2026학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 9. 08.(월)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ④	02. ④	03. ⑤	04. ①	05. ②
06. ⑤	07. ①	08. ③	09. ②	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ④	14. ③	15. ⑤
16. 8	17. 17	18. 30	19. 10	
20. 12	21. 296	22. 73		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$5^{\sqrt{2}+1}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$$
$$=5^{\sqrt{2}+1}\times 5^{-\sqrt{2}}$$
$$=5^{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}$$
$$=5^{1}$$
$$=5$$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-4$에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$$
$$=2\times4-4$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{6}(2a_k-1)=2\sum_{k=1}^{6}a_k-\sum_{k=1}^{6}1$$
$$=2\sum_{k=1}^{6}a_k-6=30$$

에서 $2\sum_{k=1}^{6}a_k=36$

따라서 $\sum_{k=1}^{6}a_k=18$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$

이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=(-1)+2=1$$

정답 ①

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x(x^2+x-3)+(x^2+2)(2x+1)$

이므로

$$f'(1)=2\times(-1)+3\times3$$
$$=7$$

정답 ②

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$에서

$\cos(\theta-\pi)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

이므로

$-\cos\theta=\frac{3}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta<0$이고 조건에서 $\tan\theta<0$이므로

θ는 제2사분면의 각이다.

이때 $\sin\theta>0$이다.

따라서

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{25}}$$
$$=\frac{4}{5}$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 도함수를 활용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-5x^2+6x$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+6$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=3\times3^2-10\times3+6=3$

그러므로 접선의 방정식은

$y-0=3(x-3)$, $y=3x-9$

이 접선이 점 $(5,a)$를 지나므로

$a=3\times5-9=6$

정답 ①

8. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2$에서

$$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2\log_2 a+\log_2 b$$
$$=\log_2 a^2+\log_2 b$$
$$=\log_2 a^2 b$$
$$=2$$

이므로

$a^2b=2^2$ …… ㉠

$\log_2 a+\log_2 b^2=7$에서

$\log_2 a+\log_2 b^2=\log_2 ab^2=7$

이므로

$ab^2=2^7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$a^3b^3=2^2\times2^7=2^{2+7}=2^9$

이고 a, b가 양의 실수이므로

$(ab)^3=(2^3)^3$

에서

$ab=2^3=8$

정답 ③

9. 출제의도 : 도함수의 성질과 부정적분의 정의를 이용하여 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

이고, $G(x)$가 $2f(x)+1$의 한 부정적분이므로

$G'(x)=2f(x)+1$

이때

$H(x)=G(x)-2F(x)$

라 하면

$$\begin{aligned} H'(x) &= G'(x)-2F'(x) \\ &= 2f(x)+1-2f(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로

$H(x)=x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, $G(3)=2F(3)$에서

$H(3)=G(3)-2F(3)=0$

이므로

$3+C=0$

즉 $C=-3$이므로

$H(x)=x-3$

따라서

$$\begin{aligned} G(5)-2F(5) &= H(5) \\ &= 5-3=2 \end{aligned}$$

정답 ②

10. **출제의도** : 등비수열의 일반항 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$r>0$이다.

$a_2=1$에서 $a_1r=1$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^k S_k=21$에서

$-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6=21$

$(-S_1+S_2)+(-S_3+S_4)+(-S_5+S_6)=21$

$a_2+a_4+a_6=21$

$a_2+a_2r^2+a_2r^4=21$

$a_2=1$이므로

$1+r^2+r^4=21$

$r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$

$(r^2+5)(r+2)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

㉠에서 $2a_1=1$이므로

$a_1=\dfrac{1}{2}$

따라서

S_2+S_7

$$=\frac{\frac{1}{2}\times(2^2-1)}{2-1}+\frac{\frac{1}{2}\times(2^7-1)}{2-1}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{127}{2}=\frac{130}{2}$$

$=65$

정답 ③

11. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $v(t)=3t^2-10t+7$

$\quad=(t-1)(3t-7)$

이므로

$v(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\frac{7}{3}$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<\frac{7}{3}$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$t=0$일 때 점 P의 위치가 원점이므로

$$x(1)=\int_0^1 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt$$
$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1$$
$$=1-5+7$$
$$=3 \text{ (참)}$$

ㄷ. $0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^2 |3t^2-10t+7|dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt+\int_1^2 \{-(3t^2-10t+7)\}dt$$
$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1-\left[t^3-5t^2+7t\right]_1^2$$
$$=3-\{(8-20+14)-3\}$$
$$=4 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 삼각형의 넓이를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(t,\ a^t),\ B(2t,\ a^{2t})$

이고 점 C의 좌표는 $C(2t,\ 0)$이다.

또한 삼각형 ACB는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발 H는 선분 BC의 중점이다.

이때 $H(2t,\ a^t)$이므로

$2a^t=a^{2t}$

$a^t=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 삼각형 ACB의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times(2t-t)\times a^{2t}=8$

$t\times(a^t)^2=16$

㉠에서 $a^t=2$이므로

$t\times 2^2=16$

$t=4$

즉 $a^4=2$ 이고 $a>1$이므로

$a=2^{\frac{1}{4}}$

따라서

$a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times 4=2^{\frac{1}{4}+2}=2^{\frac{9}{4}}$

정답 ①

13. **출제의도** : 함수의 극한값이 존재하도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+6x+12=(x+3)^2+3>0$

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a} \frac{x^2}{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)}$의 값이 존재하는 경우를 다음 두 가지 경우로 나누어 조사하자.

(i) 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\} \neq 0$인 경우

$\lim_{x \to a} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\}$

$= (f(a))^2 - k(a+2)f(a)$

$= f(a)\{f(a) - k(a+2)\}$에서

$f(a) > 0$이므로

$f(a) \neq k(a+2)$

x에 대한 방정식 $f(x) = k(x+2)$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식

$x^2 + 6x + 12 = kx + 2k$

즉, $x^2 + (6-k)x + 12 - 2k = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (6-k)^2 - 4(12-2k) < 0$

이어야 한다.

$k^2 - 4k - 12 < 0$

$(k+2)(k-6) < 0$

$-2 < k < 6$

(ii) $\lim_{x \to a} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\} = 0$ 인 실수 a가 존재하는 경우

$\lim_{x \to a} x^2 = 0$이어야 하므로

$a^2 = 0$, $a = 0$

$\lim_{x \to 0} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\}$

$= (f(0))^2 - 2kf(0)$

$= f(0)(f(0) - 2k) = 0$

$f(0) > 0$이므로 $f(0) = 2k$

즉, $12 = 2k$에서

$k = 6$

이때,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(f(x))^2 - 6(x+2)f(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{f(x)(f(x) - 6x - 12)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(x^2 + 6x + 12)x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + 6x + 12} = \frac{1}{12}$$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $-2 < k \leq 6$이므로

조건을 만족시키는 모든 정수 k는

-1, 0, 1, $\cdots$, 6이고 그 개수는 8이다.

정답 ④

14. 출제의도 : 삼각함수의 주기와 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

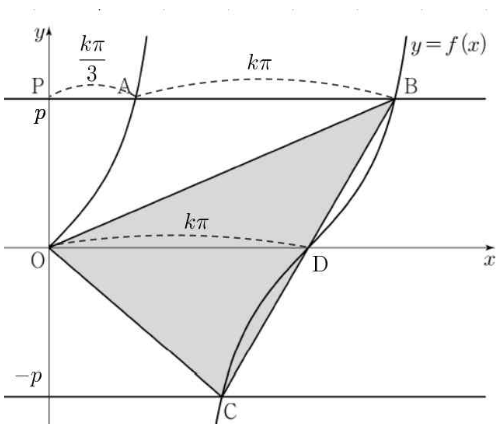
함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D라 하자.

함수 $y = \tan \frac{x}{k}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{k}} = k\pi$이므로

$\overline{AB} = \overline{OD} = k\pi$

$\overline{AB} = 3\overline{PA}$이므로

$\overline{PA} = \frac{1}{3} \times \overline{AB} = \frac{k\pi}{3}$



점 A의 좌표가 $\left(\frac{k\pi}{3}, p\right)$이고 점 A가 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$의 그래프 위의 점이므로

$p=\tan\left(\frac{1}{k}\times\frac{k\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$이고

(삼각형 OCB의 넓이)

=(삼각형 ODB의 넓이)

+(삼각형 OCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times p+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times p$

$=2\times\frac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\,k\pi$

이므로

$\sqrt{3}\,k\pi=\frac{5\pi}{3}$

$k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

따라서

$k+p=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}$

$=\frac{14\sqrt{3}}{9}$

정답 ③

15. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$를 정한 후 $f(8)$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\int_0^x(|f(t)|-|t|)dt$에서

$g'(x)=|f(x)|-|x|$

이때 조건 (나)에서 $g'(2)=0$, $g'(6)=0$ 이므로

$|f(2)|=2$, $|f(6)|=6$

즉,

$f(2)=-2$ 또는 $f(2)=2$ 이고

$f(6)=-6$ 또는 $f(6)=6$

또한 주어진 조건에서 $f(0)=0$이다.

그리고 조건 (가)에 의하여 방정식

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$

의 서로 다른 실근의 개수가 4이다.

(i) $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(6)=6$일 때

방정식 $f(x)=x$가 $x=0$, $x=2$, $x=6$의 세 실근을 가지므로

$f(x)-x=kx(x-2)(x-6)$

$f(x)=kx(x-2)(x-6)+x$

(k는 양의 상수)

라 하자.

이때 방정식 $f(x)=-x$가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시키므로

$kx(x-2)(x-6)+x=-x$

$x\{k(x-2)(x-6)+2\}=0$

$x(kx^2-8kx+12k+2)=0$

에서 x에 대한 이차방정식

$kx^2-8kx+12k+2=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-k(12k+2)$$
$$=4k^2-2k$$
$$=2k(2k-1)$$
$$=0$$

에서 $k>0$이므로 $k=\frac{1}{2}$

$kx^2-8kx+12k+2=0$에서

$\frac{1}{2}x^2-4x+8=0$, $x^2-8x+16=0$

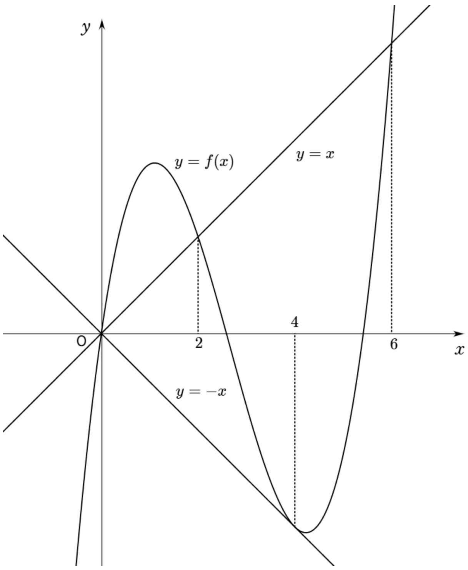
$(x-4)^2=0$, $x=4$

따라서 함수

$f(x)=\frac{1}{2}x(x-2)(x-6)+x$

의 그래프는 그림과 같고

$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt>0$



이때 $f(6)\times g(2)<0$에서 $g(2)<0$이므로 모순이다.

(ⅱ) $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(6)=-6$일 때 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(6)=-6$이므로

$x>6$일 때 직선 $y=x$와 반드시 교점을 갖는다.

따라서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 $x=6$에서 접해야 한다.

그러나 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=6$에서 극값을 가지므로 모순이다.

(ⅲ) $f(0)=0$, $f(2)=-2$, $f(6)=-6$일 때

방정식 $f(x)=-x$ 에서 $x=0$, $x=2$, $x=6$의 세 실근을 가지므로

$f(x)+x=kx(x-2)(x-6)$

$f(x)=kx(x-2)(x-6)-x$

(k는 양의 상수)

라 하자.

이때 $f(x)=x$가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시킨다.

$kx(x-2)(x-6)-x=x$

$x\{k(x-2)(x-6)-2\}=0$

$x(kx^2-8kx+12k-2)=0$

에서 x에 대한 이차방정식

$kx^2-8kx+12k-2=0$이 0이 아닌 중근을 갖거나 또는 $x=0$의 근과 0이 아닌 다른 한 근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-k(12k-2)$$
$$=4k^2+2k$$
$$=2k(2k+1)$$
$$=0$$

에서

$k=0$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$

그런데 $k>0$이므로 모순이다.

$x=0$의 근을 가지면 $12k-2=0$에서

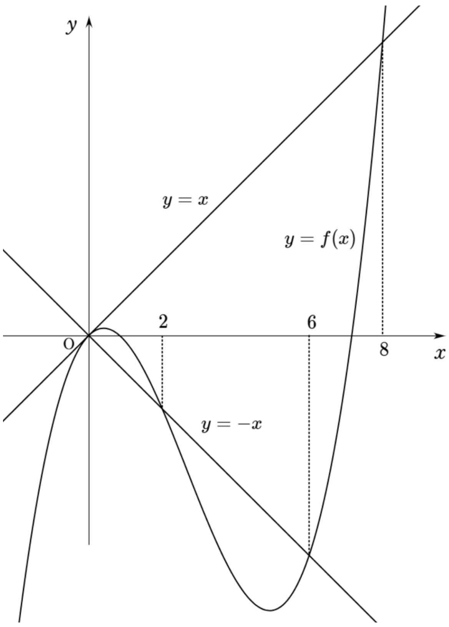
$k=\frac{1}{6}$

따라서 함수

$$f(x)=\frac{1}{6}x(x-2)(x-6)-x$$

의 그래프는 그림과 같고

$$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt<0$$



이때 $f(6)\times g(2)<0$에서 $g(2)>0$이므로 모순이다.

(ⅳ) $f(0)=0$, $f(2)=-2$, $f(6)=6$일 때

$f(x)=kx^3+px^2+qx$ (k는 양의 상수, p, q는 상수)라 하자.

이때

$f(2)=8k+4p+2q=-2$ …… ㉠

$f(6)=216k+36p+6q=6$ …… ㉡

이므로 $2<x<6$에서 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 반드시 존재한다.

이때, $f(6)\times g(2)<0$ 에서

$g(2)<0$이어야 하고, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로 $2<x<6$에서 방정식

$|f(x)|=x$를 만족시키는 x의 값이 반드시 존재한다.

즉, $x<0$에서 방정식 $f(x)=-x$는 근을 갖지 않아야 조건 (가)를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 $x=0$에서 접해야 한다.

이때 $f'(x)=3kx^2+2px+q$이므로

$f'(0)=q=1$

㉠, ㉡에 대입하면

$k=\frac{1}{4}$, $p=-\frac{3}{2}$

이므로

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$$

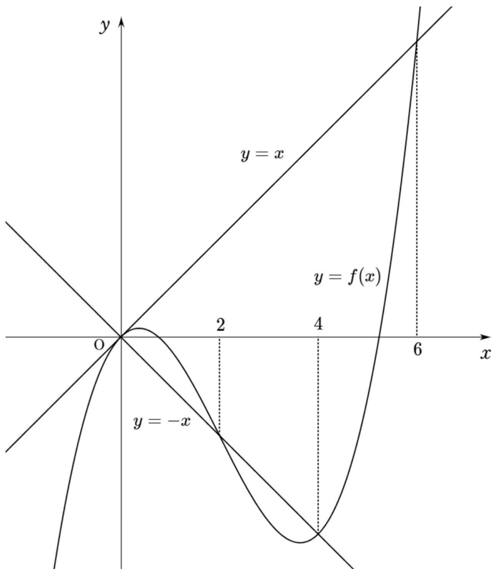
이상에서 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$이므로

$$f(8)=\frac{1}{4}\times 8^3-\frac{3}{2}\times 8^2+8=40$$

정답 ⑤

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열에서 a_3의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=1$이고 $a_{n+1}=na_n+2$이므로

$a_2=1\times a_1+2=3$

따라서

$a_3=2\times a_2+2=8$

정답 8

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+2x+1$이므로

$$f(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int(3x^2+2x+1)dx$$
$$=x^3+x^2+x+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(1)=1+1+1+C=6$에서

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+x+3$

이므로

$f(2)=8+4+2+3=17$

정답 17

18. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=6$에서

$a_1+2d=6$ …… ㉠

$2a_5-a_4=15$에서

$2(a_1+4d)-(a_1+3d)=15$

$a_1+5d=15$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3d=9$

$d=3$

㉠에서 $a_1+6=6$이므로

$a_1=0$

따라서

$a_{11}=a_1+10d=0+10\times3=30$

정답 30

19. 출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-3ax^2+5a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

이때 함수 $f(x)$는 극솟값을 가지므로

$a\neq0$이다.

(ⅰ) $a<0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=5a=a$

$a=0$

$a<0$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a>0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f(a)=2a^3-3a^3+5a=-a^3+5a=a$

$a^3-4a=0$, $a(a+2)(a-2)=0$

이때 $a>0$이므로

$a=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=2x^3-6x^2+10$이고

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므

로 구하는 극댓값은
$f(0)=10$

정답 10

20. **출제의도** : 원의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\angle BPC=\theta$라 할 때,
$\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로
삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta=\frac{6}{7}$이다.
$\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$,
$\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l$이라 하자.
원의 성질에 의하여
삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고,
$\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}=5k+3l$,
$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{AB}=7k+l$
이므로 $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$에서
$7:5=(5k+3l):(7k+l)$
$5(5k+3l)=7(7k+l)$
$l=\boxed{3}\times k$이다.
$\overline{PD}=5k+3l=14k$이므로
$\overline{PB}:\overline{PD}=7k:14k=1:2$
즉, 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{2}$이므로
$\overline{BC}=\frac{1}{\boxed{2}}\times\overline{AD}$이다.

$\cos\theta=\frac{6}{7}$에서

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{7}$$

한편,

$$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{13}=2\sqrt{13}$$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$R=\frac{\overline{BC}}{2\sin\theta}=\frac{2\sqrt{13}}{2\times\frac{\sqrt{13}}{7}}=\boxed{7}$$

따라서 $p=3$, $q=2$, $r=7$이므로
$p+q+r=3+2+7=12$

정답 12

21. **출제의도** : 함수의 극대, 극소를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(단, a, b, c는 상수)

로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$

이므로

$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2 \le \frac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x} \le x^4$

$5x^2+2ax+b-4 \le 8x^2+4ax+2b \le 2x^4$

즉,

$-3x^2-4 \le 2ax+b \le x^4-4x^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때

$g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$

이라 하면 곡선 $y=g(x)$는 꼭짓점의 좌표가 $(0, -4)$인 위로 볼록한 포물선이다.

또,

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=0$

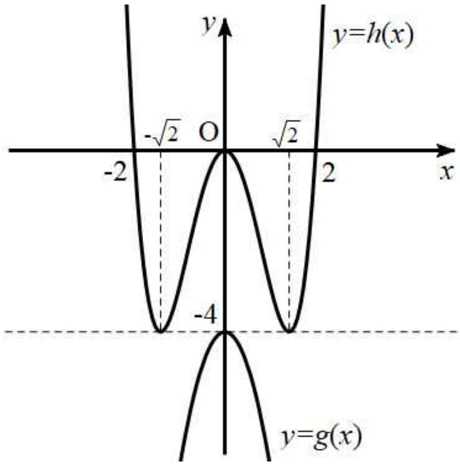
에서

$x=0$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$

이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 부등식 ㉠을 만족시키려면 직선 $y=2ax+b$가 $y=-4$이어야 한다.

즉, $a=0$, $b=-4$이므로

$f'(x)=3x^2-4$

따라서

$f'(10)=3\times10^2-4=296$

정답 296

22. **출제의도** : 로그함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B가 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 두 점 A, B를

$A(a, \log_2 a)$, $B(b, \log_2 b)$

(단, a, b는 양수)

로 놓을 수 있다.

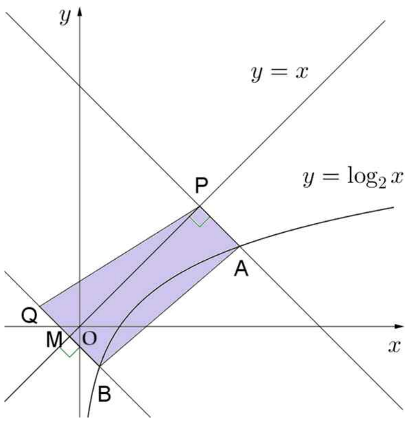
조건 (가)에서

(직선 AP의 y절편)

$-$ (직선 BQ의 y절편)

$=\frac{13}{2}$

이므로 $a>b$이다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 점 P이므로 직선 AP의 기울기는 -1이다.
이때, 직선 AP의 방정식은
$y-\log_2 a=-(x-a)$
즉, $y=-x+a+\log_2 a$
이므로 직선 AP의 y절편은 $a+\log_2 a$이다.
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는 $(\log_2 b,\ b)$이고, 직선 BQ의 기울기는 -1이다.
이때, 직선 BQ의 방정식은
$y-\log_2 b=-(x-b)$
즉, $y=-x+b+\log_2 b$
이므로 직선 BQ의 y절편은 $b+\log_2 b$이다.
조건 (가)에 의하여
$(a+\log_2 a)-(b+\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$
이므로
$(a-b)+(\log_2 a-\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$ …… ㉠
한편, 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{6}{7}$이므로
$\dfrac{\log_2 a-\log_2 b}{a-b}=\dfrac{6}{7}$
$\log_2 a-\log_2 b=\dfrac{6}{7}(a-b)$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(a-b)+\dfrac{6}{7}(a-b)=\dfrac{13}{2}$
$\dfrac{13}{7}(a-b)=\dfrac{13}{2}$
$a-b=\dfrac{7}{2}$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$\log_2 a-\log_2 b=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{7}{2}$
$\log_2 \dfrac{a}{b}=3$
$\dfrac{a}{b}=2^3$
$a=8b$ …… ㉣
㉣을 ㉢에 대입하면
$8b-b=\dfrac{7}{2}$
$7b=\dfrac{7}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면
$a=8\times\dfrac{1}{2}=4$
직선 AP의 방정식은
$y=-x+6$
이고, 직선 AP와 직선 $y=x$의 교점이 점 P이므로
$-x+6=x$에서
$x=3$
즉 점 P의 좌표는 $(3,\ 3)$
한편, 세 점 A, B, Q는
$\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$
선분 BQ의 중점을 M이라 하면
$\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right)$이고 $\angle\mathrm{PMB}=90^\circ$이다.



이때

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$

이므로 사각형 APQB의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})\times\overline{\mathrm{PM}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{13\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{65}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=65$이므로

$$p+q=8+65$$
$$=73$$

정답 73

■ **[선택: 미적분]**
23. ① 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ①
28. ② 29. 91 30. 31

23. **출제의도** : 지수함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=e^x$라 하면

$f'(x)=e^x$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

따라서

$f'(1)=e$

정답 ①

24. **출제의도** : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이다.

이때,

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=0$이고

$x=\frac{3\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$$=\int_0^1 e^t\,dt=\Big[\ e^t\ \Big]_0^1$$

$$=e^1-e^0=e-1$$

정답 ④

25. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6\text{에서}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{\left(\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}\right)\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{(n^4+4n)-(n^4+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=6$$

…… ㉠

(i) $b>-1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

의 값은 존재하지 않으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ii) $b<-1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=0$$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(iii) $b=-1$일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^{-1}\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}$$

$$=\frac{2a}{3}$$

이므로

$$\frac{2a}{3}=6$$

$$a=9$$

(i), (ii), (iii)에서

$a=9$, $b=-1$

따라서

$a+b=9+(-1)=8$

정답 ②

26. **출제의도** : 정적분을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$1=\dfrac{3}{x-1}$ 에서 $x=4$이므로

$\mathrm{A}(4,\ 1)$

$3=\dfrac{3}{x-1}$ 에서 $x=2$이므로

$\mathrm{B}(2,\ 3)$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{2-4}(x-4)$$

$y=-x+5$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_2^4\left(-x+5-\frac{3}{x-1}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x-3\ln|x-1|\right]_2^4$$
$$=(-8+20-3\ln3)-(-2+10-3\ln1)$$
$$=4-3\ln3$$

정답 ①

[다른 풀이]
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 사각형 ABDC의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$$
따라서 구하는 넓이는
$$4-\int_2^4\frac{3}{x-1}dx=4-\left[3\ln|x-1|\right]_2^4$$
$$=4-3\ln3$$

27. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 함숫값과 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(x^3+x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 모든 실수 x에 대하여
$$g(f(x^3+x))=x \quad \cdots\cdots ㉠$$
가 성립한다.
$x^3+x=2$에서
$$x^3+x-2=0$$
$$(x-1)(x^2+x+2)=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$
이때,
$$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$
이므로 ㉡에서
$$x=1$$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$$g(f(2))=1$$
이고, $f(2)=1$이므로
$$g(1)=1$$
한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$g'(f(x^3+x))\times f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=1$$
위 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$$g'(f(2))\times f'(2)\times4=1$$
$f(2)=1$이므로
$$4g'(1)\times f'(2)=1 \quad \cdots\cdots ㉢$$
$f'(2)=8g'(1)-1$을 ㉢에 대입하면
$$4g'(1)(8g'(1)-1)=1$$
$$32(g'(1))^2-4g'(1)-1=0$$
$$(4g'(1)-1)(8g'(1)+1)=0$$
$$g'(1)=\frac{1}{4} \text{ 또는 } g'(1)=-\frac{1}{8}$$

(ⅰ) $g'(1)=\frac{1}{4}$일 때,
$$f'(2)=8g'(1)-1$$
$$=8\times\frac{1}{4}-1$$
$$=1>0$$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이라는 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $g'(1)=-\frac{1}{8}$일 때,
$$f'(2)=8g'(1)-1$$
$$=8\times\left(-\frac{1}{8}\right)-1$$
$$=-2<0$$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g'(1)=\frac{1}{4}$이므로
$$g(1)+g'(1)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

정답 ①

28. **출제의도** : 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수와 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin g(\pi)=0$에서 $g(\pi)=n\pi$인 정수 n이 존재한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)-\sec^2 g(x)\times g'(x) \\ &= g'(x)\left(1-\sec^2 g(x)\right) \\ &= -g'(x)\tan^2 g(x) \end{aligned}$$

의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$f'(\pi)=-g'(\pi)\tan^2 g(\pi)=0$

조건 (가)에서 $f''(\pi)=0$이므로

$f(x)=a(x-\pi)^3+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)

이고

$f(0)=-a\pi^3+b=0$

이므로

$b=a\pi^3$

$f(x)=a(x-\pi)^3+a\pi^3$

그러므로

$f(\pi)=a\pi^3$ 이고

$f(\pi)=g(\pi)-\tan g(\pi)=n\pi$이므로

$a\pi^3=n\pi$ 에서

$a=\dfrac{n}{\pi^2}$

이때 모든 실수 x에 대하여 $\tan g(x)$가 정의되기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (k는 정수)이어야 한다. …… ㉠

또 $f'(x)=3a(x-\pi)^2$ 이므로

$3a(x-\pi)^2=-g'(x)\tan^2 g(x)$ …… ㉡

(i) $a>0$인 경우

x가 π가 아닐 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 감소하고 $n>0$이다.

$x>\pi$일 때, $g(\pi)=n\pi$에서 $g(x)$는 $\dfrac{3}{2}\pi$로 감소한다.

$n\pi>\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $n>\dfrac{3}{2}$

$x>\pi$일 때, $\dfrac{3}{2}\pi<g(x)<n\pi$이므로

㉠에서

$n\pi\le\dfrac{5}{2}\pi$, $n\le\dfrac{5}{2}$

즉, $\dfrac{3}{2}<n\le\dfrac{5}{2}$ 이므로 $n=2$

(ii) $a<0$인 경우

x가 π가 아닐 때 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가하고 $n<0$이다.

$g(\pi)=n\pi$에서 $g(x)$는 $\dfrac{3}{2}\pi$로 증가하는데 ㉠에 의하여 모순이다.

(i), (ii)에서 $n=2$이므로

$a=\dfrac{2}{\pi^2}$

$f(0)=g(0)-\tan g(0)=0$에서

$\tan g(0)=g(0)$

$$\begin{aligned} f'(0) &= -g'(0)\tan^2 g(0) \\ &= -g'(0)(g(0))^2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} g'(0)\times(g(0))^2 &= -f'(0) \\ &= -3a\pi^2 \\ &= -3\times\frac{2}{\pi^2}\times\pi^2=-6 \end{aligned}$$

정답 ②

29. **출제의도** : 등비급수의 수렴조건 및 등비수열의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로

$a_1 > 0$

이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r(단, r은 유리수)라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로

$-1 < r < 1$

이다.

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고 공비가 $-1 < r < 1$이므로 정수인 세 항은 연속해서 나와야 한다.

즉, 세 항 a_m, a_{m+1}, a_{m+2}의 값이 모두 정수인 자연수 m이 존재하고, 이때,

$|a_m| > |a_{m+1}| > |a_{m+2}|$

이다.

0이 아닌 실수 x에 대하여

$a_m = x$, $a_{m+1} = xr$, $a_{m+2} = xr^2$

이라 하면

조건 (나)에 의해

$a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} = 216$ …… ㉠

이므로

$x \times xr \times xr^2 = 216$

이다.

즉, $(xr)^3 = 216 = 6^3$이고, xr이 실수이므로

$xr = 6$

㉠에서

$a_{m+1} = xr = 6$

이므로

$a_m \times 6 \times a_{m+2} = 216$

$a_m \times a_{m+2} = 36$

이때, a_m, a_{m+2}가 모두 정수이므로

$|a_m| = 36$, $|a_{m+2}| = 1$ 또는

$|a_m| = 18$, $|a_{m+2}| = 2$ 또는

$|a_m| = 12$, $|a_{m+2}| = 3$ 또는

$|a_m| = 9$, $|a_{m+2}| = 4$

(i) $|a_m| = 9$, $|a_{m+2}| = 4$일 때,

$a_{m+1} = 6$

이므로

$$\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = \frac{|a_{m+2}|}{|a_{m+1}|} = \frac{2}{3}$$

즉, $|r| = \frac{2}{3}$이므로

$r = \frac{2}{3}$ 또는 $r = -\frac{2}{3}$

ⓐ $r = \frac{2}{3}$일 때,

$a_m = 9$, $a_{m+1} = 6$, $a_{m+2} = 4$

이므로 a_1의 최솟값은 9이다.

이때 $a_2 = 6$이므로

$a_1 + a_2 = 9 + 6 = 15 > 10$

이다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

ⓑ $r = -\frac{2}{3}$일 때,

$a_m = -9$, $a_{m+1} = 6$, $a_{m+2} = -4$

이고, $a_1 > 0$이므로

$a_2 = -9$일 때 a_1의 값은 최소이다.

이때

$$a_1 = a_2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -9 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

이고,

$$a_1 + a_2 = \frac{27}{2} + (-9) = \frac{9}{2} < 10$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

(ii) $|a_m| > 9$일 때,

$-1 < r < 1$이고 $a_1 > 0$이므로

(i)과 같은 방법으로 계산해 보면

$a_1 + a_2 \geq 10$

임을 알 수 있다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=\frac{27}{2}$, $r=-\frac{2}{3}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{81}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=81$이므로

$p+q=10+81=91$

정답 91

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로

$a_1>0$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r(단, r은 유리수)라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<1$

이다.

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고 이 세 항의 곱이 216이므로 수열 $\{a_n\}$의 정수인 세 항의 값을

x, y, $z(|x|>|y|>|z|)$

라 하면

$xyz=216$

이다.

이때, $216=2^3\times3^3$이고

$|x|\times|y|\times|z|=216$

이므로

$|x|$의 값의 최솟값은 9이다.

(ⅰ) $|x|=9$일 때,

$|y|=6$, $|z|=4$

두 수 $|x|$, $|y|$가 등비수열 $\{a_n\}$의 서로 다른 두 항이므로

$$\frac{|y|}{|x|}=|r|^m$$

을 만족시키는 자연수 m이 존재한다.

$\frac{|y|}{|x|}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이므로

$|r|^m=\frac{2}{3}$

이고, 공비 r이 유리수이어야 하므로

$m=1$, $|r|=\frac{2}{3}$

이다. 이때,

$\frac{|z|}{|y|}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

이므로 세 수 x, y, z는 등비수열 $\{a_n\}$의 연속된 세 항의 값이다.

한편 $|r|=\frac{2}{3}$에서

$r=\frac{2}{3}$ 또는 $r=-\frac{2}{3}$

ⓐ $r=\frac{2}{3}$일 때,

a_1의 최솟값은 9이고

이때 $a_2=6$이므로

$a_1+a_2=9+6=15>10$

이다. 즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

ⓑ $r=-\frac{2}{3}$일 때,

$xyz=216$이고

세 수 x, y, z는 등비수열 $\{a_n\}$의 연속된 세 항의 값이므로

$x<0$, $y>0$, $z<0$

이어야 한다.

