$,

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=11-9=2$ ⋯ ㉡

확인한 5개의 수의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 표본평균의 분포와

㉠, ㉡에 의해

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=3$, ⋯ ㉢

$\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{1}{5}\times\mathrm{V}(Y)=\frac{2}{5}$ ⋯ ㉣

$X=5\overline{Y}$이므로 ㉢, ㉣에 의해

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(5\overline{Y})+\mathrm{V}(5\overline{Y})=5\times3+25\times\frac{2}{5}=25$

29. 정답) 190 [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : $a+b+c=x$, $d+e=y$라 하면

a, b, c, d, e는 자연수이므로 $x\ge3$, $y\ge2$이다.

조건 (가)에서 $x+y=12$이고, 조건 (나)에 의해 x는 y의 배수이어야 하므로 가능한 순서쌍 (x, y)는

$(10,2)$, $(9,3)$, $(8,4)$, $(6,6)$이다.

i) $a+b+c=10$, $d+e=2$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

이라 하면 a', b', c', d', e'은 5 이하의 음이 아닌 정수이고

$a'+b'+c'=7$, $d'+e'=0$을 모두 만족하는 모든 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수를 구하면

${}_3\mathrm{H}_7\times1={}_9\mathrm{C}_2=36$

a', b', c' 중 하나가 6 또는 7인 것을 제외하면

$36-\left(3!+\frac{3!}{2!}\right)=27$

ii) $a+b+c=9$, $d+e=3$

$a'+b'+c'=6$, $d'+e'=1$이고

${}_3\mathrm{H}_6\times{}_2\mathrm{H}_1={}_8\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=28\times2=56$

a', b', c' 중 하나가 6인 것을 제외하면

$56-\frac{3!}{2!}\times2=50$

iii) $a+b+c=8$, $d+e=4$

$a'+b'+c'=5$, $d'+e'=2$이고

${}_3\mathrm{H}_5\times{}_2\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=21\times3=63$

iv) $a+b+c=6$, $d+e=6$

$a'+b'+c'=3$, $d'+e'=4$이고

${}_3\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1=10\times5=50$

i)~iv)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$27+50+63+50=190$이다.

30. 정답) 42

사과를 받는 사람을 승자라 할 때, 각 경우의 확률은 다음과 같다.

A의 선택	B의 선택	승자	확률
1	n이상의 수	A	$\frac{1}{3}\times\frac{9-n}{7}=\frac{9-n}{21}$
1	n미만의 수	A	$\frac{1}{3}\times\frac{n-2}{7}=\frac{n-2}{21}$
9 또는 10	n이상의 수	B	$\frac{2}{3}\times\frac{9-n}{7}=\frac{18-2n}{21}$
9 또는 10	n미만의 수	없음	$\frac{2}{3}\times\frac{n-2}{7}=\frac{2n-4}{21}$

따라서

$p=\frac{9-n}{21}+\frac{n-2}{21}=\frac{1}{3}$

$q=\frac{18-2n}{21}$

$p+q=\frac{11}{21}$이므로 $q=\frac{4}{21}$이다.

따라서 $18-2n=4$에서 $n=7$이다.

$18\times n\times p=18\times7\times\frac{1}{3}=42$

[띵'S 팁]

$p+q=\frac{11}{21}$이므로 승자가 없는 경우 $\frac{2n-4}{21}=\frac{10}{21}$이어야 한다.

$\therefore\ n=7$

미적분

23. 정답) ③ [미적분 – 미분법]

해설 : $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}=\frac{2+1}{3}=1$

24. 정답) ① [미적분 – 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta=8$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=0$이므로

$3\alpha-\beta=0$이다.

따라서 $\alpha=2,\ \beta=6$이고

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta=12$

25. 정답) ⑤ [미적분 - 적분법]

해설 : $y=\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$이므로 $y'=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$이다.

$$\int_4^9\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{16}x-\frac{1}{2}+x^{-1}\right)}\,dx$$

$$=\int_4^9\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^9$$

$$=\frac{1}{6}(27-8)+2(3-2)$$

$$=\frac{19}{6}+2$$

$$=\frac{31}{6}$$

26. 정답) ② [미적분– 미분법]

해설 : $g(4)=0$에서 $f(0)=4$이므로 $a=3$이다.

$f'(x)=2e^{2x}+3e^x$이므로

$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$

23. 정답) ④ [미적분- 삼각함수의 덧셈정리]

해설 : 두 직선 $y=ax+1$, $y=(a+2)x-2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=a+2$이고,

$\theta=\beta-\alpha$이므로

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{(a+2)-a}{1+a(a+2)}=\frac{2}{(a+1)^2}\quad\cdots㉠$$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$에서 θ는 예각이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

이고, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 ㉠에 의해 $\dfrac{2}{(a+1)^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow(a+1)^2=4$이고,

$a=1$ 또는 $a=-3$이므로

모든 실수 a의 값의 곱은 -3

27. 정답) ④ [미적분 - 적분법]

해설 : 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

이다.