즉, $x=-9$, $y=6$, $z=-4$

이때, $a_1>0$이므로 2보다 큰 자연수 k에 대하여 $a_k=-9$

이면 $a_1+a_2>10$이다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

$a_2=-9$일 때,

$$a_1=a_2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-9\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{2}$$

이므로

$$a_1+a_2=\frac{27}{2}+(-9)=\frac{9}{2}<10$$

이다. 즉, 조건 (가)를 만족시킨다.

(ⅱ) $|x|>9$일 때,

$-1<r<1$이고 $a_1>0$이므로

(ⅰ)과 같은 방법으로 하면

$a_1+a_2\geq 10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=\frac{27}{2}$, $r=-\frac{2}{3}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{81}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=81$이므로

$p+q=10+81=91$

30. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)=4\ln 2=\ln 16$에서

$e^{f(1)}=16$

또

$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$에서

$$e^{f(x)}=\frac{g(x)}{1+xf'(x)}$$

$g(x)=e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}$

이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 e^{f(x)}\,dx+\int_1^2 xf'(x)e^{f(x)}\,dx$$

$$=\int_1^2 e^{f(x)}\,dx+\left[xe^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 e^{f(x)}\,dx$$

$=2e^{f(2)}-e^{f(1)}$

$=2e^{f(2)}-16$

$=34$

이므로

$e^{f(2)}=25$

따라서

$$\int_1^2 xg(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx+\int_1^2 x^2f'(x)e^{f(x)}\,dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx+\left[x^2e^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 2xe^{f(x)}\,dx$$

$$=4e^{f(2)}-e^{f(1)}-\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$$

$$=100-16-\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$$

$=53$

에서

$$\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx=84-53=31$$

정답 31

2026학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 6. 5.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ①	03. ③	04. ③	05. ②
06. ④	07. ⑤	08. ⑤	09. ②	10. ①
11. ⑤	12. ②	13. ④	14. ②	15. ①
16. 2	17. 6	18. 133	19. 8	
20. 85	21. 42	22. 38		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{2 \times \frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$= 2^1$$
$$= 2$$

정답 ②

2. **출제의도** : 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = 2x - 1$ 에서

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$
$$= 2 \times 1 - 1$$
$$= 1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = 8$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1) = 2\sum_{k=1}^{7} a_k + \sum_{k=1}^{7} 1$$
$$= 2 \times 8 + 1 \times 7$$
$$= 23$$

정답 ③

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = -x^2 + a$와 함수 $y = 5x - a$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 $x = 3$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} (-x^2 + a)$$
$$= -9 + a$$
$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} (5x - a)$$
$$= 15 - a$$

$f(3) = 15 - a$

이므로

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$$

에서

$-9 + a = 15 - a$

따라서

$a = 12$

정답 ③

5. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$$\int_0^2 (6x^2-2x+1)dx = \left[2x^3-x^2+x\right]_0^2$$
$$=14-0$$
$$=14$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이고

$a>0$이므로

$a+1=8$에서

$a=7$

함수 $f(x)$의 주기가 π이고

$b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서

$a+b=7+2=9$

정답 ④

7. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=5x^2+xf(x)$

이므로

$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$

따라서

$$g'(3)=30+f(3)+3\times f'(3)$$
$$=30+2+3\times 1$$
$$=35$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)>0$에서 $\sin\theta>0$

$2\cos\theta=\sin\theta$ …… ㉠

㉠에서 $\sin\theta>0$이므로 $\cos\theta>0$

㉠의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로 이를 위 등식에 대입하면

$4\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$

$5\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 만족시키는 함수의 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

에서

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}\{xf(x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{3}xf(x)dx+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx = 36$$

이때 $f(x)=x^2+ax$이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx = \int_{-3}^{3} x(x^2+ax)dx$$
$$= \int_{-3}^{3} (x^3+ax^2)dx$$
$$= 2\int_{0}^{3} ax^2 dx$$
$$= 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3$$
$$= 2\times 9a$$
$$= 18a$$

따라서

$18a=36$

이므로

$a=2$

정답 ②

10. 출제의도 : 로그의 성질과 로그방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\log_a(x+3)$이

곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점 A의 좌표를 구해 보자

$\log_a(x+3)=\log_a(-x+3)$에서

$x+3=-x+3$

$x=0$

$x=0$일 때, $y=\log_a 3$이므로

점 A의 좌표는 $(0,\ \log_a 3)$이다.

곡선 $y=\log_a(x+3)$에서

$y=0$일 때

$\log_a(x+3)=0$

$x+3=1$

$x=-2$

그러므로 점 B의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

곡선 $y=\log_a(-x+3)$에서

$y=0$일 때

$\log_a(-x+3)=0$에서

$-x+3=1$

$x=2$

그러므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

원점을 O라 하면

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$에서

$$\sqrt{3}=\frac{\log_a 3}{2}$$

$\log_a 3 = 2\sqrt{3}$

$a^{2\sqrt{3}}=3$

따라서

$$a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

정답 ①

11. 출제의도 : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x=t^3-t^2-t+1$에 $t=1$을 대입하면
$x=1^3-1^2-1+1=0$ (거짓)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면
$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-1$$
이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는

$v=3\times1^2-2\times1-1=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이고 시각 $t=1$의 좌우에서 속도 v의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=1$이다. 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-2$$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$a=6\times1-2=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

조건 (가)에서 $a_3=a_1$ …… ㉠

(i) $a_3=a_2-3$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=a_2-3=(a_1-3)-3$

$a_3=a_1-6$

이 식은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3=a_2-3$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=a_2-3=2a_1-3$

㉠에서

$a_3=2a_3-3$

$a_3=3$

$a_4=a_3-3=0$ 또는 $a_4=2a_3=6$

(iii) $a_3=2a_2$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=2(a_1-3)=2a_1-6$

㉠에서

$a_3=2a_3-6$

$a_3=6$

$a_4=a_3-3=3$ 또는 $a_4=2a_3=12$

(iv) $a_3=2a_2$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=2a_2=2(2a_1)=4a_1$

㉠에서 $a_3=4a_3$

$a_3=0$

$a_4=a_3-3=-3$ 또는 $a_4=2a_3=0$

(i) ~ (iv)에서

$a_4=-3$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=3$ 또는 $a_4=6$ 또는 $a_4=12$

이므로

a_4의 최댓값은 12

정답 ②

13. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에서

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)

가 성립해야 하므로

$$\int_0^k\left\{(3x^2-7x+2)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\right\}dx=0$$

$$\int_0^k\left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx=0$$

$$\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k=0$$

$$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$$

$3k^3-11k^2+8k=0$

$k(k-1)(3k-8)=0$

이때 $k>2$ 이므로 $k=\frac{8}{3}$

정답 ④

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$

조건에서 $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이고

$\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$이므로

$\overline{PQ}$

$=\frac{\sin(\angle QAP)}{\sin(\angle APQ)}\times\overline{AQ}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\times 3\sqrt{2}$

$=2$

점 P는 선분 BC의 중점이고 점 Q는 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}$

$=\frac{1}{2}\overline{BC}+2+\frac{1}{6}\overline{BC}$

$=\frac{2}{3}\overline{BC}+2$

$\frac{1}{3}\overline{BC}=2,\ \overline{BC}=6$

한편, $\overline{BQ}=\frac{5}{6}\overline{BC}=5$이고 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ABQ)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}$

$=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times 2\sqrt{7}\times 5}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times 2\sqrt{7}\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=22$

이므로

$\overline{AC}=\sqrt{22}$

이때

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$=\frac{3}{4}$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$

이므로

$R=\frac{\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}\pi$

정답 ②

15. 출제의도 : 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$($a,\ b,\ c,\ d$는 상

수, $a\neq 0$)이라 하자

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=c$이므로

$c=6$

$f'(x)=3ax^2+2bx+6$ …… ㉠

$x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$는 미분가능하고

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $g'(x)=f'(x)$,

$-1<x<1$에서

$g'(x)=-f'(x)$ …… ㉡

이다.

조건 (가)에서 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하므로

$a\neq -1$, $a\neq 1$에서

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=g'(a)$$

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

의 값이 0 이하이므로

㉡에서 함수 $f(x)$는

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $f'(x)\leq 0$

$-1<x<1$에서 $f'(x)\geq 0$

을 만족시킨다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 극값을 가지므로

$f'(-1)=f'(1)=0$이어야 한다.

㉠에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+6=3a(x+1)(x-1)$

$3ax^2+2bx+6=3ax^2-3a$

양변의 일차항 계수와 상수항을 비교하면

$2b=0$에서 $b=0$

$6=-3a$에서 $a=-2$

$f(x)=-2x^3+6x+d$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

의 값이 존재하고

$x\to 1+$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$ …… ㉢

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+k\}=-f(1)$

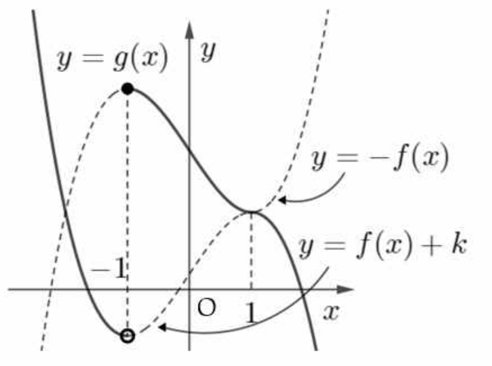
$f(1)+k=-f(1)$이므로

$f(1)=-\frac{k}{2}$ …… ㉣

한편 $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}\{-f(x)\}$

$=-f(1)=g(1)$

이고 ㉢에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 13이므로

$g(-1)=-f(-1)=13$

$f(-1)=2-6+d=-13$이므로

$d=-9$

$f(x)=-2x^3+6x-9$

㉣에서

$f(1)=-2+6-9=-\frac{k}{2}$

$k=10$

따라서

$$k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{1}{4}+3-9\right)$$
$$=\frac{15}{4}$$

정답 ①

16. **출제의도** : 로그에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$ …… ㉠

진수 조건에 의해

$x+1>0$, $x-1>0$이므로 $x>1$

㉠에서

$\log_5(x+1)(x-1)=\log_{5^2}3^2$

$\log_5(x^2-1)=\log_5 3$

즉, $x^2-1=3$에서 $x^2=4$

따라서 $x>1$이므로

$x=2$

정답 2

17. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+4x$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2+4x)dx$$
$$=x^3+2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+2x^2+3$

이므로

$f(1)=1+2+3=6$

정답 6

18. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2}$$
$$=91+42$$
$$=133$$

정답 133

19. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$이므로

$a=20$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

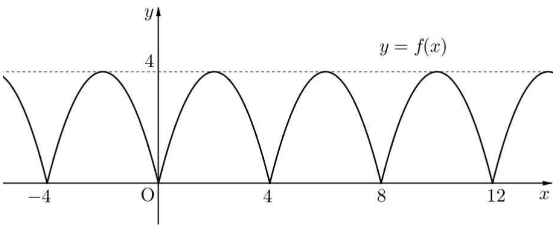
$f(2)=24-36+20=8$

정답 8

20. **출제의도** : 주기함수를 이해하고 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le x < 4$일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x) = x$에서

$-x^2 + 4x = x$

$-x(x-3) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 3$

방정식 $f(x) = x$의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 실근을 구하는 것은 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \le x < 4$일 때,

$f(x) = 0$에서 $x = 0$

$f(x) = 3$에서 $-x^2 + 4x = 3$

$-(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 3$

그러므로 $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 모든 실근은 0, $\boxed{1}$, 3이므로

$$a_1 = 0,\ a_2 = \boxed{1},\ a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3이고, 공차가 모두 $\boxed{4}$인 등차수열이다.

따라서

$a_{20} = a_{3\times 7 - 1} = 1 + 6 \times 4 = 25$,

$a_{21} = a_{3\times 7} = 3 + 6 \times 4 = 27$,

$a_{22} = a_{3\times 8 - 2} = 0 + 7 \times 4 = 28$

이므로

$a_{20} + a_{21} + a_{22} = 25 + 27 + 28 = \boxed{80}$이다.

이때 $p = 1$, $q = 4$, $r = 80$이므로

$p + q + r = 85$

정답 85

21. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = (x-1)(x-2)$

(ⅰ) $a < 1$ 또는 $a > 2$일 때,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x) \times f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

(ⅱ) $1 < a < 2$일 때,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x) \times (-f(x))}{f(x)} = -\lim_{x\to a} g(x) = -g(a)$$

(ⅲ) $a = 1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{g(x) \times f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1-} g(x) = g(1),$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$

$$=-\lim_{x\to1+}g(x)$$

$$=-g(1)$$

$a=1$에서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $g(1)=-g(1)$이므로

$g(1)=0$ …… ㉠

(iv) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$

$$=-\lim_{x\to2-}g(x)$$

$$=-g(2),$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2+}g(x)$$

$$=g(2)$$

$a=2$에서 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-g(2)=g(2)$이므로

$g(2)=0$ …… ㉡

(i) ~ (iv)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉠, ㉡에서

$g(1)=g(2)=0$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$g(x)=f(x)h(x)$

(단, $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.

한편,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

(v) $a<1$ 또는 $a>2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq0$이고

$$\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$=\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$$

(vi) $1<a<2$일 때,

$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq 0$이고

$-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$

(vii) $a=1$일 때,

$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

$=\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$,

$\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

$=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$

$a=1$에서 $\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

이어야 한다.

즉, $\frac{|h(1)-1|}{h(1)}=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$이므로

$|h(1)-1|=-|h(1)-1|$

$h(1)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이다.

(viii) $a=2$일 때,

$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$,

$\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$

$a=2$에서 $\lim_{x\to 2}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$이므로

$-|h(2)-1|=|h(2)-1|$

$h(2)=1$ …… ㉣

이다.

(ⅴ) ~ (ⅷ)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉢, ㉣에서

$h(1)=h(2)=1$

이어야 한다.

이때, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)-1=(x-1)(x-2)$

즉, $h(x)=f(x)+1$

따라서

$g(x)=f(x)\times(f(x)+1)$

이고,

$f(-1)=(-1-1)(-1-2)=6$

이므로

$g(-1)=6\times(6+1)=42$

정답 42

[참고]

$h(x)=f(x)+1$

$=(x-1)(x-2)+1$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이므로 모든 실수 a에 대하여 $h(a)\neq 0$을 만족시킨다.

22. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선

$y=2^x+\frac{k}{2}$, $y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$

가 만나는 점 A의 x좌표를 a라 하면

$2^a+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^a+k-2$

$2^a=t(t>0)$라 하면

$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$

$2t^2+(4-k)t-2k=0$

$(t+2)(2t-k)=0$

$t>0$이므로

$t=\frac{k}{2}$

즉, $2^a=\frac{k}{2}$이므로

$a=\log_2\frac{k}{2}$

이고,

$2^{\log_2\frac{k}{2}}+\frac{k}{2}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k$

이므로 점 A의 좌표는

$\left(\log_2\frac{k}{2},\ k\right)$

이다.

이때, 실수 k에 대하여 $2^{\log_2\frac{k}{2}}=\frac{k}{2}$이므로 점 A는 곡선 $2^x=\frac{y}{2}$, 즉 $y=2^{x+1}$ 위를 움직인다.

한편, 곡선 $y=2^{x-2}-3$은 곡선 $y=2^{x+1}$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선

$y=2^{x-2}-3$과 만나는 점 B의 좌표는

$\left(\log_2\frac{k}{2}+3,\ k-3\right)$

이고, 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

이다.

이때 원점 O에서 직선 AB까지의 거리를 h라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times h=16$

에서

$h=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

이다.

한편, 직선 AB의 방정식은

$y-k=-\left(x-\log_2\frac{k}{2}\right)$

즉, $x+y-k-\log_2\frac{k}{2}=0$이고 원점과 직선 AB사이의 거리가 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$이므로

$$\frac{\left|-k-\log_2\frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\left|-k-\log_2 k+1\right|=\frac{32}{3}$$

$k>1$이므로

$$k+\log_2 k-1=\frac{32}{3}$$

$$k+\log_2 k=\frac{35}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=35$이므로

$p+q=38$

정답 38

■ **[선택: 확률과 통계]**

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ⑤ 27. ①
28. ⑤ 29. 44 30. 115

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 문자 a, a, a, a, b, c 중에서

문자 a가 4개 있으므로

이 6개의 문자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=6\times 5=30$

정답 ③

24. 출제의도 : 확률의 덧셈정리와 배반사건, 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=1\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=1-\mathrm{P}(A)\\&=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

정답 ④

25. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식에서 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(2x-1)^5(x+1)=(2x-1)^5\times x+(2x-1)^5$

이므로

다항식 $(2x-1)^5(x+1)$의 전개식에서

x^3의 계수는 $(2x-1)^5$의 전개식에서

x^2의 계수와 x^3의 계수의 합과 같다.

$(2x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-1)^r={}_5C_r2^{5-r}(-1)^rx^{5-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

x^2항은 $r=3$일 때이고

x^3항은 $r=2$일 때이므로

x^2의 계수와 x^3의 계수의 합은

${}_5C_3\times2^2\times(-1)^3+{}_5C_2\times2^3\times(-1)^2$

$=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times(-4)+\dfrac{5\times4}{2\times1}\times8$

$=40$

정답 ③

26. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건은 A^C이다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되도록 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 홀수 1, 3, 5, 7이 적혀 있는 4장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 택하여 양 끝에 나열한 후, 나머지 5장의 카드를 나열된 홀수가 적힌 2장의 카드 사이에 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C)&=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times5!}{7!}\\&=\frac{(4\times3)\times5!}{7!}\\&=\frac{4\times3}{7\times6}\\&=\frac{2}{7}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{2}{7}\\&=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

남학생 4명, 여학생 1명을 선택한 경우의 수는

${}_5C_4\times{}_3C_1={}_5C_1\times{}_3C_1=5\times3=15$

남학생 5명을 선택한 경우의 수는

${}_5C_5=1$

선택한 5명의 학생을 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉게 하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$(15+1)\times24=384$

정답 ①

28. **출제의도** : 독립시행을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 시행을 5번 반복한 후

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수인 사건을 X,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상인 사건을 Y라 하면

구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)$

이다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

이다.

이 시행을 5번 반복할 때,

3의 배수의 눈이 나온 횟수를

m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$,

3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수를

n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$라 하면

$m+n=5$

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수이려면 n이 홀수이어야 한다. 즉,

$n=1$ 또는 $n=3$ 또는 $n=5$

이다.

$n=1$일 때, $m=4$

$n=3$일 때, $m=2$

$n=5$일 때, $m=0$

이므로

$$\mathrm{P}(X)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{10}{3^5}+\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}$$

$$=\frac{122}{243}$$

한편,

$n=1,\ m=4$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+1=6$

$n=3,\ m=2$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+3=8$

$n=5,\ m=0$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+5=10$

그러므로 사건 $X\cap Y$는

$n=3,\ m=2$ 또는 $n=5,\ m=0$

일 때이고,

$$\mathrm{P}(X\cap Y)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}$$

$$=\frac{112}{243}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

$$=\frac{\frac{112}{243}}{\frac{122}{243}}=\frac{56}{61}$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a+b=8$인 사건을 X,

$b \geq c$인 사건을 Y라 하면

$a+b=8$ 또는 $b \geq c$일 확률은

$\mathrm{P}(X \cup Y)$

이고,

사건 $X \cap Y$는 $a+b=8$이고 $b \geq c$인 사건이다.

(ⅰ) $a+b=8$인 경우

$a+b=8$을 만족시키는 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$

이다.

한편 c는 1부터 6까지 모든 수가 가능하므로

$$\mathrm{P}(X)=\frac{5}{6^2}\times 1=\frac{5}{36}$$

(ⅱ) $b \geq c$인 경우

$b \geq c$를 만족시키는 두 수 b, c의 순서쌍 (b, c)의 개수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{H}_2 &= {}_{6+2-1}\mathrm{C}_2 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{7\times 6}{2\times 1} \\ &= 21 \end{aligned}$$

한편, a는 1부터 6까지 모든 수가 가능하므로

$$\mathrm{P}(Y)=1\times\frac{21}{6^2}=\frac{7}{12}$$

(ⅲ) $a+b=8$이고 $b \geq c$인 경우

$a+b=8$이고 $b \geq c$인 경우는 다음과 같다.

$a=2$, $b=6$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 6

$a=3$, $b=5$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, 4, 5

$a=4$, $b=4$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, 4

$a=5$, $b=3$일 때,

c의 값은 1, 2, 3

$a=6$, $b=2$일 때,

c의 값은 1, 2

그러므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \cap Y) &= \frac{6+5+4+3+2}{6^3} \\ &= \frac{5}{54} \end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \cup Y) &= \mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X \cap Y) \\ &= \frac{5}{36}+\frac{7}{12}-\frac{5}{54} \\ &= \frac{15+63-10}{108} \\ &= \frac{17}{27} \end{aligned}$$

따라서 $p=27$, $q=17$이므로

$$\begin{aligned} p+q &= 27+17 \\ &= 44 \end{aligned}$$

정답 44

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)의 x에 1, 2, 3, 4를 각각 대입하면

$f(2)+3 \geq f(1)+1$
$f(3)+3 \geq f(2)+2$
$f(4)+3 \geq f(3)+3$
$f(5)+3 \geq f(4)+4$
이므로
$1 \leq f(1) \leq f(2)+2$,
$f(2)-1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
조건 (나)에서 $f(2)$의 값은 홀수이므로
$f(2)$의 값은 1 또는 3 또는 5

(ⅰ) $f(2)=1$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 3$,
$1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 3
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$3\times20=60$

(ⅱ) $f(2)=3$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 5$,
$2 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5\times10=50$

(ⅲ) $f(2)=5$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 5$
$4 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값은 모두 4이므로 경우의 수는 1
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5\times1=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
구하는 함수 f의 개수는
$60+50+5=115$

정답 115

■ **[선택: 미적분]**
23. ① **24.** ② **25.** ④ **26.** ② **27.** ③
28. ① **29.** 109 **30.** 25

23. 출제의도 : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\times3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = \frac{12}{0+1} = 12$$

정답 ①

24. 출제의도 : 음함수로 나타내어진 함수에서 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$3x+y+\cos(xy)=2$
의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3+\frac{dy}{dx}-\sin(xy)\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\{1-x\sin(xy)\}\frac{dy}{dx}=y\sin(xy)-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)-3}{1-x\sin(xy)}$$

(단, $1-x\sin(xy)\neq 0$)

이때 $x=0$, $y=1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{0-3}{1-0}=-3$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x+1$

따라서 이 접선의 x절편은

$-3x+1=0$에서

$$x=\frac{1}{3}$$

정답 ②

25. **출제의도** : 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 미지수를 구한 후 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}-3+\frac{a+\frac{6}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)$$

$=0-3+a=0$

즉 $a=3$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n}-3+\frac{3(n+3)-3}{n+3}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}-3+3-\frac{3}{n+3}\right)$$

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{11}{6}$$

따라서

$$S=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=3\times\frac{11}{6}$$

$$=\frac{11}{2}$$

이므로

$$a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}$이므로

$g'(a)=\dfrac{1}{8}$

에서

$f'(g(a))=8$

이때

$f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}$

에서

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}$

이고

$g(a)=b$

라 하면

$$\begin{aligned}f'(g(a))&=f'(b)\\&=3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}\end{aligned}$$

이고

$f'(g(a))=8$

이므로

$3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}=8$

$3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}-8=0$

$(e^{b}-2)(3e^{2b}+4)=0$

$e^{b}>0$이므로 $e^{b}=2$

즉, $b=\ln 2$

$g(a)=b$

에서

$a=f(b)$

이므로

$$\begin{aligned}a&=f(\ln 2)\\&=e^{3\ln 2}-3e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}\\&=e^{\ln 8}-3e^{\ln 4}+4e^{\ln 2}\\&=8-3\times 4+4\times 2\\&=4\end{aligned}$$

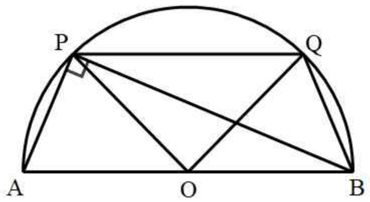
따라서

$a+f'(g(a))=4+8=12$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 OPA는

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$, $\angle AOP=\pi-2\theta$

인 이등변삼각형이다. 사각형 ABQP는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BQP=\pi-\theta$이고, 선분 AB와 선분 PQ가 평행하므로 $\angle OBQ=\theta$이다.

따라서 삼각형 OBQ는

$\overline{OQ}=\overline{OB}=1$, $\angle BOQ=\pi-2\theta$

인 이등변삼각형이다.

또, 삼각형 OPQ는

$\overline{OP}=\overline{OQ}=1$,

$\angle POQ=\pi-2(\pi-2\theta)=4\theta-\pi$

인 이등변삼각형이다.

이때, 사각형 ABQP의 넓이는

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times sin(\pi-2\theta)\\&\quad+\frac{1}{2}\times 1\times 1\times sin(4\theta-\pi)\\&=\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\sin(4\theta-\pi)\\&=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta\end{aligned}$$

이므로

$f'(\theta)=2\cos 2\theta-2\cos 4\theta$

이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$일 때 삼각형 ABP는

$\angle\mathrm{BAP}=a$, $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$

인 직각삼각형이므로

$$\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

이다. 이때,

$$\begin{aligned}\cos 2a&=\cos(a+a)\\&=\cos a\cos a-\sin a\sin a\\&=\cos^2 a-\sin^2 a\\&=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)\\&=2\cos^2 a-1\\&=2\times\frac{1}{10}-1\\&=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

이고, 마찬가지 방법으로

$$\begin{aligned}\cos 4a&=\cos(2a+2a)\\&=2\cos^2 2a-1\\&=2\times\frac{16}{25}-1\\&=\frac{7}{25}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(a)&=2\cos 2a-2\cos 4a\\&=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)-2\times\frac{7}{25}\\&=-\frac{54}{25}\end{aligned}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 사잇값의 정리와 합성함수의 미분법 및 이계도함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $f(-3)f(3)<0$이므로

사잇값의 정리에 의하여

$f(\alpha)=0\ (-3<\alpha<3)$

을 만족시키는 α가 존재한다.

또한, 조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$5(f(x))^4\times f'(x)+3(f(x))^2\times f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}\quad\cdots\cdots ㉠$$

다시 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}&20(f(x))^3\times(f'(x))^2+5(f(x))^4\times f''(x)\\&\quad+6f(x)\times(f'(x))^2+3(f(x))^2\times f''(x)\\&=\frac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&20(f(x))^3\times(f'(x))^2+5(f(x))^4\times f''(x)\\&\quad+6f(x)\times(f'(x))^2+3(f(x))^2\times f''(x)\\&=\frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}\quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡은 x에 대한 항등식이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$$0=\frac{-2(\alpha+2)(\alpha-1)}{\left(\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}\right)^2}$$

따라서

$\alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$

(i) $\alpha=-2$일 때

㉠에 $x=\alpha=-2$를 대입하면

$$a=\frac{2(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}}=\frac{-3}{\frac{9}{2}}=-\frac{2}{3}$$

이때 ㉠에서

$5(f(x))^4\times f'(x)+3(f(x))^2\times f'(x)$

$=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}$

이므로 $x=2$를 대입하면

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$=\dfrac{2\times2+1}{2^2+2+\dfrac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{64}{51}$

즉 ,

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$=\dfrac{64}{51}$

이고, 이것은 조건 (나)의 $f'(2)>0$ 을 만족시킨다.

또, 조건 (가)에 $x=\alpha=-2$를 대입하면

$-\dfrac{2}{3}\times(-2)+b=\ln\left\{(-2)^2+(-2)+\dfrac{5}{2}\right\}$

$\dfrac{4}{3}+b=\ln\dfrac{9}{2}$

$b=-\dfrac{4}{3}+\ln\dfrac{9}{2}$

(ⅱ) $\alpha=1$일 때

㉠에 $x=\alpha=1$을 대입하면

$a=\dfrac{2\times1+1}{1+1+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{3}{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{2}{3}$

이때 ㉠에서

$5(f(x))^4\times f'(x)+3(f(x))^2\times f'(x)$

$=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}-\dfrac{2}{3}$

이므로 $x=2$를 대입하면

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$=\dfrac{2\times2+1}{2^2+2+\dfrac{5}{2}}-\dfrac{2}{3}$

즉

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$=-\dfrac{4}{51}$

그런데 조건 (나)에서 $f'(2)>0$이므로 (좌변) ≥ 0, (우변) <0

따라서 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$a=-\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}+\ln\dfrac{9}{2}$

이므로

$$a\times e^b=-\dfrac{2}{3}\times e^{-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}}$$
$$=-\dfrac{2}{3}\times e^{-\frac{4}{3}}\times e^{\ln\frac{9}{2}}$$
$$=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$$
$$=-3e^{-\frac{4}{3}}$$

정답 ①

29. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여

$a_1=\alpha\times\sin\dfrac{\pi}{2}+\beta\times\cos\dfrac{\pi}{2}=\alpha$

$a_2=\alpha\times\sin\pi+\beta\times\cos\pi=-\beta$

$a_3=\alpha\times\sin\dfrac{3}{2}\pi+\beta\times\cos\dfrac{3}{2}\pi=-\alpha$

$a_4=\alpha\times\sin2\pi+\beta\times\cos2\pi=\beta$

$a_5=\alpha$

$\vdots$

이므로

수열 $\{a_n\}$은

$\alpha,\ -\beta,\ -\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \cdots$

이다.

따라서

$a_{4n-2}=-\beta$, $a_{4n-3}=\alpha$

이고

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=\alpha^2\beta^2=4$

에서

$\alpha\beta=-2$ 또는 $\alpha\beta=2$

그런데 α, $\beta(\alpha>\beta)$는 정수이므로

$\alpha=2$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=-1$, $\beta=-2$ 또는

$\alpha=2$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-2$

이다.

이때, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=6$$

$$-\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=6 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

이고 ㉠을 만족시키기 위해서는

$-1<r<1$

이어야 한다.

따라서

$$-\beta\times\frac{b_1}{1-r}=\alpha\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

(ⅰ) $\alpha=2$, $\beta=1$일 때

$$-\frac{b_1}{1-r}=6$$

에서 $1-r>0$이므로

$b_1<0$

이것은 $b_1>0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=-1$, $\beta=-2$일 때

$$2\times\frac{b_1}{1-r}=-\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$2=\frac{-r}{1+r},\quad 2+2r=-r$$

$$r=-\frac{2}{3}$$

따라서

$$\frac{2b_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2b_1}{\frac{5}{3}}=\frac{6b_1}{5}=6$$

에서

$b_1=5$

이므로

$$b_3=b_1r^2=5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

(ⅲ) $\alpha=2$, $\beta=-1$일 때

$$\frac{b_1}{1-r}=2\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$1=\frac{2r}{1+r},\quad 1+r=2r,\quad r=1$$

이것은 $-1<r<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\alpha=1$, $\beta=-2$일 때

$$2\times\frac{b_1}{1-r}=\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$2=\frac{r}{1+r},\quad 2+2r=r,\quad r=-2$$

이것은 $-1<r<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$$b_1=5,\quad b_3=\frac{20}{9}$$

이므로

$$b_1\times b_3=5\times\frac{20}{9}=\frac{100}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=100$ 이므로

$p+q=109$

정답 109

30. **출제의도** : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+e^{-x}}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{1+e^{-x}}=0$

이고,

$h'(x)=\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$

이므로

$0<h(x)<2$

이다.

$f(h(x))>0$일 때, $g(x)=f(h(x))$이므로

$g'(x)=f'(h(x))h'(x)$

이고,

$f(h(x))<0$일 때, $g(x)=-f(h(x))$이므로

$g'(x)=-f'(h(x))h'(x)$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 조건 (가)에 의하여 $x=0$에서 극소이므로

$g'(0)=0$

이때, $g(0)>0$이므로

$f(h(0))>0$ 또는 $f(h(0))<0$ …… ㉠

그러므로

$g'(0)=f'(h(0))h'(0)=\dfrac{1}{2}f'(1)$

또는

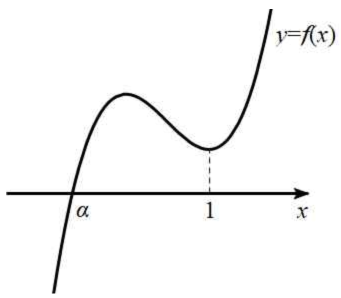
$g'(0)=-f'(h(0))h'(0)=-\dfrac{1}{2}f'(1)$

이므로 $g'(0)=0$이려면 $f'(1)=0$이어야 한다.

또, $g'(x)=f'(h(x))h'(x)$ 또는 $g'(x)=-f'(h(x))h'(x)$에서 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)>0$이고, 함수 $g'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 바뀌므로 $f'(x)$의 부호가 $x=h(0)=1$의 좌우에서 바뀐다.

즉, 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가져야 하고 ㉠에서 $f(1)>0$ 또는 $f(1)<0$이다.

만일 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극소이고, 함수 $|f(h(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1)>0$이어야 한다.



또, $f(\alpha)=0$이고 $h(x)=\alpha$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$가 $h(x)=\alpha$인 x에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha\le 0$이어야 한다.

이때 $0<h(x)<2$에서 $f(h(x))>0$이므로

$g(x)=f(h(x))$

이고,

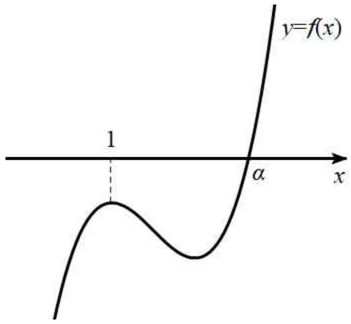
$$g'(x)=f'(h(x))h'(x)$$
$$=f'\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)\times\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

이 경우

$$g'(\ln 3)=f'\left(\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3}}\right)\times\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}$$
$$=f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\times\dfrac{3}{8}$$

에서 $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$이므로 $g'(\ln 3)>0$이다.

이것은 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 이 경우 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극소이고 함수 $|f(h(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1)<0$이어야 한다.



마찬가지로 $f(\alpha)=0$이고 $h(x)=\alpha$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$가 $h(x)=\alpha$인 x에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha \geq 2$이어야 한다.
이때 $0<h(x)<2$에서 $f(h(x))<0$이므로
$g(x)=-f(h(x))$
이고,

$$g'(x)=-f'(h(x))h'(x)$$
$$=-f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\times\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

이 경우

$$g'(\ln 3)=-f'\left(\frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right)\times\frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=-f'\left(\frac{3}{2}\right)\times\frac{3}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right)>0$이면 조건 (나)의 $g'(\ln 3)<0$을 만족시킨다.
또, 조건 (나)에서

$$|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$$

이고 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\times\left\{-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

즉, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$
한편, $f'(1)=0$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
$f'(x)=3(x-1)(x-a)$ (a는 1보다 큰 상수)
로 놓을 수 있다.
이때,

$$f(x)=x^3-\frac{3(a+1)}{2}x^2+3ax+C$$

(C는 적분상수)

라 하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{3(a+1)}{8}+\frac{3a}{2}+C$$
$$=\frac{9}{8}a-\frac{1}{4}+C,$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3(a+1)}{2}+3a=\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}=-\frac{9}{8}a+\frac{1}{4}-C$$

즉, $C=-\frac{21}{8}a+1$이므로

$$f(x)=x^3-\frac{3(a+1)}{2}x^2+3ax-\frac{21}{8}a+1$$

그러므로

$$g(0)=-f(1)=\frac{9}{8}a-\frac{1}{2}$$

이때 $f(2)\leq 0$이어야 하므로

$$3-\frac{21}{8}a\leq 0$$

즉, $a\geq\frac{8}{7}$이고

$$g(0)\geq\frac{9}{8}\times\frac{8}{7}-\frac{1}{2}=\frac{11}{14}$$

이므로 $g(0)$의 최솟값은 $\frac{11}{14}$이다.

따라서 $p+q=14+11=25$

정답 25

■ [선택: 기하]
23. ② 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ③
28. ④ 29. 20 30. 36

23. **출제의도** : 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :
$\vec{a}=(2,\ 6)$, $\vec{b}=(k,\ -6)$에서
$\vec{a}+\vec{b}=(2+k,\ 0)$
$\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합이 4이므로
$(2+k)+0=4$, $k=2$

정답 ②

24. **출제의도** : 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은
$6y=6(x+3)$, 즉 $y=x+3$
위의 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로
$a=1+3=4$

정답 ④

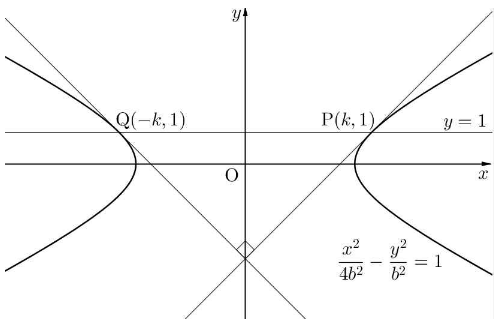
25. **출제의도** : 법선벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 점 $A(4,\ 0)$, $B(2,\ -4)$에 대하여
$\overrightarrow{AB}=(2,\ -4)-(4,\ 0)=(-2,\ -4)$
이므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$에 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은
$-2(x-4)-4(y-0)=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$
따라서 이 직선의 y절편은 2이다.

정답 ②

26. **출제의도** : 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이해하고 쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x$이고, $a>0$, $b>0$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$에서 $a=2b$ …… ㉠
그러므로 이 쌍곡선의 방정식은
$\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



이 쌍곡선이 직선 $y=1$과 만나는 점 중 제1사분면의 점을 P, 제2사분면의 점을 Q라 하고, 점 P의 x좌표를 k $(k>0)$이라 하면 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로
$P(k,\ 1)$, $Q(-k,\ 1)$

두 점 P, Q가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{k^2}{4b^2}-\frac{1}{b^2}=1$에서 $b^2=\frac{k^2}{4}-1$ ...... ㉡

쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{kx}{4b^2}-\frac{y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{k}{4}x-b^2$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 두 점 P, Q에서의 접선이 y축에 대하여 대칭이고 서로 수직이므로 점 P에서의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

즉, $\frac{k}{4}=1$이므로 $k=4$

㉡에서 $b^2=4-1=3$

㉠에서 $a^2=4b^2=4\times3=12$

따라서 $a^2+b^2=15$

정답 ①

27. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\vec{a}+\vec{b}|=6$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36\ \cdots\ ㉠\end{aligned}$$

마찬가지로 $|2\vec{a}-\vec{b}|=9$의 양변을 제곱하여 정리하면 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=81$에서

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=81\ \cdots\ ㉡$

한편, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$에서

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$, 즉 $|\vec{a}|=|\vec{b}|\ \cdots\ ㉢$

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=18\ \cdots\ ㉣$

$5|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=81\ \cdots\ ㉤$

$5\times$㉣$-$㉤을 하면

$9\vec{a}\cdot\vec{b}=9$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\ \cdots\ ㉥$

㉥을 ㉣에 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|^2=17$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{17}$

㉥에서

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle\mathrm{AOB})=1$

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{17}$

$$\begin{aligned}\sin(\angle\mathrm{AOB})&=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{AOB})}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{17}\right)^2}\\&=\frac{12\sqrt{2}}{17}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\sin(\angle\mathrm{AOB})$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{17})^2\times\frac{12\sqrt{2}}{17}=6\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{17}$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{17}$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이다. 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고 $|\vec{a}+\vec{b}|=6$에서

$|\vec{a}+\vec{b}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2\overline{\mathrm{OM}}=6$

$\overline{\mathrm{OM}}=3$

직각삼각형 OAM에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AM}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}$

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 정의와 도형의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

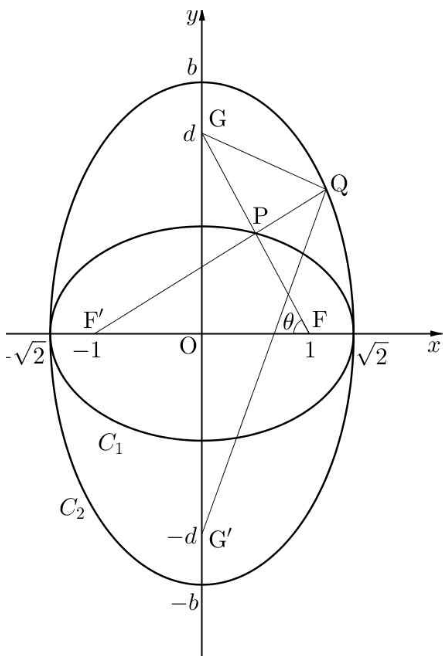
타원 $C_1 : \frac{x^2}{a^2}+y^2=1$의 장축의 길이가 $2a$이고, $\overline{GP}=\overline{PF}$이므로

$\overline{GP}+\overline{PF'}=\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

즉, $2a=2\sqrt{2}$에서 $a=\sqrt{2}$

이때 $c^2=a^2-1=1$에서 $c=1$이므로

$F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$



$\overline{PF}=k\ (k>0)$이라 하면 $\overline{GF}=2k$이고,

$\overline{PF'}=2\sqrt{2}-\overline{PF}=2\sqrt{2}-k$

$\angle PFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 GOF에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OF}}{\overline{GF}}=\frac{1}{2k}$ …… ㉠

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{PF}^2+\overline{F'F}^2-\overline{PF'}^2}{2\times\overline{PF}\times\overline{F'F}}$$

$$=\frac{k^2+4-(2\sqrt{2}-k)^2}{2\times2\times k}$$

$$=\frac{4k\sqrt{2}-4}{4k}$$

$$=\frac{k\sqrt{2}-1}{k}$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{2k}=\frac{k\sqrt{2}-1}{k}$

$2k\sqrt{2}=3$

$k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

그러므로 직각삼각형 GOF에서

$\overline{OG}^2=\overline{GF}^2-\overline{OF}^2$

이므로

$d^2=4k^2-1$

$=4\times\frac{9}{8}-1=\frac{7}{2}$

타원 C_2의 꼭짓점 중 y좌표가 양수인 점의 y좌표를 b라 하면

$b^2-(\sqrt{2})^2=\frac{7}{2}$

이므로

$b^2=\frac{11}{2}$

이때 $b>0$이므로

$b=\frac{\sqrt{22}}{2}$

따라서 $\overline{QG}+\overline{QG'}$의 값은 타원 C_2의 장축의 길이이므로

$\overline{\mathrm{QG}}+\overline{\mathrm{QG'}}=2b=2\times\frac{\sqrt{22}}{2}=\sqrt{22}$

정답 ④

29. **출제의도** : 쌍곡선의 정의와 도형의 성질을 이용하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 쌍곡선은 y축에 대하여 대칭이므로

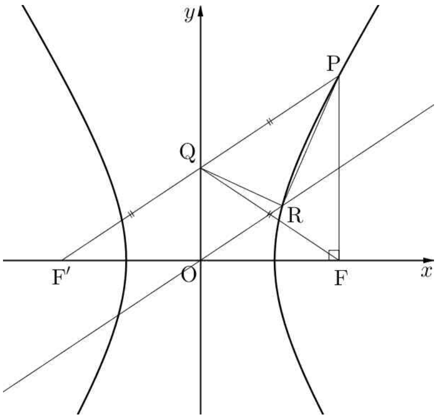
$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QF}}$

즉, 점 Q는 세 점 P, F′, F를 지나는 원의 중심이고 이때 선분 PF′이 이 원의 지름이므로

$\angle \mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{2}$

또, 삼각형 QF′O와 삼각형 PF′F가 서로 닮음이고 그 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=2\times\overline{\mathrm{OQ}}=4$



한편, 직선 F′P와 직선 OR이 서로 평행하며 $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}$이고, 삼각형 PQR의 넓이가 3이므로 삼각형 QF′O의 넓이도 3이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF'}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=3$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF'}}\times2=3$, $\overline{\mathrm{OF'}}=3$

그러므로

$\overline{\mathrm{F'Q}}^2=\overline{\mathrm{OF'}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2$

$=3^2+2^2=13$

즉, $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{13}-4$이므로 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{13}-4$이다.

따라서 $p=-4$, $q=2$이므로

$p^2+q^2=16+4=20$

정답 20

30. **출제의도** : 벡터의 성질과 내적을 이용하여 벡터의 내적의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\overrightarrow{\mathrm{BE}}=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{3-1}$

이므로 점 E는 선분 AC를 3:1로 외분하는 점이다.

선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P′을

$\overrightarrow{\mathrm{BP'}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

가 되도록 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-(\overrightarrow{\mathrm{BP'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

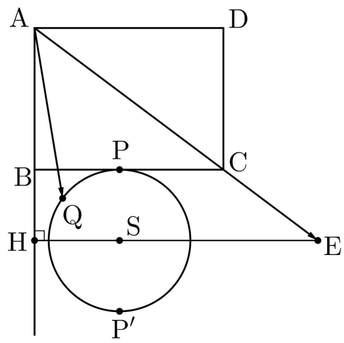
$=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\overrightarrow{\mathrm{BP'}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$에서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}=0$

즉, 점 Q는 선분 PP′을 지름으로 하는 원 위의 점이다.



점 Q가 나타내는 원의 중심을 S, 점 S에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 E는 직선 SH 위의 점이다.

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{SQ})$$
$$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SQ}$$

이고, $0\le t\le 8$인 실수 t에 대하여

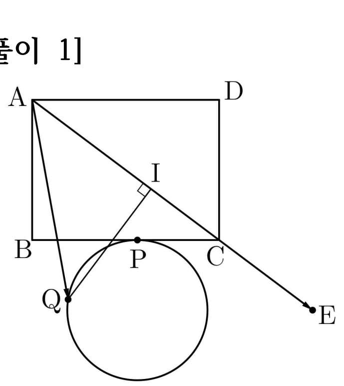
$\overrightarrow{HS}=t\overrightarrow{BC}$

이므로 $t=0$이고 두 벡터 $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{AE}$의 방향이 서로 반대일 때 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값은 최소이다. 즉, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값은

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}+0+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SQ}$$
$$=|\overrightarrow{AH}|^2-|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{SQ}|$$
$$=9^2-\sqrt{9^2+12^2}\times 3$$
$$=81-15\times 3$$
$$=36$$

정답 36

[다른 풀이 1]



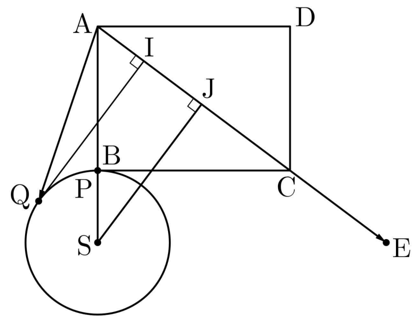
점 Q에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 점 P의 위치에 관계없이 선분 AE 위에 있고

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AQ}|\cos(\angle QAE)$$
$$=\overline{AE}\times\overline{AI}$$

이다. 이때

$$\overline{AE}=\frac{3}{2}\overline{AC}=\frac{3}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$$
$$=\frac{3}{2}\times\sqrt{6^2+8^2}=\frac{3}{2}\times 10=15$$

이고 선분 AI의 길이는 점 P가 점 B와 일치하고 직선 QI가 점 Q가 나타내는 원에 접할 때 최소이다.



점 Q가 나타내는 원의 중심을 S라 하고 점 S에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 J라 하면

$$\overline{AJ}=\overline{AS}\cos(\angle SAJ)=9\times\frac{3}{5}=\frac{27}{5}$$

$$\overline{AI}=\overline{AJ}-\overline{IJ}=\frac{27}{5}-3=\frac{12}{5}$$

따라서 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값은

$$\overline{AE}\times\overline{AI}=15\times\frac{12}{5}=36$$

[다른 풀이 2]

네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $(0,\ 6)$, $(0,\ 0)$, $(8,\ 0)$, $(8,\ 6)$이라 하자. $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$에서

$$\overrightarrow{BE}=\frac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{2}$$
$$=\frac{3(8,\ 0)-(0,\ 6)}{2}$$
$$=(12,\ -3)$$

이다. 점 P가 선분 BC 위를 움직이는 점이므로 $0 \le t \le 8$인 실수 t에 대하여 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$으로 놓을 수 있다.
점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB}) = 0$에서

$(x-t,\ y) \cdot ((x-t,\ y) - (0,\ -6))$

$= (x-t,\ y) \cdot (x-t,\ y+6)$

$= (x-t)^2 + y(y+6) = 0$

$(x-t)^2 + (y+3)^2 = 9$

즉, 점 Q는 점 $(t,\ -3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

이때 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} = k$라 하면

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$

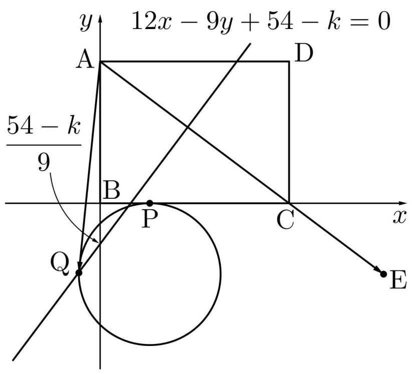
$= ((12,\ -3) - (0,\ 6)) \cdot ((x,\ y) - (0,\ 6))$

$= (12,\ -9) \cdot (x,\ y-6)$

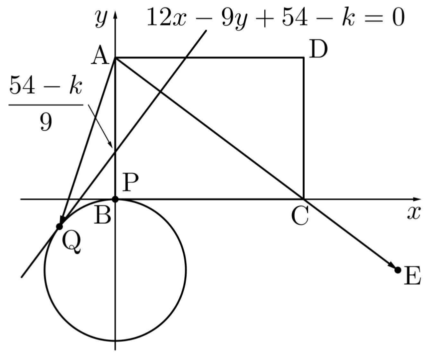
$= 12x - 9(y-6)$

$= 12x - 9y + 54 = k$

$12x - 9y + 54 - k = 0$



즉, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 값은 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 Q를 지나는 직선의 y절편이 최대일 때 최소이다.



따라서 $t=0$일 때, 즉, 원

$x^2 + (y+3)^2 = 9$

에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선의 y절편이 최대일 때 k의 값이 최소이므로 k의 최솟값을 k_0이라 하면

$\frac{|-9 \times (-3) + 54 - k_0|}{\sqrt{12^2 + (-9)^2}} = 3$

에서 $81 - k_0 = 45$

$k_0 = 81 - 45 = 36$

2025학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2024.12.19.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ④	03. ⑤	04. ②	05. ④
06. ⑤	07. ③	08. ①	09. ④	10. ③
11. ②	12. ①	13. ⑤	14. ④	15. ②
16. 7	17. 33	18. 96	19. 41	
20. 36	21. 16	22. 64		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}$$
$$=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$
$$=5^1=5$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=3x^2-8$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=f'(2)$$
$$=3\times 2^2-8$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 양수 k의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 양수 k이므로

$$a_n=k^n$$

$\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_1}=30$에서

$$\frac{k^4}{k^2}+\frac{k^2}{k}=30$$
$$k^2+k=30$$
$$k^2+k-30=0$$
$$(k+6)(k-5)=0$$

$k>0$이므로

$$k=5$$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$에서

$$\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2-}(5x+a)=-10+a$$
$$\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}(x^2-a)=4-a$$
$$f(-2)=4-a$$

이므로

$-10+a=4-a$, $a=7$

따라서 상수 a의 값은 7이다.

정답 ②

5. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$ 에서

$f'(x)=2x\times(3x^2-x)+(x^2+1)\times(6x-1)$

따라서

$f'(1)=2\times2+2\times5=14$

정답 ④

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$ 에서

$\sin\theta=\frac{1}{5}$

따라서

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=9x^2+2$

따라서

$f(1)=9\times1^2+2=11$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 값을 간단히 나타낼 수 있는가?

풀이 :

$a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\log 10+\log_2 2+\log_2 10$

$=-1+1+\log_2 10=\log_2 10$

$a\times b=\log_2 10\times\log 2=1$

정답 ①

9. **출제의도** : 정적분의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx \;\cdots\cdots\; ㉠$$

㉠의 좌변은 정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

그러므로 ㉠에서

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

즉, $\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

이때

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (3x^2 - 16x - 20)dx$$

$$= \left[x^3 - 8x^2 - 20x \right]_0^a$$

$$= a^3 - 8a^2 - 20a$$

이므로

$a^3 - 8a^2 - 20a = 0$에서

$a(a^2 - 8a - 20) = 0$

$a(a+2)(a-10) = 0$

따라서 양수 a의 값은 10이다.

정답 ④

10. **출제의도** : 코사인함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x) = a\cos bx + 3$의 그래프는

함수 $y = a\cos bx$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

a가 자연수이므로

$f(0) \geq f(x)$

이다.

한편, 함수 $y = a\cos bx + 3$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{b}$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = \dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 가지므로

$a + 3 = 13 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{2\pi}{b} \leq \dfrac{\pi}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

이어야 한다.

㉠에서

$a = 10$

㉡에서

$b \geq 6$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $b=6$일 때

$10 + 6 = 16$

정답 ③

11. **출제의도** : 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=x'=3t^2-3t-6$

$a=v'=6t-3$

이때 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은

$v=3t^2-3t-6=3(t-2)(t+1)=0$

에서

$t=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 구하는 가속도는

$6\times2-3=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 시그마의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$$

$a_1=2$이므로 $b_2=4$

등차수열 $\{b_n\}$에서 $b_1=2$, $b_2=4$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.

즉, $b_n=2n$

한편, ㉠의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}(n-1)^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{a_n}{b_{n+1}}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2=n-\frac{1}{2}$$

$b_{n+1}=2(n+1)$이므로

$$a_n=2(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2n^2+n-1\,(n\ge2)$$

이 때, $a_1=2$이므로

$a_n=2n^2+n-1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k-1)$$
$$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}-1\times5$$
$$=120$$

정답 ①

13. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때,

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$

이고, $f'(0)=-7$이므로

$2k+k+2=-7$

즉, $k=-3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

이고, $f(3)=12$이므로 점 P의 좌표는

P$(3, 12)$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=4x$이므로

$$B-A=\int_0^3\{4x-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\{4x-(x^3-7x+6)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^3+11x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3$$

$$=-\frac{1}{4}\times81+\frac{11}{2}\times9-6\times3$$

$$=\frac{45}{4}$$

정답 ⑤

[참고]

점 Q의 x좌표를 a라 하면

$B-A$

$$=\int_a^3\{4x-f(x)\}dx-\int_0^a\{f(x)-4x\}dx$$

$$=\int_a^3\{4x-f(x)\}dx+\int_0^a\{4x-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\{4x-f(x)\}dx$$

14. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

원 O의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=r$

이고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{2}{3}r$

또한 $\overline{\mathrm{CE}}=x$라 하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이가 각각

$\frac{1}{2}\times r\times r\times sinA=\frac{1}{2}r^2\sin A$

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}r\times(r+x)\times sinA=\frac{5}{6}r(r+x)\sin A$

이고 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이므로

$\frac{1}{2}r^2\sin A:\frac{5}{6}r(r+x)\sin A=9:35$

$3r+3x=7r,\ x=\frac{4}{3}r$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$$

이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{3}r,\ \sin A:\sin C=8:5$

이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{\sin A}{\sin C}$$

$$=\frac{5}{3}r\times\frac{8}{5}$$

$$= \frac{8}{3}r$$

$\angle \mathrm{ACB} = \theta$라 하면 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{8}{3}r\right)^2 + \left(\frac{7}{3}r\right)^2 - \left(\frac{5}{3}r\right)^2}{2 \times \frac{8}{3}r \times \frac{7}{3}r}$$

$$= \frac{11}{14}$$

이므로

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}$$

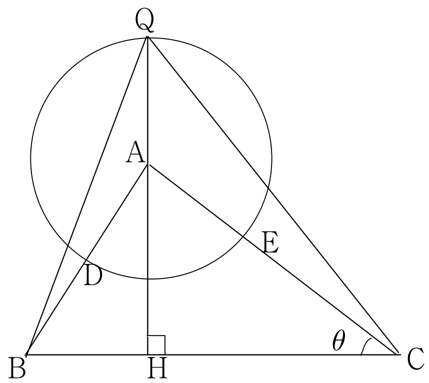
$$= \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta} = 2\times 7$, 즉 $\frac{\frac{5}{3}r}{\sin\theta} = 14$ 에서

$$\frac{5}{3}r = 14\sin\theta = 14 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = 5\sqrt{3}$$

$$r = 3\sqrt{3}$$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{AC}}\sin\theta$$

$$= \frac{7}{3}r\sin\theta$$

$$= \frac{7}{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{15}{2}$$

따라서 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 삼각형 ABC의 외부의 점을 Q라 하면, 삼각형 PBC의 넓이가 최대일 때는 점 P가 점 Q의 위치에 있을 때이다.

이때

$$\overline{\mathrm{QH}} = r + \overline{\mathrm{AH}}$$

$$= 3\sqrt{3} + \frac{15}{2}$$

이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3} \times \left(3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right)$$

$$= 36 + 30\sqrt{3}$$

정답 ④

15. **출제의도** : 함수의 미분가능과 함수의 극대, 극소 및 그래프를 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0) = 7$

$x < 0$일 때,

$g'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$

이므로

$$\lim_{x\to 0-} g'(x) = 15$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0+} f(x)=7$

$\lim_{x\to0+} f'(x)=15$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를

$p(p<0)$라 하면

$f(x)=px^2+15x+7$

$f'(x)=2px+15$

$f'(x)=0$에서

$2px+15=0$

$x=-\frac{15}{2p}$

이때, $p<0$이므로

$-\frac{15}{2p}>0$

한편, $h(x)=x^3+ax^2+15x+7$이라 하면

$h'(x)=3x^2+2ax+15$

이차방정식 $h'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-45$

(i) 이차방정식 $h'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때

$\frac{D}{4}=a^2-45>0$에서

$a<-3\sqrt{5}$ 또는 $a>3\sqrt{5}$

이때, 방정식 $h'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 즉, 삼차함수 $h(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

조건 (나)에서

x에 대한 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

함수 $g(x)$, 즉 함수 $h(x)$는 $x<0$에서 극댓값과 극솟값을 갖고,

방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을

α, $\beta(\alpha<\beta<0)$

라 하면

$\beta=\alpha+4$, $-\frac{15}{2p}=\beta+4$ …… ㉠

이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+15=0$의 서로 다른 두 실근이 α, $\alpha+4$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=-\frac{2a}{3}$ …… ㉡

$\alpha(\alpha+4)=5$ …… ㉢

㉢에서

$\alpha^2+4\alpha-5=0$

$(\alpha+5)(\alpha-1)=0$

$\alpha<0$이므로

$\alpha=-5$

$\alpha=-5$를 ㉡에 대입하면

$-5+(-5+4)=-\frac{2a}{3}$

$a=9$

$\alpha=-5$를 ㉠에 대입하면

$\beta=-5+4=-1$

$-\frac{15}{2p}=-1+4$

$p=-\frac{5}{2}$

(ii) 이차방정식 $h'(x)=0$이 중근을 가질 때

$\frac{D}{4}=a^2-45=0$이고,

$a\neq3\sqrt{5}$이므로

$a=-3\sqrt{5}$

$h'(x)=0$에서

$3x^2-6\sqrt{5}x+15=0$

$3(x-\sqrt{5})^2=0$

$x=\sqrt{5}$

이때 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 이차방정식 $h'(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때

이때 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(i), (ii), (iii)에서

$a=9,\ p=-\dfrac{5}{2}$

이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+15x+7 & (x\le 0) \\ -\dfrac{5}{2}x^2+15x+7 & (x>0) \end{cases}$$

따라서

$g(-2)=(-2)^3+9\times(-2)^2+15\times(-2)+7$

$\quad\quad=5$

$g(2)=-\dfrac{5}{2}\times 2^2+15\times 2+7=27$

이므로

$g(-2)+g(2)=5+27=32$

정답 ②

16. **출제의도** : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 :

로그의 진수의 조건에 의해

$x-3>0,\ 3x-5>0$

즉, $x>3$ …… ㉠

$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$ …… ㉡

이때

$\log_2(x-3)=\log_{2^2}(x-3)^2=\log_4(x-3)^2$

이므로 ㉡에서

$\log_4(x-3)^2=\log_4(3x-5)$

즉, $(x-3)^2=3x-5$에서

$x^2-6x+9=3x-5$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

따라서 ㉠에 의해 $x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(9x^2+4x)dx$

$=3x^3+2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=6$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$이므로

$f(2)=24+8+1=33$

정답 33

18. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$a_n + a_{n+4} = 12$이므로

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = \sum_{n=1}^{4} (a_n + a_{n+4})$$

$$= \sum_{n=1}^{4} 12 = 12 \times 4 = 48$$

$$\sum_{n=9}^{16} a_n = \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4})$$

$$= \sum_{n=9}^{12} 12 = 12 \times 4 = 48$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{4} (a_n + a_{n+4}) + \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4})$$

$$= 48 + 48 = 96$$

정답 96

19. **출제의도** : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$에서

$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2$

$= 6(x+a)(x-2a)$

$f'(x) = 0$에서

$x = -a$ 또는 $x = 2a$

$a > 0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x = -a$에서 극댓값을 갖고, $x = 2a$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$이고

$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3$

이므로

$7a^3 = \frac{7}{27}$에서

$a^3 = \frac{1}{27}$

$a > 0$이므로

$a = \frac{1}{3}$

따라서

$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$

이므로

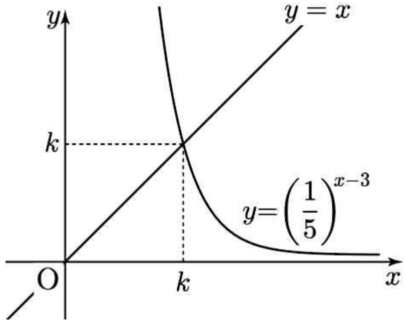
$f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$

정답 41

20. **출제의도** : 지수의 성질과 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$는 다음 그림과 같다.



$x>k$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(f(x))=3x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표가 k이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k$$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=k$에서

$k\times 5^k=5^3$

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)&=f\left(\left(\frac{1}{k\times 5^k}\right)^3\right)\\ &=f\left(\left(\frac{1}{5^3}\right)^3\right)\\ &=f\left(\frac{1}{5^9}\right) \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

한편,

$x>k$에서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로

k보다 작은 임의의 두 양수

y_1, y_2 $(y_1<y_2)$에 대하여

$$f(x_1)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x_1-3}=y_1$$

$$f(x_2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2-3}=y_2$$

인 x_1, x_2 $(k<x_2<x_1)$이 존재한다.

㉠에서

$f(f(x_1))=3x_1$, $f(f(x_2))=3x_2$

이므로

$f(f(x_1))>f(f(x_2))$

즉, $f(y_1)>f(y_2)$이므로

함수 $f(x)$는 $x<k$에서 감소하고,

$x>k$에서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로

함수 $f(x)$는 $x>k$에서 감소한다.

그러므로 ㉡에서

$$f(\alpha)=\frac{1}{5^9}$$

인 실수 α $(\alpha>k)$가 존재한다.

이때

$$f(\alpha)=\left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3}=\frac{1}{5^9}$$

에서

$\alpha-3=9$, 즉 $\alpha=12$

따라서 ㉠에 의해 구하는 값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)&=f\left(\frac{1}{5^9}\right)\\ &=f(f(\alpha))\\ &=3\alpha\\ &=3\times 12\\ &=36\end{aligned}$$

정답 36

21. **출제의도** : 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta)=0$인 실수 β가 존재한다.

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의

값이 존재하므로 $f(\beta)=0$인 β에 대하여

$\lim_{x\to\beta} f(x)=0$이고, $\lim_{x\to\beta} f(2x+1)=0$

함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(2\beta+1)=0$

즉 $2\beta+1$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

마찬가지 방법으로 $2\beta+1$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $2(2\beta+1)+1=4\beta+3$도 방정식 $f(x)=0$ 근이고

$2(4\beta+3)+1=8\beta+7$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

만약 $\beta\neq 2\beta+1$, 즉 $\beta\neq -1$이면

β, $2\beta+1$, $4\beta+3$, $8\beta+7$가 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 근이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$는 $x=-1$만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0$에서

$f(-1)=-1+a-b+4=0$

$b=a+3$

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3+ax^2+(a+3)x+4 \\ &=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\} \end{aligned}$$

$f(x)\neq(x+1)^3$이므로

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 실근은 존재하지 않는다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a-1)^2-16<0$

$a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$

$-3<a<5$

$f(1)=a+b+5=a+(a+3)+5=2a+8$에서 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때,

$2\times4+8=16$

정답 16

22. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 첫째항의 절댓값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서 $|a_m|=|a_{m+2}|$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 3이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $|a_3|$이 홀수인 경우

$a_4=a_3-3$이고 짝수이다.