$x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이고 모든 실수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

따라서 $x>0$일 때, $f(x)>f'(t)(x-t)+f(t)$이므로

$$\begin{aligned}g(t)&=\int_0^t\{f(x)-f'(t)x+f'(t)t-f(t)\}dx\\&=\int_0^t f(x)dx+\int_0^t\{-f'(t)x+f'(t)t-f(t)\}dx\\&=\int_0^t f(x)dx+\left[-\frac{f'(t)}{2}x^2+\{f'(t)t-f(t)\}x\right]_0^t\\&=\int_0^t f(x)dx-\frac{f'(t)\times t^2}{2}+f'(t)\times t^2-f(t)\times t\\&=\int_0^t f(x)dx+\frac{f'(t)\times t^2}{2}-tf(t)\end{aligned}$$

이다.

한편,

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)dx&=\Big[xf(x)\Big]_0^t-\int_0^t xf'(x)dx\\&=tf(t)-\int_0^t xf'(x)dx\end{aligned}$$

이므로

$$g(t)=\frac{f'(t)\times t^2}{2}-\int_0^t xf'(x)dx$$

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{t^2f''(t)+2tf'(t)}{2}-tf'(t)\\&=\frac{t^2f''(t)}{2}\end{aligned}$$

$f''(4)=1$이므로 $g'(4)=8$이다.

23. 정답) 25 [미적분 - 급수]

해설 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-2a_n)=2\quad\cdots㉠$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2|a_n|-a_n)=10\quad\cdots㉡$

급수의 성질에 의해

㉠×2−㉡식을 정리하면 ; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$

㉡×2−㉠식을 정리하면 ; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=6$이므로 공비가 음수이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\Rightarrow\frac{a}{1-r}=2$ (수열 $\{a_n\}$첫째항은 a, 공비는 r) $\cdots㉢$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=6\Rightarrow\frac{a}{1-(-r)}=6$ (㉢식에서 $a=2(1-r)>0$) $\cdots㉣$

㉢, ㉣식을 연립하면

$a=3$, $r=-\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^k}{2}\times a_{m+k}\right)=a_{m+2}+a_{m+4}+a_{m+6}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}>\frac{1}{1000}\quad(\because m\text{은 홀수})$$

$4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+1}>\dfrac{1}{1000}$ 식을 정리하면

$2^{1-m}>\dfrac{1}{1000}$, $2000>2^m$이므로

만족하는 홀수인 자연수 $m=1, 3, 5, 7, 9$이므로

m의 값의 합은 25

28. 정답) 43 [미적분 미분법]

해설 : 양의 실수 t에 대하여 점 $(t, 0)$을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 접점의 x좌표를 s라 하자.

$f'(x)=3x^2+4t$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은

$y=(3s^2+4t)(x-s)+s^3+4ts$ 이고

이 직선이 점 $(t,\ 0)$을 지나므로 다음이 성립한다.

$0=(3s^2+4t)(t-s)+s^3+4ts$

$\Leftrightarrow\ 2s^3-3s^2t-4t^2=0\ \cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 다시 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표를 구하면

$f(x)=(3s^2+4t)(x-s)+s^3+4ts$

$\Leftrightarrow\ x^3+4tx=3s^2x+4tx-2s^3$

$\Leftrightarrow\ x^3-3s^2x+2s^3=0$

$\Leftrightarrow\ (x-s)^2(x+2s)=0$

에서

$g(t)=-2s\ \cdots$ ㉡

$g'(t)=-2\times\dfrac{ds}{dt}\ \cdots$ ㉢

이다. 이때 ㉠에 $t=1$을 대입하면

$2s^3-3s^2-4=0$,

$(s-2)(2s^2+s+2)=0$,

$s=2$

이므로 ㉡에서 $g(1)=-4$이다.

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$6s^2\times\dfrac{ds}{dt}-6st\times\dfrac{ds}{dt}-3s^2-8t=0$,

$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{3s^2+8t}{6s^2-6st}$

이고 $t=1$일 때, $s=2$이므로

$t=1$일 때 $\dfrac{ds}{dt}$의 값은 $\dfrac{12+8}{24-12}=\dfrac{5}{3}$이다.

따라서 ㉢에서 $g'(1)=-\dfrac{10}{3}$이다.

따라서 $g(1)\times g'(1)=\dfrac{40}{3}$이다.