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}(a_3-3)$

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\frac{1}{2}(a_3-3)\right|$

$a_3=1$ 또는 $a_3=-3$

$a_3=1$이면 $a_4=-2$이고 1은 홀수이므로 a_2는 짝수이고 $a_2=2$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_3=-3$이면 $a_4=-6$이고 $a_2=-6$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $|a_3|$이 0 또는 짝수인 경우

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_4</td><td>a_5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_3</td><td rowspan="2">$\frac{1}{2}a_3$</td><td>$\frac{1}{2}a_3-3$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}a_3$</td></tr>
</table>

$|a_3|=\left|\frac{1}{4}a_3\right|$에서 $a_3=0$

$a_3=0$이면 3 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m=0$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
</table>

$a_2=0$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 6이다.

한편, $|a_3|=\left|\frac{1}{2}a_3-3\right|$에서

$a_3=2$ 또는 $a_3=-6$

$a_3=2$이면 $a_4=1$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
</table>

이때 조건을 만족시키는 a_1의 값은 10, 7, 8이다.

$a_3=-6$이면 $a_4=-3$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">-6</td><td>-3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">-12</td><td>-9</td></tr>
<tr><td>-24</td></tr>
</table>

$a_2=-3$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 -9, -24이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합은

$6+(10+7+8)+(9+24)=64$

정답 64

■ [선택: 미적분]
23. ③ 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ①
28. ② 29. 25 30. 17

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=3\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

$$=3$$

정답 ③

24. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^{10}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[x+\ln|x+1|\Big]_0^{10}=10+\ln 11$$

정답 ④

25. **출제의도** : 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_n=\dfrac{n\,a_n}{n^2+3}$이라 하면

$a_n=\dfrac{b_n(n^2+3)}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(n^2+3)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2}=1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\,2}+n-a_n^{\,2}}{\sqrt{a_n^{\,2}+n}+a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+0}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선 $x=t(1\le t\le e)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\sqrt{\frac{t+1}{t(t+\ln t)}}\right)^2=\frac{t+1}{t(t+\ln t)}$$

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(t)\,dt=\int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)}\,dt$$

이때 $t+\ln t=s$라 하면

$$\frac{ds}{dt}=1+\frac{1}{t}=\frac{t+1}{t}$$

이고 $t=1$일 때 $s=1$, $t=e$일 때 $s=e+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)\,dt&=\int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)}\,dt\\&=\int_1^{e+1}\frac{1}{s}\,ds\\&=\Big[\ln s\Big]_1^{e+1}\\&=\ln(e+1)\end{aligned}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이므로 $g(0)=0$, $g'(0)=0$이다.

$g(0)=f(e^0)+e^0=f(1)+1=0$

$f(1)=-1$ …… ㉠

$g'(x)=f'(e^x)\times e^x+e^x$이므로

$g'(0)=f'(e^0)\times e^0+e^0=f'(1)+1=0$

$f'(1)=-1$ …… ㉡

한편, 함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$ 또는 $g'(x)\leq 0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(e^x)\times e^x+e^x\\&=e^x\{f'(e^x)+1\}\end{aligned}$$

에서 모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(e^x)+1\geq 0$, 즉

$f'(e^x)\geq -1$

이어야 한다.

㉡에서 $f'(1)=-1$이고 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3(x-1)^2-1$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\{3(x-1)^2-1\}\,dx\\&=(x-1)^3-x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이고 ㉠에서 $f(1)=-1$이므로

$f(1)=-1+C=-1$, $C=0$

$f(x)=(x-1)^3-x$

$$\begin{aligned}g(x)&=f(e^x)+e^x\\&=(e^x-1)^3-e^x+e^x\\&=(e^x-1)^3\end{aligned}$$

한편, 함수 $h(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $h(8)=k$라 하면 $g(k)=8$에서

$(e^k-1)^3=8$, $e^k-1=2$, $e^k=3$, $k=\ln 3$

따라서

$$h'(8)=\frac{1}{g'(h(8))}=\frac{1}{g'(\ln 3)}$$

$$=\frac{1}{e^{\ln 3}\{f'(e^{\ln 3})+1\}}$$

$$=\frac{1}{3\times[\{3\times(3-1)^2-1\}+1]}=\frac{1}{36}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 부정적분과 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x>0$에서

$f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}<0$이므로

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록이다. 따라서 양수 t에 대하여 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)(x>0)$의 교점은 점 $(t,\ f(t))$ 하나이고, 접선은 곡선의 위쪽에 위치한다.

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대하여

$$g(t)=\int_0^t\{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$$

이때 $f'(x)=-x+e^{1-x^2}$에서 양변에 x를 곱하면 $xf'(x)=-x^2+xe^{1-x^2}$

$$\int xf'(x)\,dx=\int\left(-x^2+xe^{1-x^2}\right)dx$$

$$xf(x)-\int f(x)\,dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$\int f(x)\,dx=xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$g(t)=\left[\frac{f'(t)}{2}x^2-tf'(t)x+f(t)x\right]_0^t-\int_0^t f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}t^2f'(t)-t^2f'(t)+tf(t)-\left[xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+tf(t)-\left(tf(t)+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e\right)$$

$$=-\frac{1}{2}t^2\left(-t+e^{1-t^2}\right)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$$

$$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$$

$$g'(t)=\frac{1}{2}t^2+t^3e^{1-t^2}$$

따라서

$$g(1)+g'(1)=\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비급수를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$a>0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|-a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a<0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|+a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a>0,\ r<0$이거나 $a<0,\ r<0$이다.

(i) $a>0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n})=\frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times(-r)=\frac{20}{3},\quad \frac{40}{3}\times(-r)=\frac{20}{3}$$

$r=-\frac{1}{2}$, $a=5$

(ⅱ) $a<0$, $r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n-1})$$

$$=\frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times r=\frac{40}{3},\ -\frac{20}{3}r=\frac{40}{3}$$

$r=-2$

이때, $r<-1$이므로 $r^2>1$이 되어 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$와 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$ 모두 수렴하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=5$, $r=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$에서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\right\}$$

$$>\frac{1}{700}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$에서

$k=4l-3$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

$k=4l-2$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l-1$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

(단, l은 자연수)이므로

$2n=4p-2$(p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$2n=4p$(p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$n\to\infty$이면 $p\to\infty$이고

$2n=4p-2$, $2n=4p$의 두 경우 모두 각 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\right\}$$

$$=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 m의 값은 1, 3, 5, 7, 9이고, 그 합은

$1+3+5+7+9=25$

정답 25

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극대를 갖는 x의 값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$이고 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(0)=\sin b=0$, $b=k\pi$ (단, k는 정수) …… ㉠

$f(2\pi)=2\pi a+b$이므로

$f(2\pi)=\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$ …… ㉡

이때 $\sin x=x$를 만족시키는 실수 x의 값은 0뿐이므로 ㉡에서

$2\pi a+b=0$, $b=-2\pi a$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$-2\pi a=k\pi$, $a=-\dfrac{k}{2}$ …… ㉣

이고 $f(x)=\sin(ax-2\pi a+\sin x)$이다.

$1\le a\le 2$이고 ㉣에서 $a=-\dfrac{k}{2}$ (k는 정수)이므로

$a=1$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=2$이다.

이때

$f'(x)=\cos(ax-2\pi a+\sin x)\times(a+\cos x)$

에서

$$f'(0)=\cos(-2\pi a)\times(a+1)$$
$$=(a+1)\cos 2\pi a$$

$f'(4\pi)=\cos 2\pi a\times(a+1)=(a+1)\cos 2\pi a$

이고

$f'(2\pi)=\cos 0\times(a+1)=a+1$

이므로 $a=1$ 또는 $a=2$이면

$f'(0)=(a+1)\cos 2\pi a=a+1$

즉, $f'(0)=f'(2\pi)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서

$a=\dfrac{3}{2}$, $b=-2\pi a=-3\pi$

이고

$$f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$$

$$f'(x)=\left(\cos x+\frac{3}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $\cos x+\dfrac{3}{2}\neq 0$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)=0$$

$g(x)=\dfrac{3}{2}x-3\pi+\sin x$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$는 증가하고

$g(0)=-3\pi$, $g(4\pi)=3\pi$

이다. 이때 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$에 대하여 $g(x)=\dfrac{2i-7}{2}\pi$를 만족시키는 실수 x의 값을 β_i라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\beta_1$, $x=\beta_3$, $x=\beta_5$에서 극소이고 $x=\beta_2$, $x=\beta_4$, $x=\beta_6$에서 극대이다. 즉, $n=3$이다.

$g(\beta_2)=-\dfrac{3}{2}\pi$에서

$$\frac{3}{2}\beta_2-3\pi+\sin\beta_2=-\frac{3}{2}\pi$$

$$\sin\beta_2=-\frac{3}{2}(\beta_2-\pi)$$

이때 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-\frac{3}{2}(x-\pi)$는 점 $(\pi,\ 0)$에서만 만나므로 $\beta_2=\pi$이다. 즉, $\alpha_1=\pi$이다.

따라서

$$n\alpha_1-ab=3\times\pi-\frac{3}{2}\times(-3\pi)$$

$$=\frac{15}{2}\pi$$

$p=2,\ q=15$이므로

$p+q=2+15=17$

정답 17

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]
01. ② 02. ⑤ 03. ④ 04. ② 05. ②
06. ② 07. ③ 08. ① 09. ⑤ 10. ①
11. ① 12. ② 13. ④ 14. ⑤ 15. ①
16. 7 17. 5 18. 29 19. 4
20. 15 21. 31 22. 8

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$32^{\frac{1}{4}} \times 4^{-\frac{1}{8}} = (2^5)^{\frac{1}{4}} \times (2^2)^{-\frac{1}{8}}$$
$$= 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{2}{8}} = 2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} = 2$$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$
$$= 3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 9$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 주어진 조건에서 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 = 2$ ……㉠

$a_4 = ar^3 = 4$ ……㉡

㉠을 ㉡으로 나누면

$a = \frac{1}{2}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2} r^3 = 4$에서 $r^3 = 8$

r은 실수이므로

$r = 2$

따라서

$a_6 = ar^5 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 2^4 = 16$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$

$= -2 + 1$

$= -1$

정답 ②

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에서

$f'(x)=(x^2+x-5)+(x+1)(2x+1)$

따라서

$$\begin{aligned}f'(2)&=(2^2+2-5)+(2+1)(2\times2+1)\\&=1+15\\&=16\end{aligned}$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos(\pi+\theta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 에서

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ 이므로

$-\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

따라서

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답 ②

7. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\geq 4)\end{cases}$

가 $x=4$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이면

$$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4+}f(x)=f(4)$$

이다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4-}f(x)&=\lim_{x\to4-}(x-a)^2\\&=(4-a)^2\\&=a^2-8a+16\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4+}(2x-4)=4$$

$f(4)=4$

이므로

$a^2-8a+16=4$

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\times6=12$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

풀이 :

두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합이 4이므로

$\log_2 a + \log_a 8 = 4$에서

$\log_2 a + 3\log_a 2 = 4$

$$\log_2 a + \frac{3}{\log_2 a} = 4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_2 a = X$라 하면 $a > 2$이므로 $X > 1$

㉠에서

$X + \dfrac{3}{X} = 4$, $X^2 - 4X + 3 = 0$

$(X-1)(X-3) = 0$

$X > 1$이므로 $X = 3$

즉, $\log_2 a = 3$에서 $a = 2^3 = 8$

한편, 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 곱이 k이므로

$k = \log_2 a \times \log_a 8 = \log_2 a \times 3\log_a 2$

$= \log_2 a \times \dfrac{3}{\log_2 a} = 3$

따라서 $a + k = 8 + 3 = 11$

정답 ①

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^2 + x$이므로

$$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$$

$$= 5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 4\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$$

$$= 4\int_0^1 (x^2 + x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 + 4x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

[다른 풀이]

$f(x) = x^2 + x$이므로

$$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$$

$$= 5\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^1$$

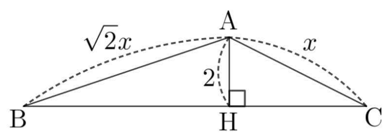
$$= 5 \times \frac{5}{6} - \frac{10}{3} = \frac{5}{6}$$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$이므로 $\overline{AC} = x$라 하면 $\overline{AB} = \sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 이 외접원의 넓이가 50π이므로 $\pi R^2 = 50\pi$에서 $R = 5\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$\sin(\angle \mathrm{ACH}) = \dfrac{2}{x}$, 즉 $\sin C = \dfrac{2}{x}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C} = 2R$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}} = 2R\sin C$

$\sqrt{2}x = 2\times 5\sqrt{2}\times \dfrac{2}{x}$, $x^2 = 20$, $x = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$

정답 ①

11. **출제의도** : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x_1 = t^2 + t - 6$,

$x_2 = -t^3 + 7t^2$

이므로

$x_1 = x_2$에서

$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$

$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

$t^2(t-6) + t - 6 = 0$

$(t-6)(t^2+1) = 0$

$t \geq 0$이므로

$t = 6$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $t = 6$이다.

한편, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = 2t + 1$,

$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$a_1 = \dfrac{dv_1}{dt} = 2$,

$a_2 = \dfrac{dv_2}{dt} = -6t + 14$

시각 $t = 6$에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q이므로

$p = 2$,

$q = -6\times 6 + 14 = -22$

따라서

$p - q = 2 - (-22) = 24$

정답 ①

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} a_k = a_1$

$b_2 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_2 = -2$이므로

$a_1 - a_2 = -d = -2$

따라서 $d = 2$

또한

$b_3 = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} a_k$

$=a_1-a_2+a_3$

$=-d+a_3$

$=a_3-2$

$b_7=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}a_k$

$=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7$

$=-3d+a_7$

$=a_7-6$

이므로 $b_3+b_7=0$ 에서

$(a_3-2)+(a_7-6)$

$=a_3+a_7-8$

$=(a_1+2\times2)+(a_1+6\times2)-8$

$=(a_1+4)+(a_1+12)-8$

$=2a_1+8=0$

따라서 $a_1=-4$

즉 $a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$이므로

$b_1=a_1=-4$

$b_2=a_1-a_2=-2$

$b_3=a_1-a_2+a_3=-2$

$b_4=a_1-a_2+a_3-a_4=-4$

$b_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0$

$b_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=-6$

$b_7=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7=2$

$b_8=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8=-8$

$b_9=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8+a_9=4$

따라서

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$

$=-4+(-2)+(-2)+(-4)+0+(-6)$
$+2+(-8)+4$

$=-20$

정답 ②

[다른풀이]

$b_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$

$=-dn=-2n$

$b_{2n-1}=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots$
$+(a_{2n-1}-a_{2n-2})$

$=a_1+(n-1)d=-4+2(n-1)=2n-6$

따라서

$\sum_{n=1}^{9}b_n=\sum_{n=1}^{5}b_{2n-1}+\sum_{n=1}^{4}b_{2n}$

$=\sum_{n=1}^{5}(2n-6)+\sum_{n=1}^{4}(-2n)$

$=2\times\frac{5\times6}{2}-6\times5-2\times\frac{4\times5}{2}$

$=30-30-20=-20$

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.

이때 $A=2B$이므로

$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$

이어야 한다. 즉,

$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$

$k>4$이므로 $k=6$

정답 ④

14. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각

$\mathrm{A}_n(\mathrm{a}_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{b}_n, 2^{b_n})$ $(a_n < b_n)$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2=10n^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $2^{b_n}-2^{a_n}=3(b_n-a_n)$이므로 이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(b_n-a_n)^2=n^2$$

$a_n<b_n$이므로 $b_n-a_n=n$, 즉 $a_n=b_n-n$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n$$

이므로

$$2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3n$$

$$2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

한편, 곡선 $y=2^x$과 곡선 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 점 B_n의 y좌표와 같다.

따라서

$$x_n=2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

이므로

$$x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$$

$$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로 ㉠에 대입하면

$$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

$$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$$

$$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$$

$$=4x^3+12x^2-6x+C$$

(단, C는 적분상수)

이때 $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$

즉 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$$g(x)=4x^2+12x-6$$

따라서

$$\int_0^3 g(x)dx$$

$$=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$

$$=36+54-18$$

$$=72$$

정답 ①

16. **출제의도** : 로그를 포함하는 방정식의 근을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)-\log_{3^{-1}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)+\log_3(x-4)$

$=\log_3(x+2)(x-4)$

이므로

$\log_3(x+2)(x-4)=3$

$(x+2)(x-4)=3^3$

$x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

진수 조건에 의해서 $x>4$

따라서 $x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=6x^2+2x+1$이므로 $f'(x)$의 한 부정적분은

$\int(6x^2+2x+1)dx=2x^3+x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$에서

$f(x)=2x^3+x^2+x+1$

따라서 $f(1)=5$

정답 5

18. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=36$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=7$ ……㉡

㉠ − ㉡을 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=36-7=29$$

정답 29

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{9}\{(k+1)a_{k+1}-a_{k+1}\}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}ka_k-\sum_{k=2}^{10}a_k=7$$

즉, $\sum_{k=2}^{10}ka_k=\sum_{k=2}^{10}a_k+7$

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}ka_k$$
$$=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k+7$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k+7=36$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=36-7=29$

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

이므로

$f'(1)=3+2a-9=0$

에서

$a=3$

한편, $f'(x)=0$에서

$3x^2+6x-9=0$

$3(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, 극댓값이 28이다.

$$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+b$$
$$=27+b$$

이므로

$27+b=28$

에서

$b=1$

따라서

$a+b=3+1=4$

정답 4

20. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

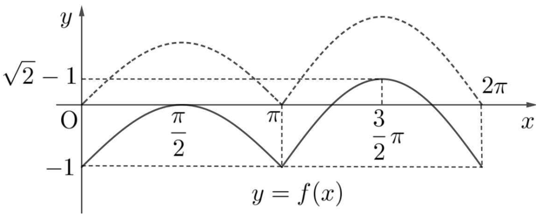
$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=\sin x-1$의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

$\pi\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$, 최솟값은 -1이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로 $f(t)=-1$ 또는 $f(t)=0$이다.

(i) $f(t)=-1$일 때,

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

(ii) $f(t)=0$일 때,

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는

$-\sqrt{2}\sin t-1=0(\pi \le t \le 2\pi)$

$-\sqrt{2}\sin t-1=0$에서 $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi \le t \le 2\pi$이므로 $t=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$0+\pi+2\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{13}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=15$

정답 15

[참고]

함수

$y=-\sqrt{2}\sin x-1(\pi \le x \le 2\pi)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점은 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $-\sqrt{2}\sin x-1=0(\pi \le x \le 2\pi)$의 두 실근의 합은 3π이다.

21. **출제의도** : 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

풀이 :

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서

$2k-8=4k^2+14k$

$k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-1$ 또는 $k=-2$

즉, ㉠에 $k=-1$을 대입하면

$$-10 \le \frac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$$

이므로 $f(1)-f(-1)=-20 \quad \cdots\cdots ㉡$

또, ㉠에 $k=-2$를 대입하면

$$-12 \le \frac{f(0)-f(-2)}{2} \le -12$$

이므로 $f(0)-f(-2)=-24 \quad \cdots\cdots ㉢$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 상수 a, b, c에 대하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=(1+a+b+c)-(-1+a-b+c)$

$=2+2b=-20$

$b=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=c-(-8+4a-2b+c)$

$=8-4a+2\times(-11)$ $(\because b=-11)$

$=-4a-14=-24$

$a=\frac{5}{2}$

즉, $f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c$에서

$f'(x)=3x^2+5x-11$

이므로

$f'(3)=3\times 3^2+5\times 3-11$

$=31$

정답 31

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 상수 α, β에 대하여

$f'(x)=3x^2+\alpha x+\beta$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=\int_{-1}^{1} f'(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+\alpha x+\beta)dx$

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x\right]_{-1}^{1}$

$=2+2\beta=-20$

$\beta=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=\int_{-2}^{0} f'(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}(3x^2+\alpha x-11)dx$ $(\because \beta=-11)$

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2-11x\right]_{-2}^{0}$

$=8-2\alpha-22=-24$

$\alpha=5$

즉, $f'(x)=3x^2+5x-11$이므로

$f'(3)=3\times3^2+5\times3-11$

$=31$

22. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서

$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$

이므로

$a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k=0$ 또는 $a_{n+1}+ka_n=0$

즉, $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$

$a_1=k$이므로

$a_2=a_1-\frac{2}{3}k=k-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}$

또는

$a_2=-ka_1=-k\times k=-k^2$

(i) $a_2=\frac{k}{3}$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times\frac{k}{3}=-\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ) $a_3=-\frac{k}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k}{3}\right)=-\frac{k^2}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ-①) $a_4=-k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k-\frac{2}{3}k=-\frac{5}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k)=k^2$

$a_5=-\frac{5}{3}k$ 일 때,

$a_5<0$

이고,

$a_5=k^2$일 때,

$a_5>0$

이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓐ-②) $a_4=\frac{k^2}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^2}{3}=-\frac{k^3}{3}$

$a_5=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=2$

$a_5=-\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ) $a_3=-\frac{k^2}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=-\frac{k^3}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^3}{3}$

(i -ⓑ-①) $a_4=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k$$
$$=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=-\frac{k(k+4)}{3}<0$

이고

$a_5=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=\frac{k^2(k+2)}{3}>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ-②) $a_4=\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^3}{3}=-\frac{k^4}{3}$

$a_5=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k^2-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{2}$

$a_5=-\frac{k^4}{3}$일 때,

$a_5=-\frac{k^4}{3}<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2=-k^2$일 때,

$$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=-k^2-\frac{2}{3}k$$

또는

$$a_3=-ka_2=-k\times(-k^2)=k^3$$

(ⅱ-ⓐ) $a_3=-k^2-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_2\times a_3=-k^2\times\left(-k^2-\frac{2}{3}k\right)=k^2\left(k^2+\frac{2}{3}k\right)>0$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ-ⓑ) $a_3=k^3$일 때,

$$a_2\times a_3=-k^2\times k^3=-k^5<0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3=k^3$이므로

$$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{2}{3}k$$

또는

$$a_4=-ka_3=-k\times k^3=-k^4$$

(ⅱ-ⓑ-①) $a_4=k^3-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{4}{3}k$$

또는

$$a_5=-ka_4=-k\times\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)=-k^4+\frac{2}{3}k^2$$

$a_5=k^3-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$$k^3-\frac{4}{3}k=0$$

$$k\left(k^2-\frac{4}{3}\right)=0$$

$k>0$이므로

$$k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$a_5=-k^4+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=0$에서

$$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0$$

$$-k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0$$

$k>0$이므로

$$k=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(ⅱ-ⓑ-②) $a_4=-k^4$일 때,

$$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k^4-\frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5=-ka_4=-k\times(-k^4)=k^5$$

$a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5=-k\left(k^3+\frac{2}{3}\right)<0$$

이고,

$a_5=k^5$일 때,

$$a_5>0$$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

k의 값은 2, $\sqrt{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$

따라서 k^2의 값의 합은

$$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=8$$

정답 8

■ [선택: 확률과 통계]
23. ⑤ 24. ① 25. ⑤ 26. ③ 27. ④
28. ④ 29. 994 30. 93

23. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :
숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!}=30$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 독립사건을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :
두 사건 A, B가 서로 독립이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

정답 ①

25. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :
11 이하의 자연수 중에서 7 이상의 홀수는 7, 9, 11이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 선택한 2개의 수 중 1개의 수만 7 이상의 홀수인 경우
나머지 하나는 11개의 자연수 중 3개를 제외한 8개 중에서 하나를 선택해야 하므로 이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{3\times 8}{\frac{11\times 10}{2}}=\frac{24}{55}$$

(ii) 선택한 2개의 수 모두 7 이상의 홀수인 경우
이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{3\times 2}{2}}{\frac{11\times 10}{2}}=\frac{3}{55}$$

(i), (ii)에서 구하는 사건의 확률은

$$\frac{24}{55}+\frac{3}{55}=\frac{27}{55}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]
구하는 사건의 여사건은 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 2개를 선택하는 사건이므로 구하는 사건의 확률은

$$1-\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=1-\frac{\frac{8\times 7}{2}}{\frac{11\times 10}{2}}=1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$$

26. 출제의도 : 표본평균의 확률분포를 이용하여 주어진 확률을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$,

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\dfrac{6}{3}=2$

이다. 그러므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르고, $Z_1=\dfrac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{Y}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=6$,

$\sigma(\overline{Y})=\dfrac{\sigma(Y)}{\sqrt{4}}=\dfrac{2}{2}=1$

이다. 그러므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(6, 1^2)$을 따르고, $Z_2=\dfrac{\overline{Y}-6}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)+\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 8)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{12-m}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{8-6}{1}\right)=1$$

$$\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{12-m}{2}\right)+\mathrm{P}(Z_2\ge 2)=1$$

$$\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{12-m}{2}\right)=1-\mathrm{P}(Z_2\ge 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z_2\le 2)$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포를 따르므로

$\dfrac{12-m}{2}=2$

따라서 $m=8$

정답 ③

27. 출제의도 : 이산확률변수의 분포를 이용하여 평균에 대한 조건을 만족시키는 확률의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$k=0$, $k=2$일 때,

$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)$

$k=1$일 때, $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)$

$\mathrm{P}(X=0)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=b$라 할 때,

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$3a+2b=1$ $\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a$

이고 $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{35}{6}$이므로

$20a+10b=\dfrac{35}{6}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6}$

정답 ④

28. **출제의도** : 조건부확률을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f : X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 선택한 함수 f가 조건을 만족시키는 사건을 A, $f(4)$가 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이다. 한편, a가 b의 약수이면 b는 a의 배수이므로 주어진 조건을 다음과 같이 해석할 수 있다.

'$a \in X$, $b \in X$에 대하여

b가 a의 배수이면 $f(b)$는 $f(a)$의 배수이다.'

이때 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(1)=4$인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 $f(1)$인 4의 배수이어야 한다. 4의 배수인 X의 원소는 4뿐이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=4$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는 1이다.

(ii) $f(1)=3$인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 $f(1)$인 3의 배수이어야 한다. 3의 배수인 X의 원소는 3뿐이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=3$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는 0이다.

(iii) $f(1)=2$인 경우

2는 1의 배수이므로 $f(2)$는 $f(1)$인 2의 배수이어야 한다. 2의 배수인 X의 원소는 2, 4이므로

$f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$

이다. 이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$는 $f(2)$의 배수이어야 하므로 $f(2)$와 $f(4)$의 순서쌍 $(f(2),\ f(4))$는

$(2,\ 2)$, $(2,\ 4)$, $(4,\ 4)$

이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여

$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$

이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3 \times 2 = 6$

이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수도 6이다.

(iv) $f(1)=1$인 경우

2는 1의 배수이므로 $f(2)$는 $f(1)$인 1의 배수이어야 한다. 즉, $f(2)$는 1 또는 2 또는 3 또는 4이다. 이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$는 $f(2)$의 배수이어야 하므로 $f(2)$와 $f(4)$의 순서쌍 $(f(2),\ f(4))$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$,

$(2,\ 2)$, $(2,\ 4)$,

$(3,\ 3)$,

$(4,\ 4)$

이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여 $f(3)$은 1 또는 2 또는 3 또는 4이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$(4+2+1+1)\times 4=32$

이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는

$(2+2+1)\times 4=20$

이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$n(A)=1+1+6+32=40$

$n(A\cap B)=1+6+20=27$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{27}{40}$$

정답 ④

29. **출제의도** : 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 구하는 확률을 정규분포로 근사하여 구할 수 있는가?

풀이 :

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은 $\frac{2}{3}$, 5 이상일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고,

$$\mathrm{E}(X)=16200\times\frac{1}{3}=5400$$

$$\mathrm{V}(X)=16200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=3600=60^2$$

이다. 이때 16200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5400,\ 60^2)$을 따른다.

점 A의 위치가 5700 이하이려면 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수에서 5 이상인 횟수를 뺀 값이 5700 이하이어야 하므로

$(16200-X)-X\le 5700$

$X\ge 5250$

따라서 구하는 확률을 표준정규분포표를 이용해 구한 값 k는

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{P}(X\ge 5250)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5250-5400}{60}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.494+0.5\\&=0.994\end{aligned}$$

따라서

$1000\times k=1000\times 0.994=994$

정답 994

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때,

흰 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = 5$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $_2H_4 = 5$이다.

이 중에서 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는 1이고, 학생 B가 받는 공의 개수가 1인 경우는 흰 공 1개를 받는 경우 또는 검은 공 1개를 받는 경우에서 그 경우의 수가 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 3이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$5 \times 5 - 3 = 22$이다.

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때,

학생 A가 흰 공 1개를 받는다고 하면, 이러한 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = 4$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $_2H_4 = 5$이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 4 \times 5 - 3 = 17$이다.

마찬가지 방법으로 학생 A가 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 17이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $17 + 17 = 34$이다.

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때,

(iii-1) 학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 2개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = 3$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $_2H_4 = 5$이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 2개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 3 \times 5 - 3 = 12$이다.

(iii-2) 학생 A가 검은 공 2개를 받는 경우

(iii-1)과 마찬가지의 방법으로 이 경우의 수는 12이다.

(iii-3) 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_3=4$이고, 이 각각에 대하여 검은 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_3=4$이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$1\times4\times4-3=13$이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때의 경우의 수는

$12+12+13=37$이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$22+34+37=93$

정답 93

■ [선택: 미적분]
23. ⑤ 24. ④ 25. ④ 26. ③ 27. ②
28. ③ 29. 57 30. 25

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\times 5\right)$

$=1\times 5$

$=5$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :
양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가

$\frac{1}{t}+4e^{2t}$

이므로

$f'(t)=\frac{1}{t}+4e^{2t}$

이다. 즉, 양수 x에 대하여

$f'(x)=\frac{1}{x}+4e^{2x}$

이므로

$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+4e^{2x}\right)dx$

$=\ln x+2e^{2x}+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(1)=2e^2+1$이므로

$\ln 1+2e^2+C=2e^2+1$

$C=1$

따라서

$f(x)=\ln x+2e^{2x}+1$

이므로

$f(e)=\ln e+2e^{2e}+1$

$=1+2e^{2e}+1$

$=2e^{2e}+2$

정답 ④

25. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $|r|<\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r|<1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(2r)^{n-1}=0$

이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}=0$$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ii) $|r|>\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r|>1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(2r)^{n-1}$의 값이 존재하지 않는다.

즉, ㉠을 만족시키지 못한다.

(iii) $r=\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

$$=\frac{a_1}{3}$$

이므로

$\frac{a_1}{3}=1$

$a_1=3$

(iv) $r=-\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(-1)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$의 값이 존재하지 않으므로

㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$a_1=3,\ r=\frac{1}{2}$

따라서

$a_2=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로

$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

정답 ④

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=a_1r^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times2^{n+1}}=1$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_1r^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$이고 ㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$2r=1$, 즉 $r=\frac{1}{2}$

㉠에 $r=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\frac{1}{2^n}}{6}=\frac{a_1}{3}=1$$

$a_1=3$

따라서 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_2=\frac{3}{2}$

이고

$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

26. **출제의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}S(t)dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2dt$$

이때 $t^2=u$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $u=\frac{\pi}{6}$ 이고

$2t=\dfrac{du}{dt}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3\sin t^2 dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u\sin u du$$

$$=\frac{\pi}{4}\left([-u\cos u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u du\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+[\sin u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$$

정답 ③

27\. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x\text{---㉠}$$

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$$f'(\pi)+f'(0)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1\text{---㉡}$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0)+f'(0)\times\frac{1}{2}=1,\ \frac{3}{2}f'(0)=1$$

따라서 $f'(0)=\dfrac{2}{3}$ 이므로 ㉡에 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=-1$$

$$f'(\pi)=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

정답 ②

28\. **출제의도** : 치환적분과 부분적분을 이용하여 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0)=f'(0)\sin 0+0=0$

$g(1)=f'(2)\sin\pi+1=1$이므로

$$\int_0^1 g(x)dx+\int_{g(0)}^{g(1)} g^{-1}(x)dx$$

$$=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx$$

$=1\times1-0\times0=1$

따라서

$$\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx=1\quad\cdots\cdots㉠$$

㉠에

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 대입하면

$$\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x+x\}dx$$

$$+2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}=1$$

$$3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\frac{1}{4}=1$$

$$3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\, dx = \frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

한편, $\int_0^2 f(x)\cos \frac{\pi}{2} x dx$ 에서

$x = 2t$라 하면 $\frac{dx}{dt} = 2$이고

$x=0$일 때, $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^2 f(x)\cos \frac{\pi}{2} x\, dx$$

$$= 2\int_0^1 f(2t)\cos \pi t\, dt$$

$u(t) = f(2t)$, $v(t) = \frac{1}{\pi}\sin \pi t$로 놓으면

$u'(t) = 2f'(2t)$, $v'(t) = \cos \pi t$이므로

$$2\int_0^1 f(2t)\cos \pi t\, dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{\pi} f(2t)\sin \pi t\right]_0^1 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin \pi t\, dt$$

$$= 0 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin \pi t\, dt$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\, dx$$

이므로 ㉡에서

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2} x dx = -\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x dx$$

$$= -\frac{4}{\pi} \times \frac{1}{12}$$

$$= -\frac{1}{3\pi}$$

정답 ③

29. 출제의도 : 급수의 합을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

S_m

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+1}\right)\right\}$$

따라서

S_1

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로

$$a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

또한

S_9

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$$

S_{10}

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$$

$$=S_9+\frac{1}{11}$$

이므로

$$a_{10}=S_{10}-S_9$$

$$=\left(S_9+\frac{1}{11}\right)-S_9$$

$$=\frac{1}{11}$$

따라서

a_1+a_{10}

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}$$

$$=\frac{35}{22}$$

이므로 $p=22$, $q=35$

$p+q=57$

정답 57

30. **출제의도** : 절댓값과 지수함수 e^x을 포함한 함수의 부정적분을 구하여 k의 값에 따른 함수의 그래프를 추론하고 그 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

x의 범위에 따라 함수

$$f(x)=\begin{cases}(k-x)e^{-x} & (x\ge 0)\\ (k+x)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

의 한 부정적분을 구하면

$$F(x)=\begin{cases}(x-k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-x-k-1)e^{-x}+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, 함수 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서 $F(x)$는 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0-}F(x)$에서

$C_2=C_1+2$

$g(k)$를 $F(0)$의 최솟값으로 정의하였으므로

$F(0)=-k+1+C_1$ … ㉠

의 최솟값이 $g(k)$이다.

함수 $h(x)=F(x)-f(x)$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-2x-2k-1)e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$$

이고

$$h'(x)=\begin{cases}(-2x+2k+1)e^{-x} & (x>0)\\ (2x+2k-1)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $x=\dfrac{2k+1}{2}$

이고

$x<0$일 때 $x=\dfrac{1-2k}{2}$.

이때 $\dfrac{1-2k}{2}\ge 0$이면 $x<0$에서 $h'(x)<0$

이므로 $x=0$과 $x=\dfrac{2k+1}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-		+	0	-
$h(x)$	↘		↗		↘

또한, $\dfrac{1-2k}{2}<0$일 때 $x=\dfrac{2k+1}{2}$과 $x=\dfrac{1-2k}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{1-2k}{2}$	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	↘		↗		↘

또, $h(0)=-2k+1+C_1$이고

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=C_1,\ \lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$$

이므로 $\frac{1-2k}{2}$의 부호에 따라 C_1의 범위를 정하여 $F(0)$의 최솟값을 구하면

ⅰ) $\frac{1-2k}{2}\geq 0$일 때 $x=0$에서 극솟값 $h(0)$을 갖고 $1-2k\geq 0$이므로

$h(0)=-2k+1+C_1\ \geq\ C_1=\lim_{x\to\infty}h(x)$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\geq f(x)$이므로 $h(x)\geq 0$에서 $C_1\geq 0$이다.

즉, ㉠에서 $F(0)=-k+\ 1+C_1\ \geq\ -k+1$

ⅱ) $\frac{1-2k}{2}<0$일 때

$x=\frac{1-2k}{2}$일 때 $h(x)$의 극솟값은

$h(\frac{1-2k}{2})=-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$이다.

$\frac{1-2k}{2}<0$에서 $(e^{-1})^{\frac{1-2k}{2}}>(e^{-1})^0=1$이므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\ \leq\ C_1$

그러므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$은 $h(x)$의 최솟값이다.

그런데 $F(x)\geq f(x)$에서 $h(\frac{1-2k}{2})\geq 0$이므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\geq 0$

즉, $F(0)=-k+\ 1+C_1$

$$\geq -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1$$

그런데 $g(k)$는 $F(0)$의 최솟값이므로

$$g(k)=\begin{cases}-k+1 & (0<k\leq\frac{1}{2})\\ -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1 & (k>\frac{1}{2})\end{cases}$$

그러므로

$g(\frac{1}{4})+g(\frac{3}{2})=\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)+2e-1=pe+q$

$2e-\frac{7}{4}=pe+q$에서 $p=2,\ q=-\frac{7}{4}$

따라서 $100(p+q)=25$

정답 25

■ [선택: 기하]
23. ③ 24. ④ 25. ⑤ 26. ③ 27. ④
28. ① 29. 63 30. 54

23. **출제의도** : 성분으로 나타낸 두 벡터의 연산을 할 수 있는가?

풀이 :
$\vec{a}=(4,0)$, $\vec{b}=(1,3)$이므로
$$2\vec{a}+\vec{b}=2(4,0)+(1,3)=(8,0)+(1,3)=(9,3)$$
따라서
$(9,3)=(9,k)$
이므로
$k=3$

정답 ③

24. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :
타원 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 중심이 원점이고 $0<b<4$이므로 두 초점은 x축 위에 있다. 이때 두 초점 사이의 거리가 6이므로 두 초점의 좌표는
$(3,0)$, $(-3,0)$
이다.
따라서
$4^2-b^2=3^2$
이므로
$b^2=4^2-3^2=7$

정답 ④

25. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 중점과 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :
두 점 $A(a,b,-5)$, $B(-8,6,c)$에 대하여 선분 AB의 중점이 zx평면 위에 있으므로 중점의 y좌표는 0이다. 즉,
$$\frac{b+6}{2}=0$$
이므로 $b=-6$
또, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 내분하는 점의 x좌표와 z좌표는 0이다. 즉,
$$\frac{1\times(-8)+2\times a}{1+2}=0,\ \frac{1\times c+2\times(-5)}{1+2}=0$$
이므로
$a=4$, $c=10$
따라서
$a+b+c=4+(-6)+10=8$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$에서의 접선의 방정식은
$2ny=2(x+n^2)$
즉, $x-ny+n^2=0$
이 직선이 주어진 원과 만나려면 점 $(1,0)$까지의 거리가 6 이하여야 한다.
즉, $\dfrac{|1+n^2|}{\sqrt{1+n^2}}\le 6$

$\sqrt{1+n^2} \le 6$

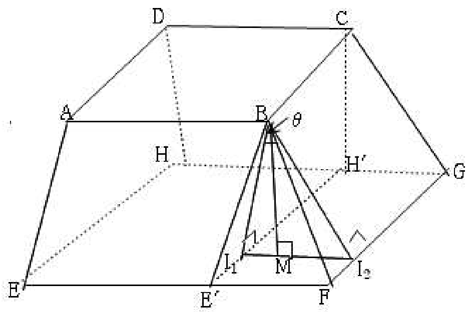
$n^2 \le 35$

따라서 $n=1, 2, 3, 4, 5$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 5이다.

정답 ③

27. 출제의도 : 두 평면이 이루는 이면각의 크기를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :



선분 BC를 지나고 사각형 AEHD와 평행한 평면이 두 선분 EF, HG와 만나는 점을 각각 E′, H′이라 하자.

점 B에서 두 선분 E′H′, FG에 내린 수선의 발을 각각 I_1, I_2라 하고, 사각형 AEHD와 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta = \angle I_1BI_2$

$\overline{BI_1} = \overline{BI_2}$, $\overline{I_1I_2} = 6-4=2$

이등변삼각형 I_1BI_2의 꼭짓점 B에서 선분 I_1I_2에 내린 수선을 발을 M이라 하면

$\overline{BM} = \sqrt{14}$, $\overline{I_1M} = \overline{I_2M} = 1$

직각삼각형 BI_1M에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BI_2} = \overline{BI_1} = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{I_1M}^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{14})^2+1^2} = \sqrt{15}$$

삼각형 BI_1I_2에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{BI_1}^2 + \overline{BI_2}^2 - \overline{I_1I_2}^2}{2\times\overline{BI_1}\times\overline{BI_2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{15})^2 + (\sqrt{15})^2 - 2^2}{2\times\sqrt{15}\times\sqrt{15}} = \frac{13}{15}$$

한편, 사다리꼴 AEHD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{EH})\times\overline{BI_1}$$
$$= \frac{1}{2}\times(4+6)\times\sqrt{15} = 5\sqrt{15}$$

따라서 사각형 AEHD의 평면 BFGC위로의 정사영의 넓이는

$$5\sqrt{15}\times\cos\theta = 5\sqrt{15}\times\frac{13}{15}$$
$$= \frac{13}{3}\sqrt{15}$$

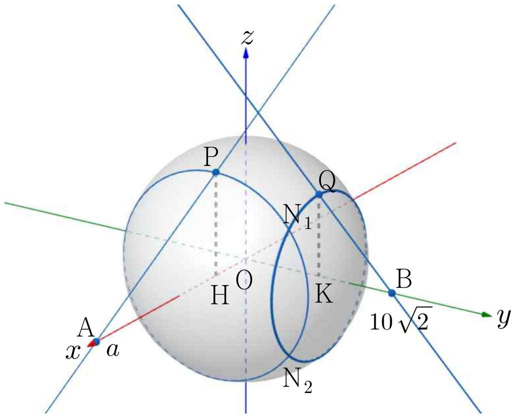
정답 ④

28. 출제의도 : 구의 방정식을 이해하고 공간도형의 성질을 활용하여 공간좌표의 성분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\angle APO = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형 C_1과 $\angle BPO = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형 C_2는 각각 x축과 y축에 중심이 있는 원이고 선분 N_1N_2는 원 C_1의 현이다.

원 C_1위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C_1의 반지름의 길이는 $\overline{PH}$이다.



직각삼각형 OPA에서 구 S의 반지름의 길이는 10이므로 $\overline{AP} = \sqrt{a^2-100}$

$\overline{PH} = 10\sin(\angle POA) = \dfrac{10\sqrt{a^2-100}}{a}$

삼각형 ON_1N_2에서 $\overline{ON_1} = \overline{ON_2} = 10$이므로 코사인법칙에 의해서

$$\overline{N_1N_2}^2 = 10^2 + 10^2 - 2\times 10^2\cos(\angle N_1ON_2)$$
$$= 200(1-\frac{3}{5})$$
$$= 80$$

즉, $\overline{N_1N_2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

선분 N_1N_2와 xy평면이 만나는 점을 R라 하면 $\overline{N_1R} = 2\sqrt{5}$

원 C_2위의 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 K라 하면 원 C_2의 반지름의 길이는 $\overline{QK}$이다.

직각삼각형 OQB에서 구 S의 반지름의 길이는 10이므로

$$\overline{BQ} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - 100} = 10$$

그러므로 $\angle QOB = \angle QBO = \dfrac{\pi}{4}$이고

$$\overline{QK} = \overline{OK} = 10\sin(\angle QOB)$$
$$= 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

그런데 $\overline{OK}$는 원 C_1의 중심에서 현 N_1N_2까지의 거리와 같으므로

$\overline{HR} = 5\sqrt{2}$

그러므로 직각삼각형 N_1HR에서

$\overline{N_1H} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5})^2}$

그런데 $\overline{N_1H}$는 원 C_1의 반지름이므로

$\overline{N_1H} = \overline{PH}$ 이다.

즉, $\overline{PH}^2 = \overline{N_1H}^2$에서

$$\left(\frac{10\sqrt{a^2-100}}{a}\right)^2 = 70$$

$100(a^2-100) = 70a^2$

$30a^2 = 10000$

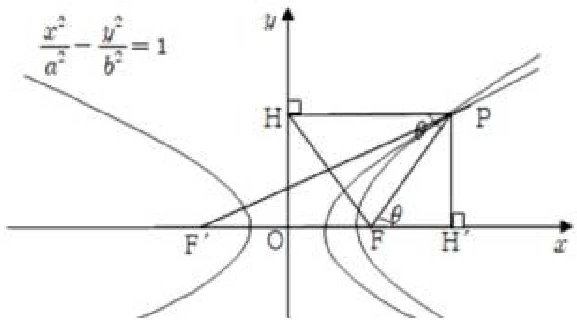
$a = \dfrac{100\sqrt{30}}{30}$ 또는 $a = -\dfrac{100\sqrt{30}}{30}$

따라서 $a = \dfrac{10\sqrt{30}}{3}$

정답 ①

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :



$\overline{PH} : \overline{HF} = 3 : 2\sqrt{2}$이므로

$\overline{PH} = 3k$, $\overline{HF} = 2\sqrt{2}\,k\,(k>0)$

이라 하자.

점 P는 y축을 준선으로 하는 포물선 위의 점이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH} = 3k$

삼각형 HPF 에서 $\angle \mathrm{HPF} = \theta$라 하면
코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{PH}}^2 + \overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{HF}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{PF}}}$$

$$= \frac{(3k)^2 + (3k)^2 - (2\sqrt{2}k)^2}{2\times 3k\times 3k} = \frac{5}{9}$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$\angle \mathrm{PFH}' = \angle \mathrm{HPF} = \theta$

$\overline{\mathrm{FH}'} = \overline{\mathrm{PH}} - \overline{\mathrm{OF}} = 3k - 4$

$= \overline{\mathrm{PF}} \times \cos\theta = 3k\times\frac{5}{9} = \frac{5}{3}k$

$3k - 4 = \frac{5}{3}k$에서 $k = 3$

$\overline{\mathrm{PF}} = 3k = 9$, $\overline{\mathrm{FH}'} = \frac{5}{3}k = 5$

직각삼각형 PFH'에서

$\overline{\mathrm{PH}'} = \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{FH}'}^2} = \sqrt{56}$

$\overline{\mathrm{F'H'}} = \overline{\mathrm{F'F}} + \overline{\mathrm{FH}'} = 8 + 5 = 13$

직각삼각형 $\mathrm{PF'H'}$에서

$\overline{\mathrm{PF}'} = \sqrt{\overline{\mathrm{F'H'}}^2 + \overline{\mathrm{PH}'}^2} = 15$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$위의 점이므로
쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'} - \overline{\mathrm{PF}} = 15 - 9 = 2a$

즉, $a^2 = 9$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 한 초점이 $\mathrm{F}(4, 0)$이므로

$4^2 = a^2 + b^2$에서 $b^2 = 16 - 9 = 7$

따라서

$a^2 \times b^2 = 9\times 7 = 63$

정답 63

30. 출제의도 : 위치벡터의 뜻과 벡터의 합을 알고 벡터를 기하학적으로 해석하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

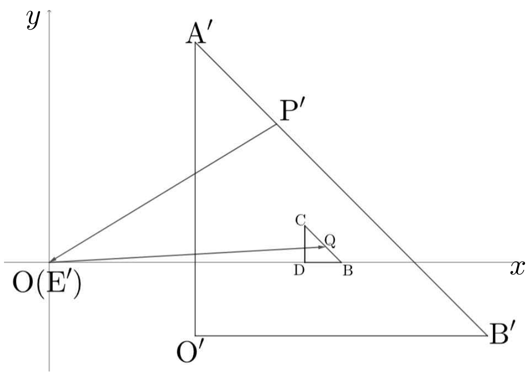
풀이 :

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$의 합 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$는

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PE}} \cdots ㉠$$

와 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

점 E가 원점 O에 오도록 다섯 개의 점 O, A, B, P, E를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하고 각 점을 O', A', B', P', E'이라 하면 O', A', B', E'의 좌표는 각각 $\mathrm{O}'(4, -2)$, $\mathrm{A}'(4, 6)$, $\mathrm{B}'(12, -2)$, $\mathrm{E}'(0, 0)$이고 점 P'은 삼각형 $\mathrm{A'O'B'}$ 위의 점이다. 이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



그런데 $\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{P'E'}} = \overrightarrow{\mathrm{P'O}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{P'O}} = \overrightarrow{\mathrm{P'Q}} \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{P'Q}}$

그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2$의 최댓값과 최솟값은 각각 $\overline{\mathrm{P'Q}}^2$의 최댓값, 최솟값과 같다.

i) 최솟값

직선 $\mathrm{A'B'}$의 방정식은

$$y = \frac{-2-6}{12-4}(x-4) + 6 = -x + 10$$

이고 직선 CB와 직선 $\mathrm{A'B'}$이 평행하므로

최솟값 m은

$$m=\left(\frac{|-8-0+10|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}\right)^2=2$$

이다.

ⅱ) 최댓값

최댓값은 삼각형 O′A′B′위의 점과 삼각형 CDB 위의 점 사이의 거리 중 최댓값이므로 점 A′과 점 B사이의 거리이다.

그러므로 최댓값 M은

$$M=\left(\sqrt{(8-4)^2+(0-6)^2}\right)^2=52$$

이다.

따라서 $M+m=54$

정답 54

2025학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 8. 13.(수)

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01. ④	02. ⑤	03. ③	04. ③	05. ⑤
06. ①	07. ④	08. ①	09. ③	10. ⑤
11. ⑤	12. ③	13. ③	14. ④	15. ②
16. 7	17. 23	18. 2	19. 16	
20. 24	21. 15	22. 231		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=5^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+x+2$에서 $f'(x)=2x+1$

따라서,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$$=2\times 2+1=5$$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}1$$

$$=\sum_{k=1}^{5}a_k+1\times 5$$

$$=9$$

에서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=9-5=4$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k+a_6$$

$$=4+4=8$$

정답 ③

4. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=2,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=2+1=3$$

정답 ③

5. **출제의도** : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에서

$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$

이므로

$f'(1)=2\times5=10$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$에서

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)&=\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}\\&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=-\cos\theta\end{aligned}$$

이므로

$-\cos\theta=\frac{3}{5}$

즉 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

한편, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서

$\sin\theta<0$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta&=-\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}\\&=-\sqrt{\frac{16}{25}}\\&=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 다항함수의 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$, $x=3$

$f(-1)=k+5$, $f(3)=k-27$

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$에서 극댓값 $k+5$를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $k-27$을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$k+5=0$ 또는 $k-27=0$

즉 $k=-5$ 또는 $k=27$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+27=22$

정답 ④

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_6=16$

이므로

$a_8=a_6\times r^2=16r^2$, $a_7=a_6\times r=16r$

$2a_8-3a_7=32$이므로

$2\times16r^2-3\times16r=32$

$2r^2-3r-2=0$

$(2r+1)(r-2)=0$

$a_1a_2<0$에서 $r<0$이므로

$r=-\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}a_9+a_{11}&=a_6\times r^3+a_6\times r^5\\&=16\times\left(-\frac{1}{8}\right)+16\times\left(-\frac{1}{32}\right)\end{aligned}$$

$$=-2+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{5}{2}$$

정답 ①

9. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로 함수 $(f(x)+a)^2$이 $x=0$에서 연속이 되도록 a의 값을 정한다.

$$\lim_{x\to 0-}(f(x)+a)^2=(f(0)+a)^2$$

$$\lim_{x\to 0-}(x-\frac{1}{2}+a)^2=(3+a)^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}+a\right)^2=(3+a)^2$$

$$a^2-a+\frac{1}{4}=a^2+6a+9$$

$$7a=-\frac{35}{4}$$

따라서 $a=-\dfrac{5}{4}$

정답 ③

10. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로

$\pi R^2=9\pi$에서 $R=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$$3\times\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}$$

$$b=\frac{3}{2}a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$이므로

$$b=c \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 양수 k에 대하여 $a=2k$라 하면 $b=c=3k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(3k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\times 3k\times 3k}=\frac{7}{9}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{\sin A}=2R=2\times 3=6\text{에서}$$

$$a=6\sin A=6\times\frac{4}{9}\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$b=c=\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$=\frac{64}{9}\sqrt{2}$$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 미분계수의 정의를 이용하여 삼차함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때

$f'(x)=3x^2+2px+q$

이다.

삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{x-a}=3$에서

$f(a)=1$이고 $f'(a)=3$이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

이므로

$y=3(x-a)+1$, 즉 $y=3x-3a+1$이다.

이 접선의 y절편이 4이므로

$-3a+1=4$

에서

$a=-1$

이상에서 $f(-1)=1$, $f'(-1)=3$이므로

$f(-1)=-1+p-q=1$에서

$p-q=2$ ⋯ ㉠

이고,

$f'(-1)=3-2p+q=3$에서

$2p-q=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$p=-2$, $q=-4$

이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x$

이다.

따라서 $f(1)=1-2-4=-5$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 x좌표를 a라 하면

$\mathrm{A}(a, 1-2^{-a})$, $\mathrm{B}(a, 2^a)$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2^a-(1-2^{-a})=2^a+2^{-a}-1$

두 점 C, D의 x좌표를 c라 하면

$\mathrm{C}(c, 2^c)$, $\mathrm{D}(c, 1-2^{-c})$

이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=2^c-(1-2^{-c})=2^c+2^{-c}-1$

이때 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$2^c=1-2^{-a}$

즉,

$\overline{\mathrm{CD}}=(1-2^{-a})+\dfrac{1}{1-2^{-a}}-1$

$=-2^{-a}+\dfrac{2^a}{2^a-1}$

주어진 조건에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$2^a+2^{-a}-1=-2^{-a+1}+\dfrac{2^{a+1}}{2^a-1}$

여기서 $2^a=t$로 놓으면

$t+\dfrac{1}{t}-1=-\dfrac{2}{t}+\dfrac{2t}{t-1}$

양변에 $t(t-1)$을 곱하여 정리하면

$t^3-4t^2+4t-3=0$

$(t-3)(t^2-t+1)=0$

t는 실수이므로 $t=3$

즉, $2^a=3$이므로 $a=\log_2 3$

이때

$2^c=1-2^{-a}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

이므로

$c=\log_2\dfrac{2}{3}=1-\log_2 3$

따라서 조건을 만족시키는 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(a-c)\times(2^a-1+2^{-c})$$
$$=\frac{1}{2}\times(2\log_2 3-1)\times\left(3-1+\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{4}(2\log_2 3-1)$$
$$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$$

정답 ③

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$라 하고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$A=\int_0^\alpha \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$B=\int_\alpha^2 \{f(x)-g(x)\}dx$$

따라서

$B-A$
$$=\int_\alpha^2 \{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^\alpha \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^2 \{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^\alpha \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_0^2 \left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2$$
$$=1+1-2m-4$$
$$=-2m-2=\frac{2}{3}$$

따라서 $m=-\frac{4}{3}$

정답 ③

14. **출제의도** : 로그의 성질 및 로그부등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}$ 에서

진수 조건에 의하여

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$,

즉 $-n^2+10n+75>0$에서

$n^2-10n-75<0$

$(n+5)(n-15)<0$

$-5<n<15$

이때, n이 자연수이므로

$1 \le n<15$ …… ㉠

또 $\log_4(75-kn)$에서

진수 조건에 의하여

$75-kn>0$,

즉 $n<\frac{75}{k}$ …… ㉡

한편,

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$

의 값이 양수이므로

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$

에서

$\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$

$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$

이때 밑 4가 1보다 크므로

$-n^2+10n+75 > 75-kn$

$n(n-10-k)<0$

k가 자연수이므로

$0<n<10+k$ $\cdots\cdots$ ㉢

주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이므로

㉠, ㉢에서

$10+k>12$

이어야 한다.

즉, $k>2$이어야 한다.

(i) $k=3$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n < 13$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $k=4$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n < 14$

따라서 자연수 n의 개수가 13이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $k=5$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n < 15$

따라서 자연수 n의 개수가 14이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(iv) $k=6$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n < \frac{25}{2}$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(v) $k \ge 7$일 때

$\frac{75}{k}<11$이므로

주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(i) ~ (v)에서

$k=3$ 또는 $k=6$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+6=9$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$에 대하여

$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \le k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$ 이므로

$g'(x)=\begin{cases} 2 & (x<k) \\ f'(x) & (x>k) \end{cases}$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

또한,

$h_1(t)=|t(t-1)|+t(t-1)$

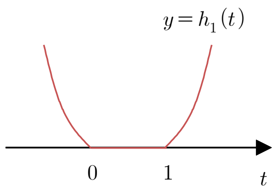
$h_2(t)=|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)$

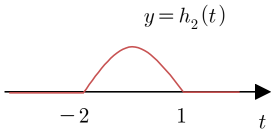
라 할 때,

$h_1(t)=\begin{cases} 2t(t-1) & (t \le 0 \text{ 또는 } t \ge 1) \\ 0 & (0<t<1) \end{cases}$

$h_2(t)=\begin{cases} 0 & (t \le -2 \text{ 또는 } t \ge 1) \\ -2(t-1)(t+2) & (-2<t<1) \end{cases}$

이므로 두 함수 $y=h_1(t)$, $y=h_2(t)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





한편,
p가 상수일 때, 모든 실수 x에 대하여

$\int_p^x h(t)dt \geq 0$이기 위해서는

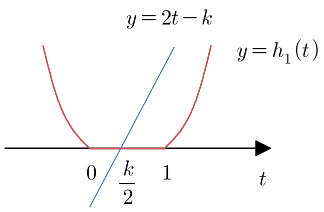
구간 $[p, x]$에서는 $h(t) \geq 0$이고
구간 $[x, p]$에서는 $h(t) \leq 0$
이어야 한다.

(i) 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$\int_0^x g(t)h_1(t)dt \geq 0$이므로

그림과 같이 $0 \leq \frac{k}{2} \leq 1$, 즉 $0 \leq k \leq 2$

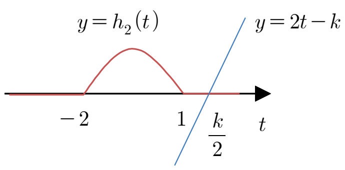
이어야 한다.



(ii) 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$\int_3^x g(t)h_2(t)dt \geq 0$이므로

그림과 같이 $\frac{k}{2} \geq 1$, 즉 $k \geq 2$이어야 한다.



(i), (ii)에 의하여 $k=2$
조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k=2$에서도 미분가능하고 연속이다.

$g'(2) = f'(2) = 2$에서
$12+4a+b = 2$, $b = -4a-10$
$g(2) = f(2) = 2$에서
$8+4a+2b+c = 2$
$c = -4a-2b-6$
$= -4a-2(-4a-10)-6 = 4a+14$
따라서
$f(x) = x^3+ax^2-(4a+10)x+4a+14$ ……㉠

한편,
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 증가하므로 $g'(x) \geq 0$이다.
따라서 $x \geq 2$일 때 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

$f'(x) = 3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$에서

① $-\frac{a}{3} < 2$, 즉 $a > -6$일 때

$f'(2) = 12+4a+b = 12+4a-4a-10$
$= 2 > 0$이 되어 조건을 만족시킨다.
$a > -6$ …… ㉡

② $-\frac{a}{3} \geq 2$, 즉 $a \leq -6$일 때

$b-\frac{a^2}{3} \geq 0$, 즉 $a^2-3b \leq 0$이어야 하므로

$a^2-3b = a^2-3(-4a-10) \leq 0$
$a^2+12a+30 \leq 0$, $(a+6)^2 \leq 6$
$-6-\sqrt{6} \leq a \leq -6+\sqrt{6}$이므로
$-6-\sqrt{6} \leq a \leq -6$ ……㉢
㉡, ㉢에서
$a \geq -6-\sqrt{6}$ ……㉣
㉠에 $x=3$을 대입하면 ㉣에서
$g(k+1) = g(3) = f(3)$
$= 27+9a-12a-30+4a+14$
$= a+11 \geq 5-\sqrt{6}$
따라서 $g(3)$의 최솟값은 $5-\sqrt{6}$이다.

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 방정식의 해를 구할 수

있는가?

정답풀이 :

로그의 진수의 조건에 의하여

$x+1>0$, $x-3>0$

즉 $x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=-\log_2(x-3)$이므로

$\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$에서

$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$

$\log_2(x+1)(x-3)=5$

$(x+1)(x-3)=2^5=32$

$x^2-2x-35=0$

$(x+5)(x-7)=0$

$x=-5$ 또는 $x=7$

이때 ㉠에 의하여

$x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2+2$이므로

$f(x)=\int(6x^2+2)dx$

$=2x^3+2x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=2x^3+2x+3$

이므로

$f(2)=2\times2^3+2\times2+3$

$=23$

정답 23

18. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)$

$=a\sum_{k=1}^{9}k^2-10\sum_{k=1}^{9}k$

$=a\times\frac{9\times10\times19}{6}-10\times\frac{9\times10}{2}$

$=285a-450=120$

$285a=570$

따라서 $a=2$

정답 2

19. **출제의도** : 속도와 거리의 관계와 정적분을 이용하여 점 P의 위치를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서 $v(t)=0$이다.

$0\le t\le3$일 때,

$-t^2+t+2=0$에서 $(t-2)(t+1)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t>3$일 때,

$k(t-3)-4=0$에서 $kt=3k+4$

$t=3+\frac{4}{k}$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각은 $t=3+\frac{4}{k}$

원점을 출발한 점 P의 시각 $t=3+\frac{4}{k}$에

서의 위치가 1이므로

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt = 1$$에서

$$\int_0^3 v(t)dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt$$

$$= \int_0^3 (-t^2+t+2)dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt-3k-4)dt$$

이때

$$\int_0^3 (-t^2+t+2)dt = \left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3$$

$$= -9+\frac{9}{2}+6 = \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt-3k-4)dt = \left[\frac{1}{2}kt^2-(3k+4)t\right]_3^{3+\frac{4}{k}}$$

$$= -\frac{8}{k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^3 v(t)dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt = \frac{3}{2}+\left(-\frac{8}{k}\right) = 1$$

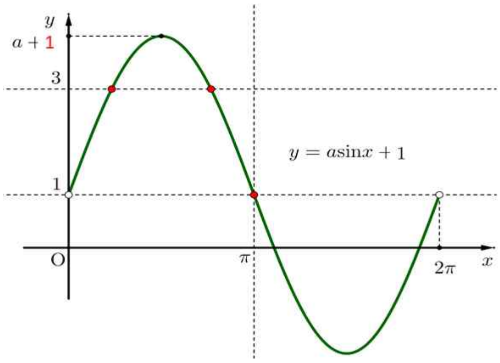
$\frac{8}{k} = \frac{1}{2}$에서 $k=16$

정답 16

20. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 자연수의 합의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $b=1$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

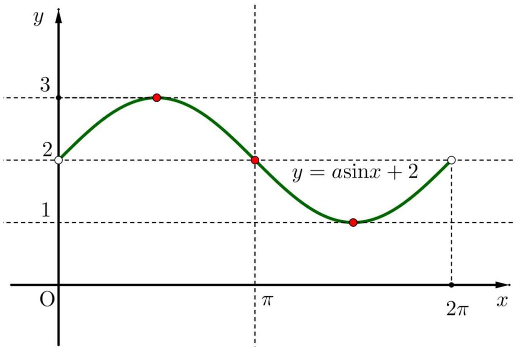
$a+1>3$, 즉 $a>2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(3,1), (4,1), (5,1)

이다.

(ii) $b=2$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

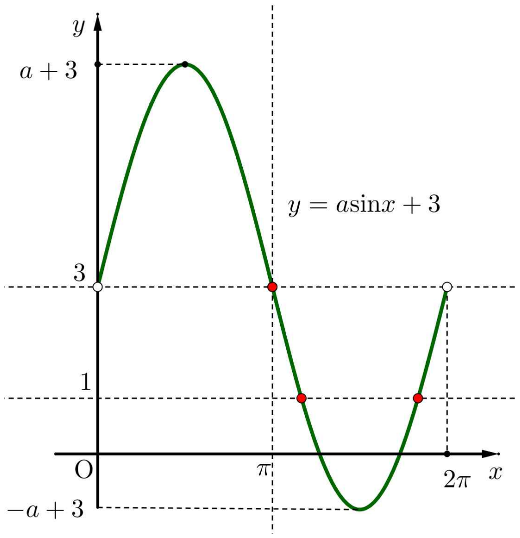
$a=1$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(1, 2)

이다.

(iii) $b=3$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

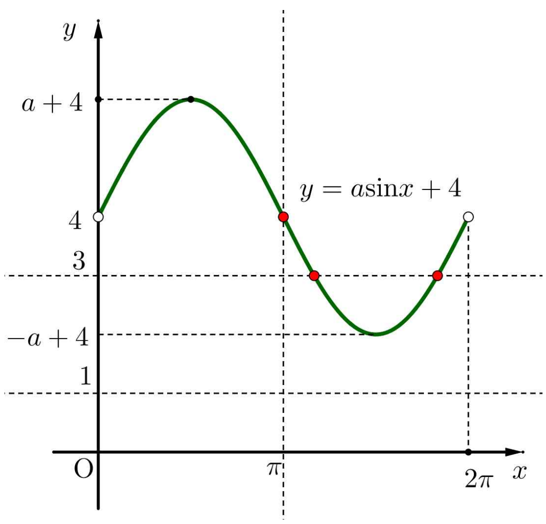
$-a+3<1$, 즉 $a>2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 3)$, $(4,\ 3)$, $(5,3)$

이다.

(iv) $b=4$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

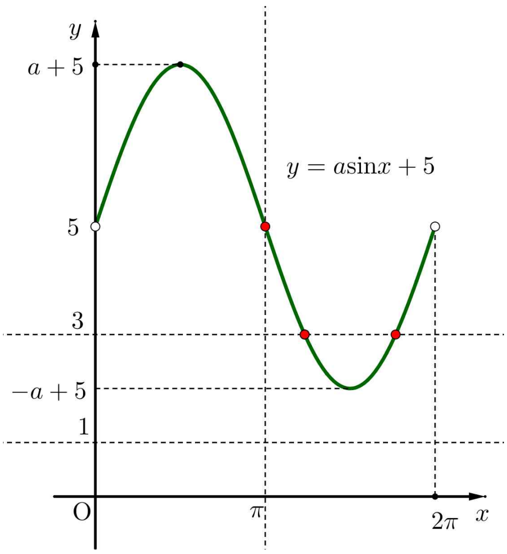
$1< -a+4<3$, 즉 $1<a<3$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 4)$

이다.

(v) $b=5$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

$1< -a+5<3$, 즉 $2<a<4$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 5)$

이다.

이상에서 $a+b$의 최댓값과 최솟값은 각각

$M=8$, $m=3$

이므로

$M \times m=24$

정답 24

21. 출제의도 : 다항함수의 미분을 활용하여 함수의 그래프에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k의 값이 존재하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은

서로 다른 세 실근을 갖는다.

삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 각각 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면 부등식 $f'(x) \le 0$의 해가

$x \le \alpha$ 또는 $\beta \le x \le \gamma$

이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma=2$

$f'(1)=0$, $f'(2)=0$에서 $b \ne 1$, $b<2$인 상수 b에 대하여

$$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-b)$$
$$=4x^3-4(b+3)x^2+4(3b+2)x-8b$$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^4-\frac{4}{3}(b+3)x^3+2(3b+2)x^2-8bx+C$$

(C는 상수)

$f(0)=0$에서 $C=0$이므로

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}(b+3)x^3+2(3b+2)x^2-8bx$$

……㉠

이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $b<1$이고 $f(b)<f(2)$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2)=\frac{8}{3}$이어야 하므로 ㉠에서

$$f(2)=16-\frac{32}{3}(b+3)+8(3b+2)-16b$$
$$=-\frac{8}{3}b=\frac{8}{3}$$

$b=-1$

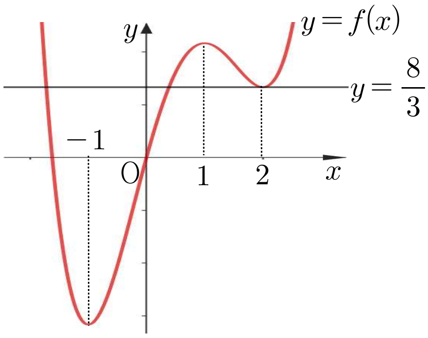
$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x$에서

$f(-1)=1+\frac{8}{3}-2-8=-\frac{19}{3}<\frac{8}{3}$이므로

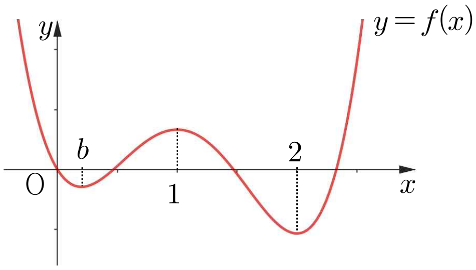
조건을 만족시킨다.

따라서

$f(3)=81-72-18+24=15$



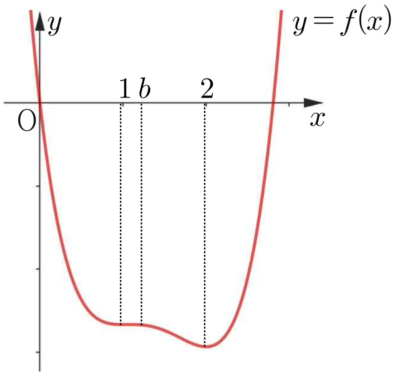
(ii) $b<1$이고 $f(2)<f(b)$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $f(b)\le 0$이다.

따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 0 또는 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $1<b<2$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $f(1)<0$이다.

따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 음수이므로 조건 (나)를 만

족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $f(3)=15$이다.

정답 15

22. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
15 이하의 자연수 n에 대하여
$n\neq 4$, $n\neq 9$이면 $a_{n+1}=a_n+1$이므로
$a_n=a_{n+1}-1$
그러므로 $a_{15}=1$에서 $a_{14}=a_{15}-1=0$,
$a_{13}=a_{14}-1=-1$, $a_{12}=a_{13}-1=-2$
$a_{11}=a_{12}-1=-3$, $a_{10}=a_{11}-1=-4$
ⅰ) $a_9>0$일 때
$a_9-\sqrt{9}\times a_{\sqrt{9}}=a_{10}=-4$
그러므로 $a_9=3a_3-4$에서 $a_5=3a_3-8$
ⅰ-1) $a_4>0$일 때
$a_5=a_4-\sqrt{4}\times a_{\sqrt{4}}$이므로
$a_4-2a_2=3a_3-8$. 즉, $a_4=3a_3+2a_2-8$
그러므로 $a_4=a_3+1$에서 $a_3=a_4-1$이므로 $a_3=3a_3+2a_2-9$
즉, $a_3+a_2=\frac{9}{2}$
$a_3=a_2+1$이므로 $a_2=\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{11}{4}$
$a_9=\frac{33}{4}-4>0$, $a_4=\frac{33}{4}+\frac{14}{4}-8>0$
그러므로 $a_1=-a_2=-\frac{7}{4}$
ⅰ-2) $a_4\leq 0$일 때
$a_4+1=a_5=3a_3-8$
그러므로 $a_4=3a_3-9$에서
$a_3=a_4-1=3a_3-9-1$
$a_3=3a_3-10$
즉, $a_3=5$
그런데 $a_3=5$이면 $a_4=6>0$이므로 모순이다.
ⅱ) $a_9\leq 0$일 때
$a_9=a_{10}-1=-5$에서 $a_5=-9$
ⅱ-1) $a_4>0$일 때
$a_5=a_4-\sqrt{4}\times a_{\sqrt{4}}=a_4-2a_2$
즉, $a_4=a_5+2a_2$이므로 $a_4=2a_2-9$
또, $a_3=a_4-1=2a_2-9-1=2a_2-10$
그런데 $a_3=a_2+1$이므로
$a_2+1=2a_2-10$
$a_2=11$
$a_4=2\times 11-9>0$
그러므로 $a_1=-a_2=-11$
ⅱ-2) $a_4\leq 0$일 때
$a_5=a_4+1=-9$
그러므로 $a_4=-10$에서
$a_3=-11$, $a_2=-12$
그러므로 $a_1=-a_2=12$
ⅰ), ⅱ)에서 모든 a_1의 곱은

$$-\frac{7}{4}\times(-11)\times 12=231$$

정답 231

■ [선택: 미적분]
23. ② 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ②
28. ④ 29. 55 30. 25

23. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{3}\times 0}{\frac{1}{2}+0}$$

$$=2$$

정답 ②

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x\sin 2y+3x=3$에서
y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\sin 2y+x\cos 2y\times 2\times\frac{dy}{dx}+3=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2y+3}{-2x\cos 2y}\quad (\text{단, } x\cos 2y\neq 0)$$

따라서 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)+3}{-2\times 1\times cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\pi+3}{-2\cos\pi}$$

$$=\frac{3}{-(-2)}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

25. **출제의도** : 급수와 일반항 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=0$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)+\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}$$

$$=0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}a_n$$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\times\frac{3}{2}$

$=\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$

정답 ③

26. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 로그로 나타내고, 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표를 a라 하면

$e^{a^2}-1=t$

이므로

$a^2=\ln(1+t)$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{\ln(1+t)}$

또, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$e^{b^2}-1=5t$

이므로

$b^2=\ln(1+5t)$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{\ln(1+5t)}$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times 5t\times\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$

따라서

$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{5t\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)}{2t\sqrt{t}}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{5}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$

$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

정답 ②

27. **출제의도** : 도함수를 활용하여 접선의 방정식과 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=a^x$에서 $y'=a^x\ln a$

이때 점 $\mathrm{A}(t, a^t)$에서의 접선 l의 기울기는

$a^t\ln a$

이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{a^t\ln a}$

그러므로 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y-a^t=-\frac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-a^t=-\frac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

$x=t+a^{2t}\ln a$

이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t+a^{2t}\ln a, 0)$

한편 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\frac{t}{a^{2t}\ln a}$

$f(t)=\frac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$f'(t)=\frac{a^{2t}\ln a-ta^{2t}\times 2(\ln a)^2}{(a^{2t}\ln a)^2}$

$=\frac{a^{2t}\ln a(1-2t\ln a)}{(a^{2t}\ln a)^2}$

$f'(t)=0$에서

$1-2t\ln a=0$

$t=\frac{1}{2\ln a}$

이고, 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{2\ln a}$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\frac{1}{2\ln a}=1$이므로

$\ln a=\frac{1}{2}$

$a=\sqrt{e}$

정답 ②

28. **출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$h_1(x)=(x-a-2)^2e^x$

$h_2(x)=e^{2a}(x-a)+4e^a$

이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}h_1(x) & (x\ge a)\\ h_2(x) & (x<a)\end{cases}$$

이고

$$\begin{aligned}h_1'(x)&=2(x-a-2)e^x+(x-a-2)^2e^x\\&=(x-a)(x-a-2)e^x\end{aligned}$$

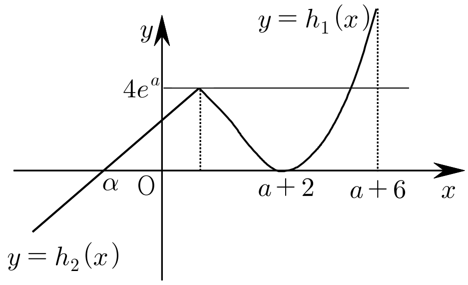
$h_2'(x)=e^{2a}$

이므로

$$f'(x)=\begin{cases}(x-a)(x-a-2)e^x & (x>a)\\ e^{2a} & (x<a)\end{cases}$$

이다.

$f(a)=4e^a$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값이 $g(t)$이므로

$t\le 4e^a$일 때, $h_2(g(t))=t$

$t>4e^a$일 때, $h_1(g(t))=t$

가 성립한다.

또한, 함수 $g(t)$는 $t=4e^a$에서 불연속이므로

$4e^a=12$, 즉 $e^a=3$

$t=f(a+2)=0<4e^a$이므로

$h_2'(g(t))\times g'(t)=1$에서

$h_2'(g(f(a+2)))\times g'(f(a+2))=1$

직선 $y=h_2(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α $(\alpha<a)$라 하면 $g(0)=\alpha$이므로

$$\begin{aligned}g'(f(a+2))&=\frac{1}{h_2'(g(f(a+2)))}\\&=\frac{1}{h_2'(\alpha)}=\frac{1}{e^{2a}} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$t=f(a+6)=16e^{a+6}>4e^a$이므로

$h_1'(g(t))\times g'(t)=1$에서

$h_1'(g(f(a+6)))\times g'(f(a+6))=1$

$$\begin{aligned}g'(f(a+6))&=\frac{1}{h_1'(g(f(a+6)))}\\&=\frac{1}{h_1'(a+6)}=\frac{1}{6\times 4\times e^{a+6}}\\&=\frac{1}{24e^{a+6}} \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $e^a=3$이므로

$$\frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=\frac{24e^{a+6}}{e^{2a}}=\frac{24e^6}{e^a}$$

$$=\frac{24}{3}e^6=8e^6$$

정답 ④

29. **출제의도** : 미분법을 이용하여 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$에서

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1}$$

이때 $f'(x)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=1$

이고 $f'(x)\geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또한

$f''(x)$

$$=\frac{(4x^3-6x^2+2x)(x^2+1)-(x^4-2x^3+x^2)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x(x-1)(x^3+2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

이고 $h(x)=x^3+2x-1$라 하면

$h'(x)=3x^2+2>0$

이므로 $h(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하면

$h(0)=-1$, $h(1)=2$

이므로 $0<\alpha<1$

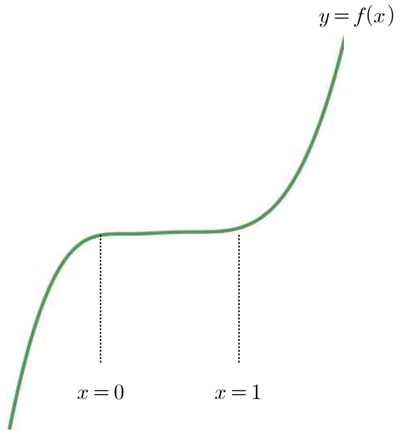
따라서 변곡점은

$(0, f(0))$, $(\alpha, f(\alpha))$, $(1, f(1))$

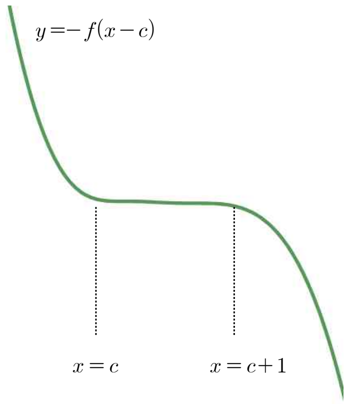
이고 변곡점에서의 미분계수는

$f'(0)=0$, $f'(\alpha)>0$, $f'(1)=0$

즉 곡선 $y=f(x)$의 개형은 그림과 같다.

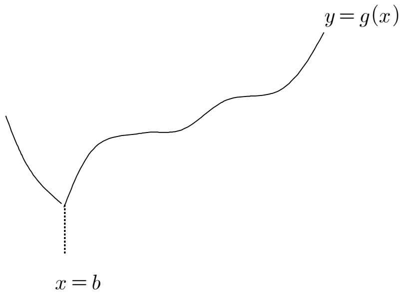


또한, 곡선 $y=-f(x-c)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 c만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 곡선 $y=-f(x-c)$의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq b) \\ -f(x-c) & (x<b)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=b$에서 연속이어야 한다.

그런데 $a\geq 0$인 경우에는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 그림과 같다.



즉 $\lim_{x\to b-} g'(x) < 0$, $\lim_{x\to b+} g'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

$a<0$인 경우

$f(0)=a$, $f'(0)=0$,

$f(1)=-\dfrac{2}{3}+\ln 2+a$, $f'(1)=0$

이고

$x<b$ 에서 $\lim_{x\to b-} g'(x) \leq 0$

$x \geq b$ 에서 $\lim_{x\to b+} g'(x) \geqq 0$

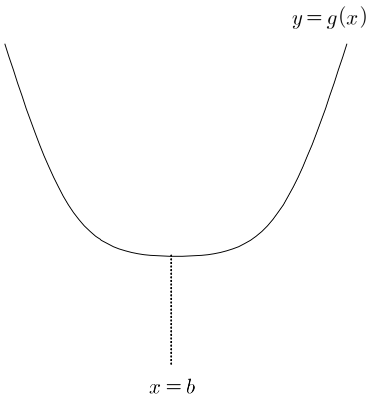
이므로 $x=b$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to b-} g'(x) = \lim_{x\to b+} g'(x) = 0$

즉 $\lim_{x\to b} g'(x)=0$

이어야 한다.

따라서, $|f(0)|=|f(1)|$, $b=1$, $c=1$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



즉 $-a=-\dfrac{2}{3}+\ln 2+a$ 에서

$a=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

이므로

$$a+b+c=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2\right)+1+1$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$$

따라서 $p=\dfrac{7}{3}$, $q=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

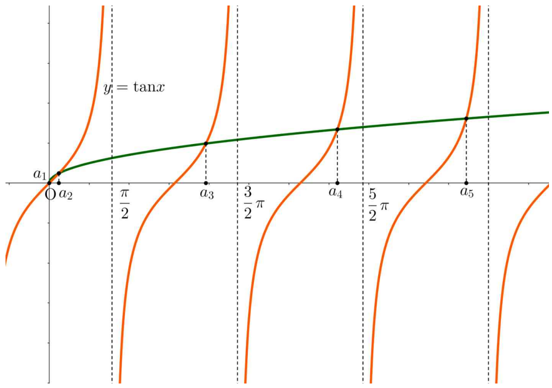
$$30(p+q)=30\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=30\times\frac{11}{6}=55$$

정답 55

30. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$, $y=\tan x$의 그래프와 수열 $\{a_n\}$을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이때

$$\frac{\sqrt{a_n}}{10}=\tan a_n$$

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}$$
$$=\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}}{\dfrac{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}}$$

$$= 10 \times \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}$$

$$= \frac{10(a_{n+1}-a_n)}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})}$$

즉,

$\tan^2(a_{n+1}-a_n)$

$$= \frac{100(a_{n+1}-a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$$

한편, 곡선 $y=\tan x$의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$ (n은 정수)

이고

$n\to\infty$일 때 $\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}\to\infty$

이므로 위의 그래프에서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)=0$

임을 알 수 있다.

이때 $b_n=a_n-\dfrac{2n-3}{2}\pi$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}+\frac{2n-1}{2}\pi-b_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n+\pi)$$

$$=0-0+\pi=\pi$$

이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}+\dfrac{2n-1}{2}\pi}{b_n+\dfrac{2n-3}{2}\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{b_{n+1}}{n}+\dfrac{2n-1}{2n}\pi}{\dfrac{b_n}{n}+\dfrac{2n-3}{2n}\pi}$$

$$=\frac{0+\pi}{0+\pi}=1$$

이다.

이때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2}{a_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+\sqrt{\frac{a_n}{a_n}}\right)^2$$

$$=(\sqrt{1}+\sqrt{1})^2=4$$

이고,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{{a_n}^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{a_n}+\frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{a_n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{a_n}+\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)^2$$

$$=(0+\sqrt{1})^2=1$$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}{a_n}^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100{a_n}^3(a_{n+1}-a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100(a_{n+1}-a_n)^2}{\dfrac{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{{a_n}^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100(a_{n+1}-a_n)^2}{\frac{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2}{a_n}\times\frac{(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{{a_n}^2}}$$

$$=\frac{100\pi^2}{4\times1}=25\pi^2$$

따라서

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}{a_n}^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=25$$

정답 25

2024학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 2023.11.20

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01. ①	02. ④	03. ②	04. ①	05. ④
06. ④	07. ⑤	08. ②	09. ④	10. ②
11. ①	12. ③	13. ①	14. ①	15. ③
16. 2	17. 8	18. 9	19. 32	
20. 25	21. 10	22. 483		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=2^{3\times\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1\times 3^1$

$=6$

정답 ①

2. 출제의도 : 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-5x^2+3$에서

$f'(x)=6x^2-10x$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=24-20$

$=4$

정답 ④

3. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$에서

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

이때,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(3x-a)$

$=6-a$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+a)$

$=4+a$

$f(2)=4+a$

그러므로

$6-a=4+a=4+a$

따라서

$2a=2$. $a=1$

정답 ①

5. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-6x$이므로

$f(x)=\int(3x^2-6x)dx$

$=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=6$ 에서 $C=8$

따라서

$f(2)=8-12+8=4$

정답 ④

6. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_4-S_2=a_3+a_4$ 이므로

$a_3+a_4=3a_4$, $a_3=2a_4$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=\frac{3}{4}$ 에서 $r\neq0$ 이고

$a_3=2a_4$ 에서 $r=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}$

$a_5=a_1\times r^4$ 에서

$a_1=a_5\times\frac{1}{r^4}=\frac{3}{4}\times2^4=12$

$a_5=a_2\times r^3$ 에서

$a_2=a_5\times\frac{1}{r^3}=\frac{3}{4}\times2^3=6$

따라서 $a_1+a_2=12+6=18$

정답 ④

7. 출제의도 : 다항함수의 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$에서

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고,

$x=6$에서 극소이다.

따라서

$\alpha=-2,\ \beta=6$

이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$ ······ ㉠

$f(x)$가 삼차함수이고

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=3x(x^2+x+1)$

따라서

$\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$$=\int_{-2}^{2}3x(x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}3x^2dx$$
$$=2\times\left[x^3\right]_0^2$$
$$=2\times2^3$$
$$=16$$

정답 ②

9. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m\times\log_5 12+(1-m)\times\log_5 3}{m+(1-m)}=1$$
$$m\times\log_5 12+(1-m)\times\log_5 3=1$$
$$m(\log_5 12-\log_5 3)=1-\log_5 3$$
$$m\times\log_5\frac{12}{3}=\log_5\frac{5}{3}$$
$$m\times\log_5 4=\log_5\frac{5}{3}$$

이때,

$$m=\frac{\log_5\frac{5}{3}}{\log_5 4}$$
$$=\log_4\frac{5}{3}$$

따라서,

$$4^m=4^{\log_4\frac{5}{3}}$$
$$=\frac{5}{3}$$

정답 ④

10. **출제의도** : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=0+\int_0^t(t^2-6t+5)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t,$$
$$x_2(t)=0+\int_0^t(2t-7)dt$$
$$=t^2-7t$$

이므로

$$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$$
$$=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$$

이다. 함수 $g(t)$를

$g(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$라 하면

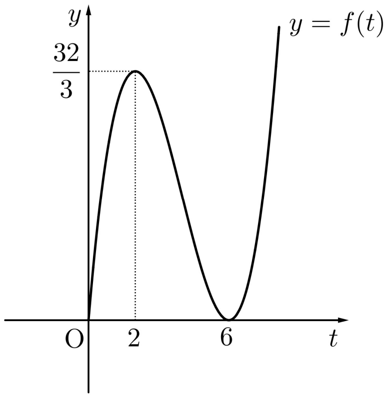
$g'(t)=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$

$g'(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=6$

$t\geq0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$t\geq0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)\geq0$이므로 $f(t)=g(t)$이고 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 구간 $[0, 2]$에서 증가하고, 구간 $[2, 6]$에서 감소하고, 구간 $[6, \infty)$에서 증가한다. 즉, $a=2$, $b=6$이다.

시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v_2(t)|dt = \int_2^6 |2t-7|dt$$
$$= \int_2^{\frac{7}{2}} (7-2t)dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t-7)dt$$
$$= \left[7t-t^2\right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$
$$= \frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|a_6|=a_8$에서

$a_6=a_8$ 또는 $-a_6=a_8$ ⋯⋯ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로

$a_6 \neq a_8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-a_6=a_8$ 즉,

$a_6+a_8=0$ ⋯⋯ ㉢

한편, $|a_6|=a_8$에서

$a_8 \geq 0$이고, $a_6+a_8=0$이므로

$a_6<0<a_8$이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 양수이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d>0)$이라 하면 ㉢에서

$(a_1+5d)+(a_1+7d)=0$

$a_1=-6d$ ⋯⋯ ㉣

한편, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{96}$에서

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+5d}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\times\frac{5d}{a_1(a_1+5d)}$$
$$=\frac{5}{a_1(a_1+5d)}$$

이므로

$$\frac{5}{a_1(a_1+5d)}=\frac{5}{96}$$

$a_1(a_1+5d)=96$ ⋯⋯ ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면

$-6d\times(-d)=96$

$d^2=16$

$d>0$이므로

$d=4$

$d=4$를 ㉣에 대입하면

$a_1=-6\times4=-24$

따라서

$\sum_{k=1}^{15}a_k$

$=\dfrac{15\{2\times(-24)+14\times4\}}{2}$

$=60$

정답 ①

12. 출제의도 :

곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$는 $x\geq t$일 때, 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $(t+f(t), 0)$에서 만난다.

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\times\{f(t)\}^2$$

이때, 양변을 미분하면

$$S'(t)=f(t)+f(t)\times f'(t)$$
$$=f(t)\{1+f'(t)\}$$

한편, $f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$0<t<6$에서 $f(t)>0$

또,

$1+f'(t)$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t^2-15t+54)+(t^2-9t)$

$+(t^2-6t)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}(3t^2-30t+54)$

$=1+\dfrac{1}{3}(t^2-10t+18)$

$=\dfrac{1}{3}(t^2-10t+21)$

$=\dfrac{1}{3}(t-3)(t-7)$

그러므로 $0<t<6$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	(극대)	↘	

그러므로 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이다.

따라서, 최댓값은

$S(3)$

$=\displaystyle\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\int_0^3 x(x-6)(x-9)dx$

$\displaystyle+\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{9}\times3\times(-3)\times(-6)\right\}^2$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)dx+18$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$

$=\dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{1}{4}\times81-5\times27+27\times9\right)+18$

$=\left(\dfrac{9}{4}-15+27\right)+18$

$=\left(\dfrac{9}{4}+12\right)+18$

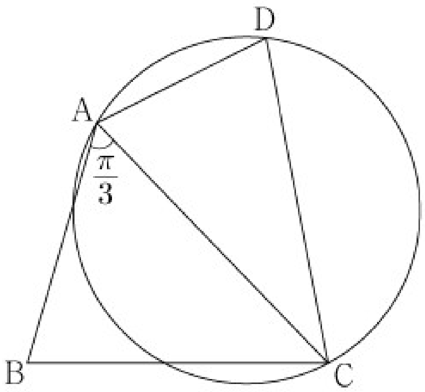
$=\dfrac{9}{4}+30$

$=\dfrac{129}{4}$

정답 ③

13. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙 및 삼각형의 넓이를 활용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=a(a>0)$

이라 하면

코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$

$$(\sqrt{13})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$a>0$이므로

$a=4$

즉, $\overline{AC}=4$

삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

$\overline{AD}\times\overline{CD}=9$

이므로

삼각형 ACD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$$

$$=\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)$$

이때, $S_2=\frac{5}{6}S_1$이므로

$$\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)=\frac{5}{6}\times3\sqrt{3}$$

$$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$$

이므로

$$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$$

$$R=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

$$=\frac{54}{25}$$

정답 ①

14. **출제의도** : 새롭게 정의된 함수가 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \le 2$일 때,

$f(x) = 2x^3 - 6x + 1$에서

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

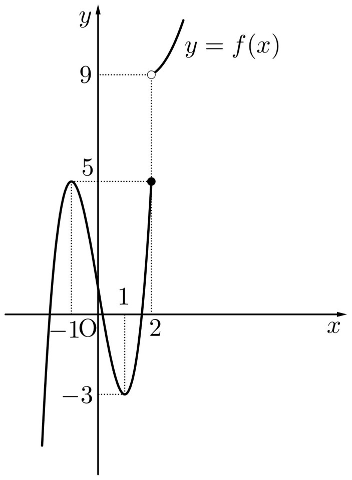
또한, a, b가 자연수이므로 곡선

$y = a(x-2)(x-b) + 9$

는 점 $(2, 9)$와 점 $(b, 9)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(ⅰ) $b = 1$ 또는 $b = 2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x > 2$에서 증가하고, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $-3 < k < 5$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k) = \lim_{t \to k-} g(k) = \lim_{t \to k+} g(k) = 3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(k) + \lim_{t \to k+} g(k) = 9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

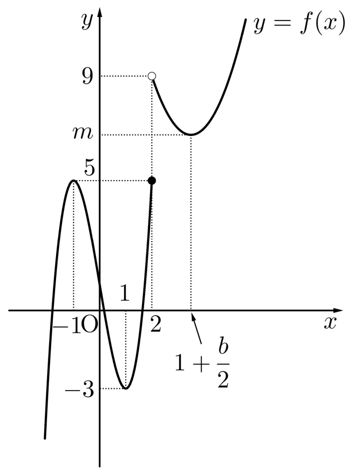
(ⅱ) $b \ge 3$인 경우

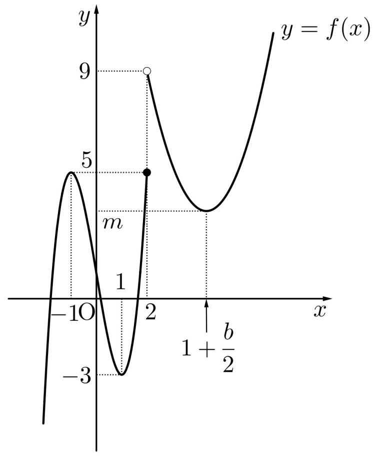
곡선 $y = a(x-2)(x-b) + 9$는 직선

$x = \dfrac{2+b}{2} = 1 + \dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x = 1 + \dfrac{b}{2}$에서 극솟값을 갖는다. 이 극솟값을 m이라 하자.

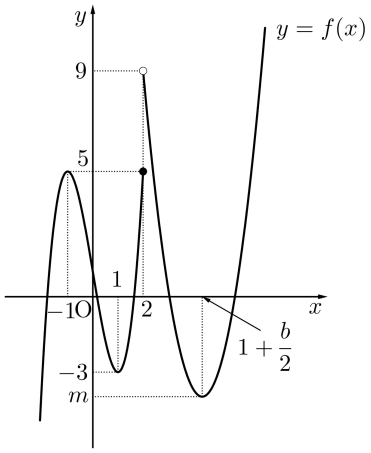
(ⅱ-①) $m > -3$인 경우





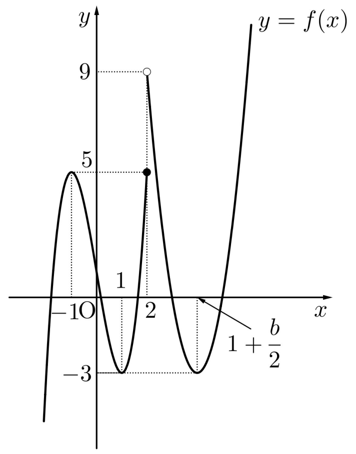
m과 5 중에 크지 않은 값을 m_1이라 하면 $-3 < k < m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-②) $m < -3$인 경우



$m<k<-3$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-③) $m=-3$인 경우



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim\limits_{t\to k-} g(k)$, $\lim\limits_{t\to k+} g(k)$의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim\limits_{t\to k-} g(k)$	$\lim\limits_{t\to k+} g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 -3뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b\geq 3$, $m=-3$이다.

$f\left(1+\frac{b}{2}\right)=-3$에서

$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9=-3$

$a(b-2)^2=48$

$48=2^4\times 3$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$(48, 3)$, $(12, 4)$, $(3, 6)$

이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

정답 ①

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a_n이 홀수일 때

$a_{n+1}=2^{a_n}$은 자연수이고

a_n이 짝수일 때

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$은 자연수이다.

이때 a_1이 자연수이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_6+a_7=3$에서

$a_6=1$, $a_7=2$ 또는 $a_6=2$, $a_7=1$

이다.

(ⅰ) $a_6=1$일 때,

$a_6=1$이고 a_5가 홀수인 경우

$a_6=2^{a_5}$에서

$1=2^{a_5}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_5의 값은

없다.

$a_6=1$이고 a_5가 짝수인 경우

$a_6=\frac{1}{2}a_5$에서

$1=\frac{1}{2}a_5$

$a_5=2$

a_4를 구해보자.

$a_5=2$이고 a_4가 홀수인 경우

$a_5=2^{a_4}$에서

$2=2^{a_4}$

$a_4=1$

$a_5=2$이고 a_4가 짝수인 경우

$a_5=\frac{1}{2}a_4$에서

$2=\frac{1}{2}a_4$

$a_4=4$

a_3을 구해보자.

$a_4=1$일 때

$a_3=2$

$a_4=4$이고 a_3이 홀수인 경우

$a_4=2^{a_3}$에서

$4=2^{a_3}$

$a_3=2$

이때, a_3이 짝수이므로 모순이다.

$a_4=4$이고 a_3이 짝수인 경우

$a_4=\frac{1}{2}a_3$에서

$4=\frac{1}{2}a_3$

$a_3=8$

a_2를 구해보자.

$a_3=2$일 때

$a_2=1$ 또는 $a_2=4$

$a_3=8$이고 a_2가 홀수인 경우

$a_3=2^{a_2}$에서

$8=2^{a_2}$

$a_2=3$

$a_3=8$이고 a_2가 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_2$에서

$8=\frac{1}{2}a_2$

$a_2=16$

a_1을 구해보자.

$a_2=1$일 때

$a_1=2$

$a_2=4$일 때

$a_1=8$

$a_2=3$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$3=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=3$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$3=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=6$

$a_2=16$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$16=2^{a_1}$

$a_1=4$

이때 a_1이 짝수이므로 모순이다.

$a_2=16$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$16=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=32$

따라서 a_1의 값은

2 또는 6 또는 8 또는 32이다.

(ⅱ) $a_6=2$일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$a_2=2$ 또는 $a_2=6$ 또는 $a_2=8$ 또는 $a_2=32$

a_1을 구해보자.

$a_2=2$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$2=2^{a_1}$

$a_1=1$

$a_2=2$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$2=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=4$

$a_2=6$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$6=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=6$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$6=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=12$

$a_2=8$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$8=2^{a_1}$

$a_1=3$

$a_2=8$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$8=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=16$

$a_2=32$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$32=2^{a_1}$

$a_1=5$

$a_2=32$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$32=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=64$

따라서 a_1의 값은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 12 또는 16 또는 64이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+8+32)+(1+3+4+5+12+16+64)$

$=153$

정답 ③

16. **출제의도** : 지수에 미지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$

$3^{x-8}=\left(3^{-3}\right)^x$

$3^{x-8}=3^{-3x}$

그러므로

$x-8=-3x$

$4x=8$
$x=2$

정답 2

17. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+3)$이므로

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\times 2x$

따라서,

$$\begin{aligned} f'(1)&=(1+3)+2\times 2 \\ &=8 \end{aligned}$$

정답 8

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10}(2b_k-1) \\ &=2\sum_{k=1}^{10} b_k-10 \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$에서

$$3\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-3\sum_{k=1}^{10} a_k+33 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-3\left(2\sum_{k=1}^{10} b_k-10\right)+33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-6\sum_{k=1}^{10} b_k+63$$

$$7\sum_{k=1}^{10} b_k=63$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=9$$

정답 9

19. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식을 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은

$$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

즉,

$$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$0<x<16$에서 $0<\frac{\pi}{4}x<4\pi$이므로 ㉠에서

$$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{2}{3}\pi$$

또는 $\frac{4}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{5}{3}\pi$

또는 $\frac{7}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{8}{3}\pi$

또는 $\frac{10}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{11}{3}\pi$

이다. 즉,

$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 또는 $\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$ 또는

$\frac{28}{3}<x<\frac{32}{3}$ 또는 $\frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

이므로 구하는 자연수 x의 값은

2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+6+10+14=32$

정답 32

20. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

$f'(0)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표를 구해보자.

$f(x)=2x$에서

$-x^3+ax^2+2x=2x$

$x^2(x-a)=0$

$x=0$ 또는 $x=a$

점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 a이다. 즉, 점 A의 좌표는

$(a,\ 2a)$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$$\begin{aligned} f'(a)&=-3a^2+2a^2+2 \\ &=-a^2+2 \end{aligned}$$

이므로

직선 AB의 기울기는 $-a^2+2$이다.

$2\times(-a^2+2)=-1$에서

$a^2=\dfrac{5}{2}$

$a>\sqrt{2}$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$

$x=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

점 B의 좌표는

$\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$

이다.

따라서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

정답 25

21. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 함수 $g(t)$가 최솟값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=0$일 때, 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 5를 가지므로

$g(0)=5$

한편, 함수 $y=-x^2+6x$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고 $f(5)=5$이므로 $1 \le t \le 5$일 때,

$g(t) \ge 5$

한편,

$f(5)=5$이고 $f(6)=0$

또, 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 5로 갖기 위해서는 $t=6$일 때, 구간 $[5, 7]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5이상이어야 하므로

$f(7) \ge 5$

즉,

$a\log_4(7-5) \ge 5$

$a \times \log_{2^2}2 \ge 5$

$a \times \frac{1}{2} \ge 5$

$a \ge 10$

따라서, 양수 a의 최솟값은 10이다.

정답 10

22. **출제의도** : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건으로부터

함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \ge 0$을 만족시켜야 한다. …… ㉠

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 반드시 실근을 갖는다.

(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

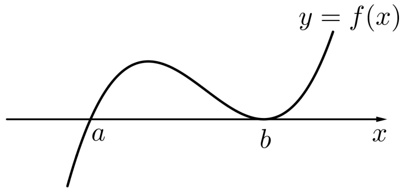
$f(m)<0<f(m+2)$

이므로 $f(m)f(m+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, $b(a<b)$라 할 때, $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$이다.

(ⅱ-①) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$일 때



a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1) \ge 0$, $f(m+2) \ge 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1) \ge 0$,

$f(m)f(m+2) \ge 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

그러므로 $a=m+1$, $b=m+2$이다.

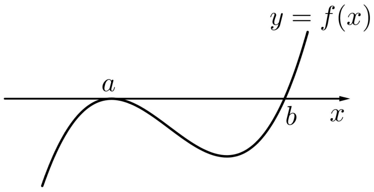
$f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 $m+1<\frac{1}{4}<m+2$이고

정수 m의 값은 -1이다. …… ㉢

즉, $f(x)=x(x-1)^2$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ-②) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$일 때



만약 $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1이라 하자. 그러면

$f(n_1)<0<f(n_1+2)$

이므로 $f(n_1)f(n_1+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다. …… ㉣

그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\ge 0$, $f(m+2)\ge 0$

이고, ㉢과 마찬가지로 $a=m+1$, $b=m+2$, 정수 m의 값은 -1이다.

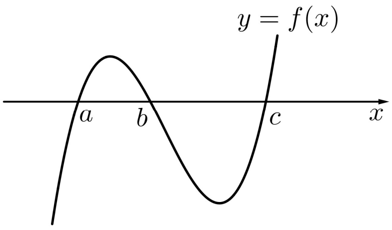
즉, $f(x)=x^2(x-1)$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다

(iii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$

라 하자.



이때 ㉣과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않는다. 그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\ge 0$, $f(m+2)\ge 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1)\ge 0$,

$f(m)f(m+2)\ge 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

즉, $a=m+1$, $b=m+2$

또는 $a=m+1$, $c=m+2$

또는 $b=m+1$, $c=m+2$이다.

또, $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로

$f'(0)<0$이다.

(iii-①) $a=m+1$, $b=m+2$일 때

$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+2=0$이다. 이때 $a=m+1=-1$이므로

$f(x)=x(x+1)(x-c)=(x^2+x)(x-c)$

이다.

$f'(x)=(2x+1)(x-c)+(x^2+x)$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}-c\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$에서

$-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{8}$

그러나 이는 $b<c$에 모순이다.

(iii-②) $a=m+1$, $c=m+2$일 때

$m+1$, $m+2$는 연속하는 두 정수이므로 $f'(n)<0$을 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다. 그러나 이는 $f'(0)<0$에 모순이다.

(iii-③) $b=m+1$, $c=m+2$일 때

$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+1=0$이다. 이때 $c=m+1=1$이므로

$f(x)=(x-a)x(x-1)=(x-a)(x^2-x)$

이다.

$f'(x)=(x^2-x)+(x-a)(2x-1)$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}+\left(-\frac{1}{4}-a\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ 에서

$\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{5}{8}$

그리고 $a=-\frac{5}{8}$ 이면

$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}$

이므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$ 도 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)(x^2-x)$이다.

따라서 $f(8)=\frac{69}{8}\times 56=483$

정답 483

■ [선택: 미적분]
23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ①
28. ② 29. 162 30. 125

23. **출제의도** : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x\times\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{5x\times\frac{\ln(1+5x)}{5x}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

정답 ③

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x=\ln(t^3+1)$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{t^3+1}$$

$y=\sin\pi t$에서

$$\frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$$

따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\pi\cos\pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}=\frac{\pi(t^3+1)\cos\pi t}{3t^2}$$

따라서 $t=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\pi(1^3+1)\cos\pi}{3\times1^2}=\frac{\pi\times2\times(-1)}{3}=-\frac{2}{3}\pi$$

정답 ②

25. **출제의도** : 역함수의 미분법과 치환적분법을 이용하여 함수를 구하고 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
즉, 모든 양수 x에 대하여
$f(x)>0$ ⋯ ㉠
이다.
모든 양수 x에 대하여 $g(f(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=1$
따라서

$$\int_1^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$$

$$=\int_1^a\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\Big[\ln|f(x)|\Big]_1^a$$

$=\ln f(a)-\ln f(1)$ ($\because$ ㉠)
$=\ln f(a)-\ln 8$
$=\ln f(a)-3\ln 2$
이므로
$\ln f(a)-3\ln 2=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$에서
$\ln f(a)=2\ln a+\ln(a+1)+2\ln 2$
$=\ln a^2+\ln(a+1)+\ln 2^2$
$=\ln 4a^2(a+1)$

즉, $f(a)=4a^2(a+1)$이므로

$f(2)=4\times2^2\times(2+1)=48$

정답 ④

[다른 풀이]

함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x에 대하여

$f(x)>0$ ⋯ ㉠

이다.

$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$에서 $f(x)=y$라 하면

$x=1$일 때 $y=f(1)=8$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$이고

$\frac{dy}{dx}=f'(x)$

이때 역함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g'(y)}$

이때 도함수 $g'(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g'(y)\neq0$

따라서

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$$
$$=\int_8^{f(a)}\left\{\frac{1}{g'(y)\times y}\times g'(y)\right\}dy$$
$$=\int_8^{f(a)}\frac{1}{y}dy$$
$$=[\ln|y|]_8^{f(a)}$$
$$=\ln|f(a)|-\ln|8|$$
$$=\ln|f(a)|-3\ln2$$

㉠에서 $f(a)>0$이므로 주어진 등식에서

$$\ln f(a)-3\ln2=2\ln a+\ln(a+1)-\ln2$$
$$\ln f(a)=2\ln a+\ln(a+1)+2\ln2$$
$$=\ln a^2+\ln(a+1)+\ln2^2$$
$$=\ln4a^2(a+1)$$

따라서

$f(a)=4a^2(a+1)$

이므로

$f(2)=4\times2^2\times(2+1)=48$

26. **출제의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $x=t$ $\left(\frac{3}{4}\pi\le t\le\frac{5}{4}\pi\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{5}{4}\pi(1-2t)\cos t$

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$u(t)=1-2t$, $v'(t)=\cos t$

$u'(t)=-2$, $v(t)=\sin t$

라 하면

$$V=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2t)\cos t\,dt$$
$$=[(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt$$
$$=[(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2[-\cos t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$
$$=\left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$$

정답 ③

정답 ①

27. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=e^{-x}+e^{t}$이므로

$y'=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(s, e^{-s}+e^{t})$이라고 하면 접선의 방정식은

$y=-e^{-s}(x-s)+e^{-s}+e^{t}$

이 접선이 원점을 지나므로

$se^{-s}+e^{-s}+e^{t}=0$

$e^{t}=-(s+1)e^{-s}$ ⋯ ㉠

양변을 s에 대하여 미분하면

$e^{t}\dfrac{dt}{ds}=-e^{-s}+(s+1)e^{-s}=se^{-s}$ ⋯ ㉡

또한 $f(t)=-e^{-s}$이므로 양변을 s에 대하여 미분하면

$f'(t)\dfrac{dt}{ds}=e^{-s}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$\dfrac{e^{t}}{f'(t)}=s$, 즉 $f'(t)=\dfrac{e^{t}}{s}$

또한 $f(a)=-e^{-s}=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$ 에서

$s=-\dfrac{3}{2}$

이고 ㉠에서 $e^{a}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$f'(t)=\dfrac{e^{t}}{s}$에서

$$f'(a)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

28. 출제의도 : 정적분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$ 이므로

$$f'(x)=-4e^{4x^2}-4xe^{4x^2}\times 8x$$
$$=-4e^{4x^2}-32x^2e^{4x^2}<0$$

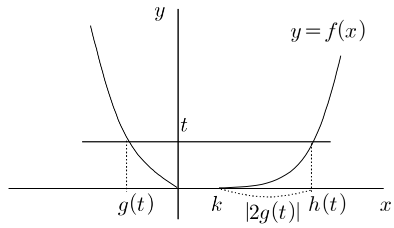
즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

또한, 모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$

가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $\displaystyle\int_{0}^{7}f(x)dx=e^{4}-1$에서 $h(t_1)=7$이라 하면

$$\int_{g(t_1)}^{0}(-4xe^{4x^2})dx=\frac{1}{2}(e^{4}-1)$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_{g(t_1)}^{0}=\frac{1}{2}(e^{4}-1)$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4\{g(t_1)\}^2}=\frac{1}{2}(e^{4}-1)$$

$g(t_1)=-1$

즉 $k+|2\times(-1)|=7$ 에서 $k=5$ 이므로

$f(8)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(9)=f(-2)$

$$\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{f(-2)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{-4\times(-2)e^{4(-2)^2}}{-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{4}{3}e^{16-9}$$

$$=\frac{4}{3}e^{7}$$

정답 ②

29. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등비급수를 구하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=bs^{n-1}$ $(a\neq0,\ b\neq0,\ r\neq0,\ s\neq0)$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로 $-1<r<1$, $-1<s<1$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{ab}{1-rs}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r},\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b}{1-s}$$

이므로

$$\frac{ab}{1-rs}=\frac{a}{1-r}\times\frac{b}{1-s}$$

$1-rs=(1-r)(1-s)$

$r+s=2rs$ $\cdots$ ㉠

(i) $r>0$인 경우

$a_1>0$ 이면 $a_2>0$, $a_3>0$ 이므로

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=3\times\frac{a_2}{1-r^2}$$

$$7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=7\times\frac{a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3a_2}{1-r^2}=\frac{7a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3}{1-r^2}=\frac{7r}{1-r^3}$$

$4r^3-7r+3=0$

$(r-1)(2r-1)(2r+3)=0$

따라서 $r=\frac{1}{2}$인데 ㉠을 만족시키는 s의 값이 존재하지 않으므로 모순이다.

같은 방법으로 $a_1<0$인 경우도 존재하지 않는다.

(ii) $r<0$인 경우

$a_1>0$ 이면 $a_2<0$, $a_3>0$ 이고 수열 $\{|a_{2n}|\}$의 공비는 r^2, 수열 $\{|a_{3n}|\}$의 공비는 $-r^3$ 이므로

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=3\times\frac{-a_2}{1-r^2}$$

$$7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=7\times\frac{a_3}{1+r^3}$$

$$\frac{-3a_2}{1-r^2}=\frac{7a_3}{1+r^3},\quad \frac{-3}{1-r^2}=\frac{7r}{1+r^3}$$

$4r^3-7r-3=0$

$(r+1)(2r-3)(2r+1)=0$

따라서 $r=-\frac{1}{2}$이므로 ㉠에 대입하면 $s=\frac{1}{4}$이다.

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

$b_n=b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + b\left(\frac{1}{64}\right)^{n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{60}$$

$$= \frac{27}{20}$$

따라서 $S = \frac{27}{20}$이므로

$$120S = 120 \times \frac{27}{20} = 162$$

정답 162

30. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

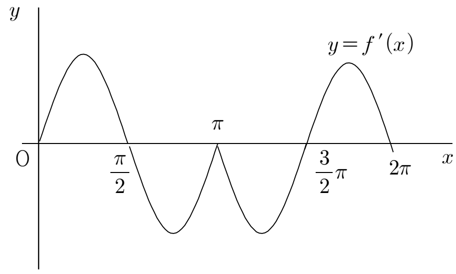
정답풀이 :

$$f'(x) = |sinx|cosx$$

$$= \begin{cases} \sin x \cos x & (\sin x \geq 0) \\ -\sin x \cos x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

이때 함수 $y = \sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$이므로 함수 $y = f'(x)$의 그래프의 개형을 $0 \leq x \leq 2\pi$에서만 그려보면 다음과 같다.



또한

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt$$

에서

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

이므로 $h'(x) = 0$ 즉 $f(x) = g(x)$를 만족시키면서 그 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y = \sin 2x$의 대칭성을 이용하여 양수 a의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi$$

이므로

$$a_6 = 2\pi,\ a_2 = \frac{3}{4}\pi$$

따라서

$$\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2) = \frac{100}{\pi} \times \left(2\pi - \frac{3}{4}\pi\right)$$
$$= 125$$

정답 125

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ③	03. ②	04. ①	05. ⑤
06. ③	07. ④	08. ④	09. ③	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ③	14. ②	15. ④
16. 6	17. 24	18. 5	19. 4	
20. 98	21. 19	22. 10		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$

$= 3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})}$

$= 3^2$

$= 9$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^2 - x$에서

$f'(x) = 4x - 1$

이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = f'(1) = 3$

정답 ③

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$이므로

$$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0$

이므로

$\lim\limits_{x\to -2+} f(x) + \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -2 + 0 = -2$

정답 ①

5. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$에서 $\frac{ar^2\times ar^7}{ar^5}=12$, $ar^4=12$

즉, $a_5=12$

$a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$r^2=\frac{a_7}{a_5}=\frac{24}{12}=2$

$\frac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=2^2=4$이므로

$a_{11}=a_7\times4=24\times4=96$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$$3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-3)$$
$$=3x^2-6x-9$$

따라서 $a=-3$, $b=-9$ 이고

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

정답 ③

7. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$이므로

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{3a+2b}{6ab}$$
$$=\frac{\log_3 32}{6\times log_9 2}$$
$$=\frac{\log_3 2^5}{6\times log_{3^2} 2}$$
$$=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}$$
$$=\frac{5}{3}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$에서

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면 $f(0)=4$이므로

$C=4$

즉, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$f(1)=3$

따라서

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

이므로

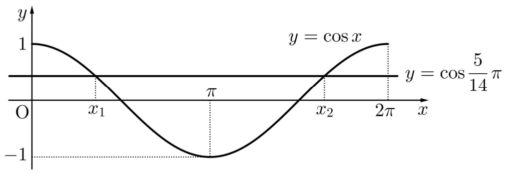
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+4=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\cos x(0\leq x\leq 2\pi)$ 와 직선 $y=\cos\frac{5}{14}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\frac{5}{14}\pi$이고 $\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로

$x_2=2\pi-x_1=\frac{23}{14}\pi$

따라서 $0\leq x\leq 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\leq\sin\frac{\pi}{7}$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\frac{5}{14}\pi\leq x\leq\frac{23}{14}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{23}{14}\pi-\frac{5}{14}\pi=\frac{9}{7}\pi$

정답 ③

10. **출제의도** : 삼차함수 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선이 점 (1, 3)을 지나므로

$f(x)-3=(x-a)(x-2)^2$

$f(x)=(x-a)(x-2)^2+3$ (단, a는 상수)

이때

$f'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

이 접선이 점 $(1,3)$을 지나므로

$3-f(-2)=f'(-2)(1+2)$

$3-f(-2)=3f'(-2)$

$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$

$3-(-29-16a)=3(32+8a)$

$32+16a=96+24a$, $8a=-64$

즉, $a=-8$이므로

$f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$

따라서

$f(0)=8(-2)^2+3=35$

정답 ③

11. **출제의도** : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 점 A(1)에서 출발하고 속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-7$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$s_1(t)=1+\int_0^t(3t^2+4t-7)dt$

$=t^3+2t^2-7t+1$ -----㉠

또, 점 Q가 점 B(8)에서 출발하고 속도가 $v_2(t)=2t+4$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$s_2(t)=8+\int_0^t(2t+4)dt$

$=t^2+4t+8$ -----㉡

이때, 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|s_1(t)-s_2(t)|=4$

㉠, ㉡에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

그러므로

$t^3+t^2-11t-7=4$ 또는

$t^3+t^2-11t-7=-4$

즉,

$t^3+t^2-11t-11=0$ 또는

$t^3+t^2-11t-3=0$

(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때,

$t^2(t+1)-11(t+1)=0$

$(t+1)(t^2-11)=0$

$t>0$이므로

$t=\sqrt{11}$

(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때,

좌변을 인수분해하면

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t>0$이므로

$t=3$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q의 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은

$t=3$

한편,

$v_1(t)=3t^2+4t-7$

$=(3t+7)(t-1)$

이므로

$0\le t<1$일 때, $v_1(t)<0$

$t\ge 1$일 때, $v_1(t)\ge 0$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|dt$$

$$=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$$

$$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$

$=-(-4)+28$

$=32$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 k에 대하여

(i) $a_1=4k$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

a_2도 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

㉠ k가 홀수인 경우

$a_4=a_3+1=k+1$

이때

$a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$

이므로

$3k+1=40$

에서 $k=13$이고,

$a_1=4k=4\times 13=52$

㉡ k가 짝수인 경우

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{k}{2}$$

이때

$$a_2+a_4=2k+\frac{k}{2}=\frac{5}{2}k$$

이므로

$$\frac{5}{2}k=40$$

에서 $k=16$이고,

$a_1=4k=4\times 16=64$

(ⅱ) $a_1=4k-1$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=4k$

a_2는 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k}{2}=2k$$

a_3도 짝수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

이때

$a_2+a_4=4k+k=5k$

이므로

$5k=40$

에서 $k=8$이고,

$a_1=4k-1=4\times8-1=31$

(ⅲ) $a_1=4k-2$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$$

a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+1=(2k-1)+1=2k$

a_3은 짝수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$$

이때

$a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$

이므로

$3k-1=40$

에서 $k=\frac{41}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $a_1=4k-3$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=(4k-3)+1=4k-2$

a_2는 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$$

a_3은 홀수이므로

$a_4=a_3+1=(2k-1)+1=2k$

이때

$a_2+a_4=(4k-2)+2k=6k-2$

이므로

$6k-2=40$

에서 $k=7$이고,

$a_1=4k-3=4\times7-3=25$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$52+64+31+25=172$

정답 ①

13. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge0)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1)=0$

$-1+2a-b=0$, $b=2a-1$

$x<0$일 때

$f'(x)=-x^2-2ax-2a+1$

$$=-(x+1)(x+2a-1)$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$이다. 이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$에서 $f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$에서 $-2a+1\ge 0$이어야 한다.

그러므로 $a\le \frac{1}{2}$ …… ㉠

한편, $x>0$일 때

$$f'(x)=x^2+2ax-b$$
$$=x^2+2ax-2a+1$$
$$=(x+a)^2-a^2-2a+1$$

이고 함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(0)=-2a+1\ge 0$이면 된다.

그러므로 $0<a\le \frac{1}{2}$

(ⅱ) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$이면 된다.

$a^2+2a-1\le 0$,

$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$

그러므로 $-1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-1-\sqrt{2}\le a\le \frac{1}{2}$ …… ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $-1-\sqrt{2}\le a\le \frac{1}{2}$이므로 $a+b=3a-1$의 값의 최댓값은 $a=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때 $-4-3\sqrt{2}$이다.

따라서

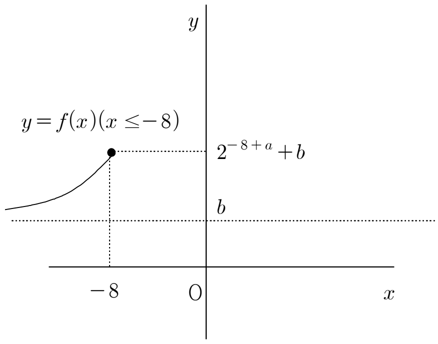
$$M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

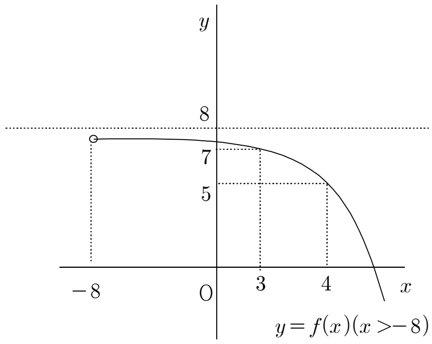
정답 ③

14. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는

$f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉 $b=5$이고 $6 \le f(-8) < 7$ 이어야 하므로

$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$0 \le -8+a < 1$, $8 \le a < 9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

따라서 $a+b=8+5=13$

정답 ②

15. **출제의도** : 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to3} g(x)=g(3)-1$ ----㉠

이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3)\neq0$일 때,

$x=3$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x)\neq0$이므로

$$g(x)=\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to3} g(x)=g(3)$

이 식을 ㉠에 대입하면 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$에 가까우며 $x\neq3$인 x의 값에 대하여

$f(x)\neq0$

이때,

$$\lim_{x\to3} g(x)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} \text{ ----㉡}$$

위에서 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$에서

$\lim\limits_{x\to3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$f(6)=0$

그러므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

(k는 상수)

이 식을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to3} g(x)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$$
$$=\frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$$
$$=\frac{6-k}{k-3}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 $g(3)=3$이므로

$$\frac{6-k}{k-3}=3-1$$

$6-k=2k-6$

$3k=12$

$k=4$

따라서,

$f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이고 $f(5)\neq0$이므로

$$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$$
$$=\frac{5\times4\times2\times\{2\times1\times(-1)+1\}}{2\times1\times(-1)}$$
$$=20$$

정답 ④

정답 24

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 진수 조건에 의하여

$x-1>0$에서 $x>1$ ……㉠

$13+2x>0$에서 $x>-\dfrac{13}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$

에서

$\log_2(x-1)=\dfrac{1}{2}\log_2(13+2x)$

$2\log_2(x-1)=\log_2(13+2x)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x>1$이므로 $x=6$

정답 6

17. 출제의도 : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k-b_k)-a_k\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=34-10\\&=24\end{aligned}$$

18. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=2(a+4)+2(a+2)\\&=4a+12=32\end{aligned}$$

따라서 $a=5$

정답 5

19. 출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

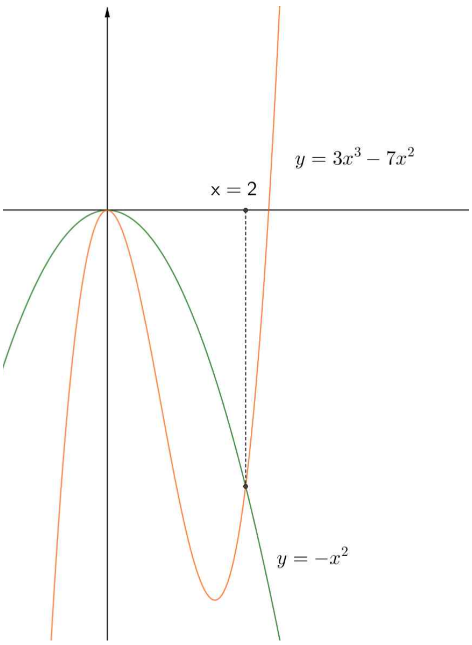
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$

$$=(-12+16)-0$$

$$=4$$

정답 4

20. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R_1$$

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=2^2+1-\boxed{(-2)}$$

$$=7$$

이므로

$$R_1\times R_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\overline{BD}^2$$

$$=\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}}$$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$이므로

$$9\times(p\times q\times r)^2=9\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right\}^2$$

$$=9\times\frac{98}{9}$$

$$=98$$

정답 98

21. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}S_k=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$
$$=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$
$$=28a+56d$$

$28a+56d=644$에서

$a+2d=23$ …… ㉠

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+6d=13m$ …… ㉡

㉡－㉠에서 $4d=13m-23$

$4d+23+13=13m+13$

$4(d+9)=13(m+1)$

$$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, …

한편, $d=\frac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서

$$a=13m-6d$$
$$=13m-6\times\left(\frac{13m-23}{4}\right)$$
$$=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}$$
$$=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}>0$, $m<\frac{69}{13}$

따라서 $m=3$이고 이때 $d=4$이므로

$a=23-2d=15$

이고

$a_2=a+d=15+4=19$

정답 19

22. **출제의도** : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$

이므로

$f(1)=3$ ……㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

이고, $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=4$

즉,

$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)

로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서

$f(1)=3$

이므로

$f(1)=4+C_1=3$

$C_1=-1$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$

즉, $a=1$이므로

$G(x)=x^2+x+b$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)dx&=\Big[G(x)\Big]_1^3\\&=G(3)-G(1)\\&=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)\\&=10\end{aligned}$$

정답 10

■ [선택: 확률과 통계]
23. ① 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 62 30. 336

23. 출제의도 : 이항분포의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{5}=6$

정답 ①

24. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times1!}=4$

P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{2!}{1!\times1!}=2$

따라서 구하는 경우의 수는
$4\times2=8$

정답 ③

25. 출제의도 : 두 사건의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B^C이 서로 배반사건이므로
$A\subset B$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}-\mathrm{P}(A)$

$=\frac{7}{10}-\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{2}$

따라서 $A\subset B$이므로
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

$=\frac{3}{10}$

정답 ③

26. 출제의도 : 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
시험 점수를 확률변수 X라 하면
X는 정규분포 $\mathrm{N}(68, 10^2)$을 따르고

$Z=\frac{X-68}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는

표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서
$\mathrm{P}(55\le X\le78)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{55-68}{10}\le Z\le\frac{78-68}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le1)$

$=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.3)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4032+0.3413$

$=0.7445$

정답 ②

27. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_7\mathrm{P}_4=7\times6\times5\times4$

(ⅰ) 함수 f의 치역에 4가 포함되고 6이 포함되지 않는 경우

함숫값이 4인 정의역의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

함숫값이 2, 4가 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 두 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times12}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{70}$$

(ⅱ) 함수 f의 치역에 6이 포함되고 4가 포함되지 않는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times12}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{70}$$

(ⅲ) 함수 f의 치역에 4와 6이 모두 포함되는 경우

함숫값이 4, 6인 정의역의 원소와 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

함숫값이 2, 4, 6이 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 함숫값을 정하는 경우의 수는 4

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{6\times4}{7\times6\times5\times4}=\frac{1}{35}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{70}+\frac{3}{70}+\frac{1}{35}=\frac{4}{35}$$

정답 ④

28. **출제의도** : 주어진 시행과 표본평균의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3일 확률은 $\frac{1}{6}$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1, 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2라 하면 구하는 확률은 $X_1+X_2=4$일 확률이다.

(ⅰ) $(X_1, X_2)=(1, 3)$인 경우

첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{81}$$

첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$$

이 경우의 확률은

$$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$$

(ⅱ) $(X_1, X_2)=(3, 1)$인 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$$

(ⅲ) $(X_1, X_2)=(2, 2)$인 경우

① 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{81}$$

② 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$$

③ 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$2\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$$

이 경우의 확률은

$$\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{1}{9}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{81}+\frac{5}{81}+\frac{1}{9}=\frac{19}{81}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

따라서

구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수가 1 또는 3 또는 5인 확률이므로

$$p={}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$=\frac{405+90+1}{4^5}$$

$$=\frac{31}{64}$$

즉, $128\times p=128\times\frac{31}{64}$

$=62$

정답 62

30. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a\times d$가 홀수이므로 a와 d는 모두 홀수이고, $b+c$가 짝수이므로 b와 c가 모두 홀수이거나 b와 c가 모두 짝수이다.

(ⅰ) b와 c가 모두 홀수인 경우

a, b, c, d가 모두 13 이하의 홀수이다. 13 이하의 홀수의 개수는 7이고, 조건 (가)에서 $a\le b\le c\le d$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 7개

에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수 ${}_7H_4$와 같다.

$${}_7H_4={}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

(ⅱ) b와 c가 모두 짝수인 경우

a와 d가 모두 홀수, b와 c가 모두 짝수, $a\le b\le c\le d$이므로 $d-a$의 값은 12 이하의 자연수이다.

① $d-a=12$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 1, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 6개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_6H_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$1\times{}_6H_2=1\times{}_7C_2=1\times\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

② $d-a=10$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 2이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 5개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_5H_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$2\times{}_5H_2=2\times{}_6C_2=2\times\frac{6\times5}{2\times1}=30$$

③ $d-a=8$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 3이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$3\times{}_4H_2=3\times{}_5C_2=3\times\frac{5\times4}{2\times1}=30$$

④ $d-a=6$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 4이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3H_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$4\times{}_3H_2=4\times{}_4C_2=4\times\frac{4\times3}{2\times1}=24$$

⑤ $d-a=4$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 5이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2H_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$5\times{}_2H_2=5\times{}_3C_2=5\times\frac{3\times2}{2\times1}=15$$

⑥ $d-a=2$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 6이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 $a+1=b=c$에서 1이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$6\times1=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$210+21+30+30+24+15+6=336$

정답 336

[다른 풀이]

(ⅱ) b와 c가 모두 짝수인 경우

홀수 a, d와 짝수 b, c에 대하여

$1\le a\le b\le c\le d\le 13$

이므로

$a=a'$, $b-a=b'$, $c-b=c'$, $d-c=d'$, $14-d=e'$

이라 하면

a', b', d', e'은 홀수이고, c'은 0 또는 짝수이다.

$a'+b'+c'+d'+e'=14$

음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'', e''에 대하여

$a'=2a''+1$, $b'=2b''+1$, $c'=2c''$, $d'=2d''+1$, $e'=2e''+1$

이라 하면

$a''+b''+c''+d''+e''=5$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

■ [선택: 미적분]
23. ④ 24. ② 25. ② 26. ⑤ 27. ①
28. ② 29. 18 30. 32

23. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$

$$=\frac{7}{2}\times 1\times 1=\frac{7}{2}$$

정답 ④

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t}\ \cdots\ ㉠$$

(단, $1-2\sin 2t\neq 0$)

㉠의 우변에 $t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times 1}$$

$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

정답 ②

25. **출제의도** : 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$$

$$=\int_1^e f'(x)f(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$$

$$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$$

$$=\frac{e^2}{2}+e$$

정답 ②

26. **출제의도** : 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\ \cdots\ ㉠$$

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn+1-d) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$

㉠에서

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}(1-0)$

$= \frac{1}{d}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$= 2 - \frac{1}{d}$ ⋯ ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$r = \frac{1}{1+d}$

이때 $d > 0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d}$ ⋯ ㉢

이므로 ㉡, ㉢에서

$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d}$,

$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$

$d = 2$

㉡ 또는 ㉢에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$

정답 ⑤

27. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \begin{cases} -\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x \ge 0) \end{cases}$$

이므로 $x < 0$일 때

$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

에서

$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}$

$= \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

이고, $x \ge 0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+0=1$$

따라서 $-\ln 4 \le x \le 1$에서의 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+\int_0^1 1dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln 4}^{0}+[x]_0^1$$

$$=\left(\frac{e^0-e^0}{2}-\frac{e^{-\ln 4}-e^{\ln 4}}{2}\right)+(1-0)$$

$$=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{2}\right)+1$$

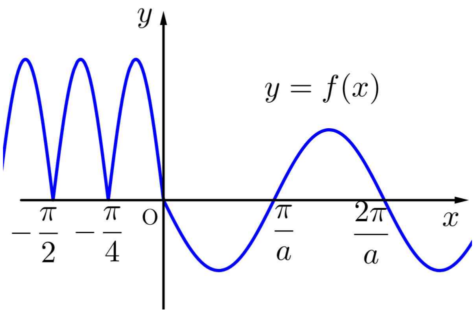
$$=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 정적분과 절댓값이 포함된 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$F(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$F'(x)=f(x)$

이고,

$$g(x)=\begin{cases}-F(x) & (F(x)<0)\\ F(x) & (F(x)\ge 0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (F(x)<0)\\ f(x) & (F(x)>0)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)=|F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k)=0$인 실수 k가 존재하지 않거나 $F(k)=0$인 모든 실수 k에 대하여 $F'(k)=f(k)=0$이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 미분가능할 조건

$-a\pi<0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로

$F(k)=\int_{-a\pi}^{k}f(t)dt=0$인 음의 실수 k의 값은 $-a\pi$뿐이다.

이때

$f(k)=f(-a\pi)=2|\sin(-4a\pi)|=0$

이어야 하므로 $-4a\pi=-n\pi$, 즉

$a=\frac{n}{4}$ (n은 자연수) ⋯ ㉠

(ii) 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-2\sin 4t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cos 4t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 0-\frac{1}{2}\cos(-\pi)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여

$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt$$

$$=n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=n$$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt$$

$$=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}$$

$$=n+\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)$$

$$=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}$$

$$=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}$$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$$n=\frac{4}{n}\left(1-\cos\frac{n}{4}k\right)$$

에서

$$\cos\frac{n}{4}k=1-\frac{n^2}{4} \quad \cdots ㉡$$

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\frac{n}{4}k=0$이어야 하므로

$\frac{n}{4}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서

$$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}$$

이때 m, n은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}=-1$, 즉 $n^2=8$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}>0$$

즉,

$$\cos\frac{n}{4}x>1-\frac{n^2}{4}$$

이어야 한다.

따라서 $1-\frac{n^2}{4}<-1$이어야 하므로

$$n^2>8$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이므로 ㉠에서 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

정답 ②

29. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+a\times 0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$

$a=\frac{1}{3}<1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}1=1=a$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a>3$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+a}{3\times0+1}=a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=b>3=\frac{9}{3}>\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3<a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$$

에서

$a=9,\ b=9$

이상에서 $a=9,\ b=9$이므로

$a+b=18$

정답 18

30. **출제의도** : 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=5$

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{AC}}=5-4=1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{OC}}^2-2\times\overline{\mathrm{CP}}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CP}}=x$라 하면

$5^2=x^2+1^2-2\times x\times1\times cos\,\theta$

$x^2-2x\cos\theta-24=0$ ……㉠

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2-\sqrt{2}x-24=0$

$x>0$이므로 $x=4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta}-2\cos\theta\frac{dx}{d\theta}+2x\sin\theta=0$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{x\sin\theta}{\cos\theta-x}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $\dfrac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-4\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{CM}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2x\sin\theta\times x\cos\theta$$

$$=x^2\sin\theta\cos\theta$$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS(\theta)}{d\theta}$

$= 2x\dfrac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta$

이 식에 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= 2 \times 4\sqrt{2} \times \left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}\right) \times \cos\dfrac{\pi}{4} \times \sin\dfrac{\pi}{4}$

$\qquad + (4\sqrt{2})^2\cos^2\dfrac{\pi}{4} - (4\sqrt{2})^2\sin^2\dfrac{\pi}{4}$

$= -\dfrac{32}{7}$

따라서 $-7 \times S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -7 \times \left(-\dfrac{32}{7}\right) = 32$

정답 32

■ [선택: 기하]
23. ④ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 17 30. 27

23. 출제의도 : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
좌표공간의 점 $\mathrm{A}(8, 6, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
$\mathrm{B}(8, 6, -2)$
따라서 선분 AB의 길이는
$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(8-8)^2+(6-6)^2+(-2-2)^2}$$
$$=\sqrt{16}$$
$$=4$$

정답 ④

24. 출제의도 : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7,\ 6)$에서의 접선의 방정식은
$$\frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1$$
즉, $y=x-1$
이다.
직선 $y=x-1$에서
$y=0$일 때,
$0=x-1$
$x=1$
따라서 구하는 x절편은
1

정답 ①

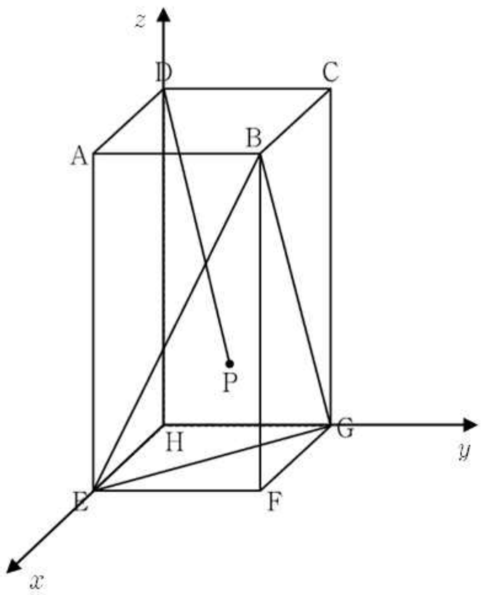
25. 출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\mathrm{A}(4,\ 3)$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$
이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=5$
점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는
$2\pi\times5=10\pi$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 공간도형에 공간좌표를 적용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 H를 원점이라 하고,
반직선 HE가 x축의 양의 방향,
반직선 HG가 y축의 양의 방향,
반직선 HD가 z축의 양의 방향이 되도록 직육면체 ABCD$-$EFGH를 놓으면 그림과 같다.



$\overline{HE}=\overline{AD}=3$,

$\overline{HG}=\overline{AB}=3$,

$\overline{HD}=\overline{AE}=6$

이므로

$B(3,\ 3,\ 6)$,

$E(3,\ 0,\ 0)$,

$G(0,\ 3,\ 0)$

이다.

삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

$\left(\frac{3+3+0}{3},\ \frac{3+0+3}{3},\ \frac{6+0+0}{3}\right)$

즉, $(2,\ 2,\ 2)$

이다.

따라서

$D(0,\ 0,\ 6)$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{DP}&=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-6)^2}\\&=\sqrt{4+4+16}\\&=\sqrt{24}\\&=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 포물선의 성질을 이용하여 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=4px$에서

초점 F의 좌표는

$(p,\ 0)$

이고, 준선의 방정식은

$x=-p$

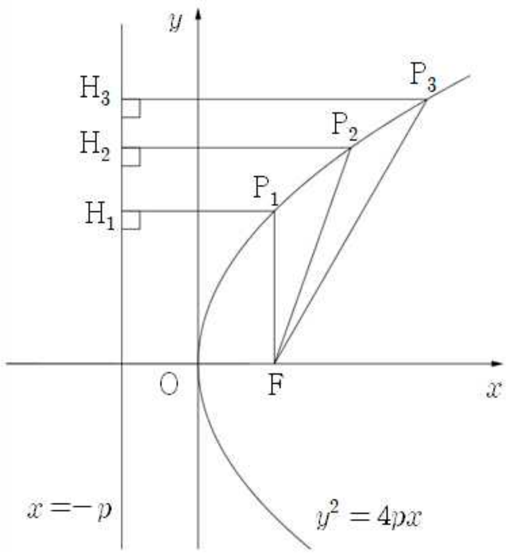
이다.

포물선 위의 세 점 P_1, P_2, P_3에서

포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각

H_1, H_2, H_3

이라 하자.



세 점 P_1, P_2, P_3의 x좌표가 각각

$p,\ 2p,\ 3p$

이므로

포물선의 성질에 의해

$\overline{FP_1}=\overline{H_1P_1}=p+p=2p$,

$\overline{FP_2}=\overline{H_2P_2}=p+2p=3p$,

$\overline{FP_3}=\overline{H_3P_3}=p+3p=4p$

이다.

$\overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{FP}_3}=27$에서

$2p+3p+4p=27$

$9p=27$

따라서 $p=3$

정답 ③

28. 출제의도 : 정사영의 성질을 이용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간에서 원점을 O라 하자.

점 P는 중심이 A$(0,\ 0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=4$

이다.

$\overline{\mathrm{OA}}\perp(xy$ 평면$)$

이고

점 P가 xy 평면 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{OP}}$

이다.

직각삼각형 AOP

$\overline{\mathrm{OA}}=1$

이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$$

원점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{QM}}$

이다.

$\overline{\mathrm{OA}}\perp(xy$ 평면$)$,

$\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$

이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$

이다.

점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=2$

이다.

직각삼각형 OAM에서

$$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

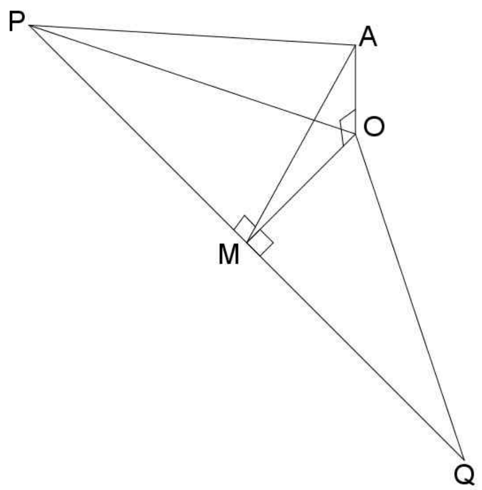
직각삼각형 OPM에서

$$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$

이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PM}}=4\sqrt{3}$

이다.



한편, 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T는 중심이 M이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$

이다.

구 S와 구 T가 만나서 생기는 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 포함하는 평면을 α라 하면

$\alpha \perp \overline{\mathrm{AM}}$

이다.

삼각형 OAM에서

$\angle \mathrm{AMO} = \theta$

라 하면

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{AM}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

이다.

이때, 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는

$\dfrac{\pi}{3}$

이다.

점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}} \le 2\sqrt{3}$

이므로

삼각형 BPQ의 넓이를 S라 하면

$S = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{BH}}$

$\le \dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$

$= 12$

이다.

삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S' = S \times \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\le 12 \times \dfrac{1}{2}$

$= 6$

따라서 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

6

이다.

정답 6

29. 출제의도 : 타원의 성질을 이용하여 세 점 P, Q, F 사이의 관계를 파악한 후, 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$의 한 초점이

$\mathrm{F}(c,\ 0)(c > 0)$이므로

타원의 성질에 의해

$c^2 = 9 - 5 = 4$

$c > 0$이므로

$c = 2$

이다.

타원 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$의 다른 한 초점을

F′이라 하면

$\mathrm{F}'(-2,\ 0)$

이다.

점 P가 타원 위의 점이므로

타원의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 6$ …… ㉠

이다.

이때,

$\overline{\mathrm{PQ}} - \overline{\mathrm{PF}} \ge 6$ …… ㉡

이므로

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{PF'}} \ge 12$ …… ㉢

이다.

한편, 원의 중심을 C라 하면

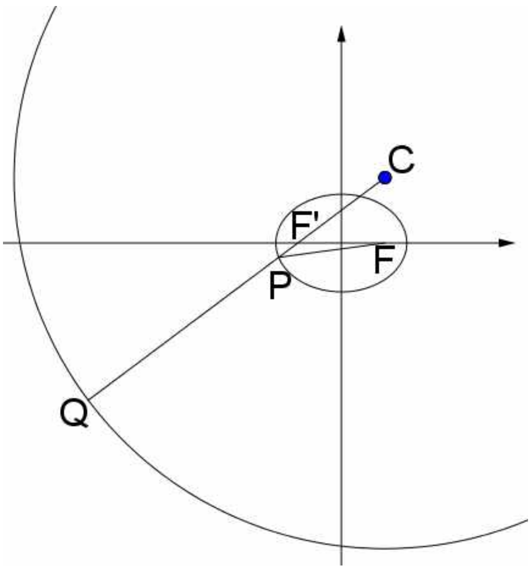
$\mathrm{C}(2,\ 3)$

이므로

$\overline{\mathrm{CF'}} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2} = 5$

이다.

이때, 주어진 조건을 만족시키는 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 중심이 C(2, 3)이고 반지름의 길이가 r인 원은 다음 그림과 같다.



㉢에서
세 점 P, Q, F′이 일직선 위에 있을 때 $\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 값이 최소이고,
$\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 값의 최솟값은 12이다.
따라서 $\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 값이 최소일 때 원의 반지름의 길이 r의 값은

$$r=\overline{CF'}+\overline{F'P}+\overline{PQ}$$
$$=5+12$$
$$=17$$

정답 17

30. **출제의도** : 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에서
$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{PQ}$는 방향이 같다. ……㉠

$$9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=9|\overrightarrow{PQ}|^2\times\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|},$$

$$4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}=4|\overrightarrow{AB}|^2\times\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

㉠에서 $\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$이므로

$$9|\overrightarrow{PQ}|^2=4|\overrightarrow{AB}|^2$$

$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|$ ……㉡

조건 (나)에서

$$\frac{\pi}{2}<\angle CAQ<\pi$$

조건 (다)와 ㉠에서

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{CB}|\cos(\angle ABC)$$
$$=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{CB}|\cos\frac{\pi}{4}$$

$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|$ 이므로

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\frac{2}{3}\times|\overrightarrow{AB}|\right)\times(\sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|)\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2=24$$

$$|\overrightarrow{AB}|=6$$

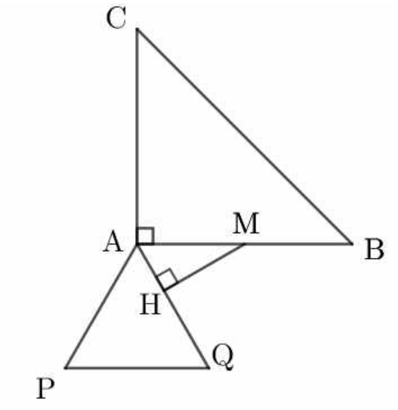
㉡에서

$$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{2}{3}\times6=4$$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로

$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|=4$$

$$\angle BAQ=\frac{\pi}{3}$$



선분 AB의 중점을 M, 점 M에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| &= |2\overrightarrow{XM}| \\
&\geq 2|\overrightarrow{HM}| \\
&= 2\times|\overrightarrow{AM}|\times\sin\frac{\pi}{3} \\
&= 2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

따라서 $m=3\sqrt{3}$ 이므로

$m^2=27$

정답 27

[다른 풀이]

세 점 A, B, C의 좌표를 각각

A(0, 0), B(6, 0), C(0, 6)

이라 하면 점 P와 Q의 좌표는

$\mathrm{P}(-2,\ -2\sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(2,\ 2\sqrt{3})$

점 X는 선분 AQ 위의 점이므로 X의 좌표는

$\mathrm{X}(t,\ -\sqrt{3}t)\ (0\leq t\leq 2)$

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| &= |(-t,\ \sqrt{3}t)+(6-t,\ \sqrt{3}t)| \\
&= |(6-2t,\ 2\sqrt{3}t)| \\
&= \sqrt{4t^2-12t+36} \\
&= \sqrt{4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+27}
\end{aligned}
$$

$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값은 $t=\frac{3}{2}$일 때, $\sqrt{27}$이다.

따라서 $m=\sqrt{27}$이므로

$m^2=27$

2024학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 2023.06.05.(월)

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01. ⑤	02. ④	03. ②	04. ②	05. ①
06. ④	07. ③	08. ③	09. ①	10. ②
11. ③	12. ⑤	13. ①	14. ③	15. ②
16. 3	17. 33	18. 6	19. 8	20. 39
21. 110	22. 380			

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3\times 2^{-1}$$
$$=3\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 다항함수의 미분과 미분계수의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2-2x+3$

에서

$f'(x)=2x-2$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$
$$=2\times 3-2$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\times 10$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30$$

따라서

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$$

이므로

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k=30$$
$$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

에서

$f(1)=4-f(1)$

$2f(1)=4$

따라서 $f(1)=2$

정답 ②

5. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=(x^3+1)f(x)$

이므로

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

이때 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로

$$\begin{aligned}g'(1)&=3f(1)+2f'(1)\\&=3\times2+2\times3\\&=12\end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이해하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

이므로

$\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$

에서

$\cos\theta=-7\sin\theta$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+49\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=\frac{1}{50}$

한편, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta>0$

따라서

$\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

정답 ④

7. 출제의도 : 로그함수의 점근선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$이다.

곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$와 직선 $x=a$가 만나는 점 A의 좌표는

$\left(a,\ \log_2\frac{a}{4}\right)$

곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $x=a$가 만나는 점 B의 좌표는

$\left(a,\ \log_{\frac{1}{2}}a\right)$

한편, $a>2$에서

$\log_2\frac{a}{4}>\log_2\frac{2}{4}=-1$,

$\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}2=-1$

이므로

$\log_2\frac{a}{4}>\log_{\frac{1}{2}}a$

이때,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\log_2\frac{a}{4}-\log_{\frac{1}{2}}a\\&=(\log_2a-2)+\log_2a\\&=2\log_2a-2\end{aligned}$$

이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=4$

이므로

$2\log_2 a-2=4$

$\log_2 a=3$

따라서 $a=2^3=8$

정답 ③

8. **출제의도** : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉

$-x^3+3x^2-1=k \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

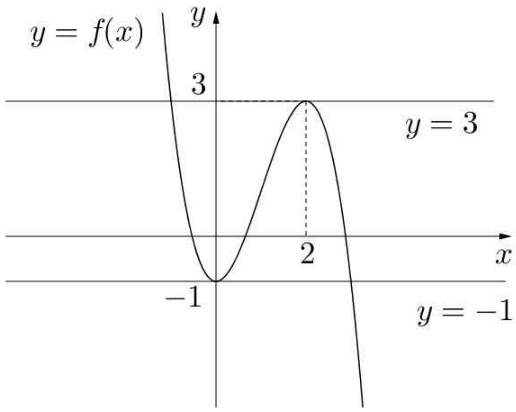
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값

$f(0)=-1$을 갖고, $x=2$에서 극댓값

$f(2)=3$을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

정답 ③

9. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$에서

$n=1$일 때

$\frac{1}{a_1}=3$이므로

$a_1=\frac{1}{3}$

$n\ge 2$일 때

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}$$

$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$

$$=2n+1$$

이므로 $(2n-1)a_n=\frac{1}{2n+1}$에서

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

이때 $n=1$일 때 $a_1 = \frac{1}{3}$이므로

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots \right. \\ &\qquad \left. +\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{20}{21} \\ &= \frac{10}{21}\end{aligned}$$

정답 ①

10. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(3, 0)$이다.

이때

$$(A\text{의 넓이}) = \int_0^2 f(x)dx,$$

$$(B\text{의 넓이}) = \int_2^3 \{-f(x)\}dx$$

이므로

$(A$의 넓이$)-(B$의 넓이$)$

$$\begin{aligned}&= \int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 \{-f(x)\}dx \\ &= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_0^3 f(x)dx = 3\end{aligned}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx &= k\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)dx \\ &= k\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 \\ &= k\left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right) \\ &= \frac{9}{4}k\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{9}{4}k = 3$$

따라서

$$k = \frac{4}{3}$$

정답 ②

11. **출제의도** : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 (s, s^2)이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

이므로

$2s=2t$
에서
$s=t$
즉, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$
이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로
$tx=2tx-1$
에서
$x=\dfrac{1}{t}$
즉, 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 1\right)$
따라서

$$\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to 1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to 1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$$
$$=2\sqrt{2}$$

정답 ③

12. 출제의도 : 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$이라 하자.
$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로
$$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$$
$$=a_{n+2}-a_n$$
$$=2d$$
수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
(ⅰ) $d>0$일 때,
$a_1=a_2-d=-4-d<0$
$a_2=-4<0$
이므로
$b_1=a_1+a_2=-8-d<a_1$
$n(A\cap B)=3$이려면
$b_2=a_1$ 또는 $b_3=a_1$
이어야 한다.
① $b_2=a_1$일 때,
$b_3=a_3,\ b_4=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로
$b_2=a_1$에서
$-8+d=-4-d$
$2d=4$
$d=2$
따라서
$$a_{20}=a_2+18d$$
$$=-4+18\times 2$$
$$=32$$
② $b_3=a_1$일 때,
$b_4=a_3,\ b_5=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로
$b_3=a_1$에서
$-8+3d=-4-d$
$4d=4$
$d=1$
따라서
$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times1$

$=14$

(ⅱ) $d<0$일 때,

③ $a_1>0$이면 $a_2<b_1<a_1$이므로

$n(A\cap B)=0$

④ $a_1=0$이면 $b_1=a_2$, $b_2=a_4$이므로

$n(A\cap B)=2$

⑤ $a_1<0$이면 $b_1<a_2$이므로

$n(A\cap B)\le 2$

③, ④, ⑤에서

$d<0$이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

정답 ⑤

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq0)$이라 하자.

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$

$=a_{n+2}-a_n$

$=2d$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

$n(A\cap B)=3$이려면

$A\cap B=\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_i,\ b_{i+1},\ b_{i+2}\}$

(단, $i=1,\ 2,\ 3$)

이어야 한다.

(ⅰ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$인 경우

$a_1=b_1$

이어야 한다.

이때, $b_1=a_1+a_2=a_1-4$이므로

$a_1=a_1-4$

즉, a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_2,\ b_3,\ b_4\}$인 경우

$a_1=b_2$

이어야 한다.

이때, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로

$a_1=b_2$에서

$-4-d=-8+d$

$2d=4$

$d=2$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times2$

$=32$

(ⅲ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_3,\ b_4,\ b_5\}$인 경우

$a_1=b_3$

이어야 한다.

이때, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로

$a_1=b_3$에서

$-4-d=-8+3d$

$4d=4$

$d=1$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times1$

$=14$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

13. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{BCD}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAB}=\beta\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$,

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\beta=17$ ……㉠

한편, 점 E가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 두 삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$, $\mathrm{CQ_1Q_2}$의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin\beta}=2r$, $\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin\alpha}=4r$

이므로

$$\sin\alpha:\sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{4r}:\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{2r}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}:3$$

즉, $\sin\beta=\frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin\beta=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$$

$\cos\beta<0$이므로

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$=-\sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$=-\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2}ab\sin\beta=2$$

에서

$$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5}=2$$

$ab=5$

㉠에서

$$a^2+b^2-2\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=17$$

$a^2+b^2=11$

따라서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=11+2\times5=21$

이므로

$a+b=\sqrt{21}$

정답 ①

14. 출제의도 : 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\int_0^2(-t^4+t^3)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+4$$
$$=-\frac{12}{5}$$

(ⅱ) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt$$
$$=\int_0^2 -\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$$
$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$$
$$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$$
$$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}$$
$$=-\frac{11}{15}$$

(ⅲ) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$
$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$
$$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$$
$$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}$$
$$=\frac{4}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$ 이므로 a_3, a_4, a_5, a_6은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$a_1=k>0$이므로

$a_2=a_1-2-k=-2<0$

$a_3=a_2+4-k=2-k$

(i) $a_3=2-k>0$인 경우

$2-k>0$에서 $k<2$ 즉 $k=1$이므로

$a_4=a_3-6-k=-6<0$

$a_5=a_4+8-k=1>0$

$a_6=a_5-10-k=-10<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a_3=2-k<0$인 경우

즉 $k>2$ 이므로

$a_4=a_3+6-k=8-2k$

① $a_4=8-2k>0$인 경우

즉 $k<4$ 이므로 $2<k<4$에서 $k=3$일 때

$a_4=8-6=2$

$a_5=a_4-8-k=-9<0$

$a_6=a_5+10-k=-2<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a_4=8-2k<0$인 경우

즉 $k>4$ 이므로

$a_5=a_4+8-k=16-3k$

㉠ $a_5=16-3k>0$인 경우

즉 $k<\dfrac{16}{3}$에서 $4<k<\dfrac{16}{3}$ 이므로

$k=5$

$a_5=16-15=1$

$a_6=a_5-10-k=-14<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_5=16-3k<0$인 경우

즉 $k>\dfrac{16}{3}$이므로 $k\geq 6$인 경우이다.

이때

$a_6=a_5+10-k=26-4k$

이고 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이기 위해서는

$a_6>0$이어야 하므로

$a_6=26-4k>0$

$k<\dfrac{13}{2}$

즉 $6\leq k<\dfrac{13}{2}$ 에서 $k=6$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$3+5+6=14$

정답 ②

16. 출제의도 : 지수부등식을 만족시키는 자연수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\left(2^{-2}\right)^x=2^{-2x}$이므로 주어진 부등식은

$2^{x-6}\leq 2^{-2x}$

양변의 밑 2가 1보다 크므로

$x-6\leq -2x$

$3x\leq 6$

$x\leq 2$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2=3$

정답 3

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (8x^3-1)\,dx$$
$$=2x^4-x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-x+3$이므로

$f(2)=32-2+3=33$

정답 33

18. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2$

에서

$a+b+a=-2$

$2a+b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, $f'(x)=3ax^2+b$이고 $f'(1)=0$이어야 하므로

$3a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=2,\ b=-6$

그러므로

$f(x)=2x^3-6x+2$

이고

$$f'(x)=6x^2-6$$
$$=6(x+1)(x-1)$$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6을 갖는다.

정답 6

19. **출제의도** : 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최솟값이

$-a+8-a=8-2a$

이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$8-2a\geq 0$

즉, $a\leq 4$이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고 이 함수의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$이므로 $0\leq x\leq \dfrac{2\pi}{b}$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$$

이어야 한다.

즉, $\dfrac{15}{4}<b\leq\dfrac{19}{4}$이고 b는 자연수이므로

$b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

정답 8

20. 출제의도 : 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$

이고

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$$=F(x)-F(0)$$

이므로

$g'(x)=f(x)$

그러므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉠

즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) … ㉡

로 놓을 수 있다.

(ⅰ) $g(4)\ge 0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge g(4)\ge 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\ge |g(3)|$, 즉 $g(x)\ge g(3)$이어야 한다. … ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\ge |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉣

이어야 한다.

㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$ (단, C는 적분상수)

그러므로

$$g(x)=F(x)-F(0)$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$$

㉣에서

$$g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$$

$$\frac{15}{2}a=9$$

$$a=\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)$$

$$=5\times\frac{39}{5}=39$$

정답 39

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \cdots ㉠$$

는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

㉠에서

$g(0)=0$ … ㉡

조건에서 $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉢

그러므로 $g'(4)=0$ … ㉣

(i) $g(4) \ge 0$인 경우

$x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge g(4) \ge 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)| = g(x)$

이다.

조건에서 $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \ge |g(3)|$, 즉 $g(x) \ge g(3)$이어야 하므로 $g(3)=g(4)$이어야 한다.

이는 ㉢에 모순이다.

(ii) $g(4) < 0$인 경우

$x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \ge |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉤

이어야 한다.

㉡, ㉤에서

$$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x+a)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{3}x^2-ax \ (a\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$g'(x)=x^2+\frac{2(a-3)}{3}x-a$$

㉣에서

$$g'(4)=16+\frac{8}{3}(a-3)-a=8+\frac{5}{3}a=0,$$

$$a=-\frac{24}{5}$$

㉠에서

$$f(x)=g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$$

이므로

$$f(9)=81-\frac{234}{5}+\frac{24}{5}$$

$$=81-\frac{210}{5}=39$$

21. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또, 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

그러므로 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$은 한 점에서 만난다.

$t=1$일 때, 곡선 $y=1-\log_2 x$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-1}$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(1)=1$

$t=2$일 때, 곡선 $y=2-\log_2 x$는 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-2}$은 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(2)=2$

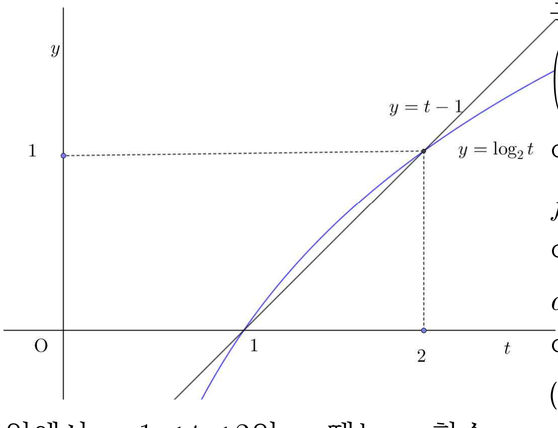
이 명제가 참이므로

$A=100$

ㄴ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선

$y=-\log_2 x$를 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이다. 이때 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표는 증가한다.
이때 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표보다 커진다.
그러므로 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
이 명제가 참이므로 $B=10$

ㄷ. $g(x)=t-\log_2 x$, $h(x)=2^{x-t}$이라 하면 함수 $y=g(x)$는 감소함수이고, 함수 $y=h(x)$는 증가함수이므로 $f(t)\ge t$이기 위해서는
$g(t)\ge h(t)$
이어야 한다. 즉,
$t-\log_2 t\ge 2^{t-t}$
$t-1\ge \log_2 t$ ……㉠
이때 두 함수 $y=\log_2 t$, $y=t-1$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$에서 만나고 다음 그림과 같다.



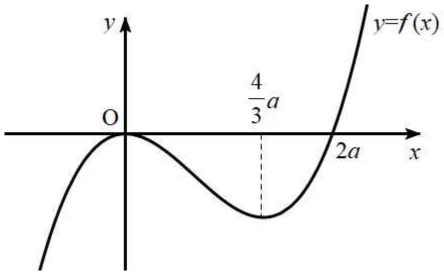
위에서 $1<t<2$일 때는 함수 $y=\log_2 t$의 그래프가 직선 $y=t-1$보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.
즉, $1<t<2$일 때는 부등식
$f(t)\ge t$
를 만족시키지 못한다.
이 명제가 거짓이므로
$C=0$

이상에서 $A=100$, $B=10$, $C=0$이므로
$A+B+C=100+10+0$
$=110$

정답 110

22. 출제의도 : 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 존재해야 하는데, 그러려면 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.
이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서
$f'(x)=3x^2-4ax$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.
(i) $a>0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

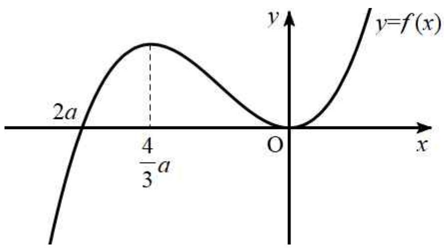
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=3$, $k=4$가 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<3$, $\frac{4}{3}a>4$

$3<a<\frac{27}{8}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a<0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=-4$, $k=-3$이 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<-4$, $\frac{4}{3}a>-3$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

즉, $a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$이므로

$f(x)=x^3+4x^2$

$f'(x)=3x^2+8x$

따라서

$f'(10)=3\times10^2+8\times10=380$

정답 380

■ [선택: 미적분]

23. ⑤ 24. ④ 25. ① 26. ② 27. ③
28. ② 29. 5 30. 24

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}$$

$$=\frac{5}{2}$$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\times 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t^2+1}\times 2t$$

$$=\frac{6t}{t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}$$

$$=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{6\times 2\times(2^2+1)}{-5\times 2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

정답 ④

25. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$$

$$2^b=8$$

$$b=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$=\frac{8a}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$$

$$=\frac{8a}{3}\times\frac{\ln 2}{\ln 2}$$

$= \frac{8a}{3}$

이므로

$\frac{8a}{3}=16$에서

$a=6$

따라서

$a+b=6+3=9$

정답 ①

26. 출제의도 : 미분법을 이용하여 방정식이 서로 다른 실근의 개수가 2일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-5x+2\ln x=t$ 에서

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면

$$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$$
$$=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

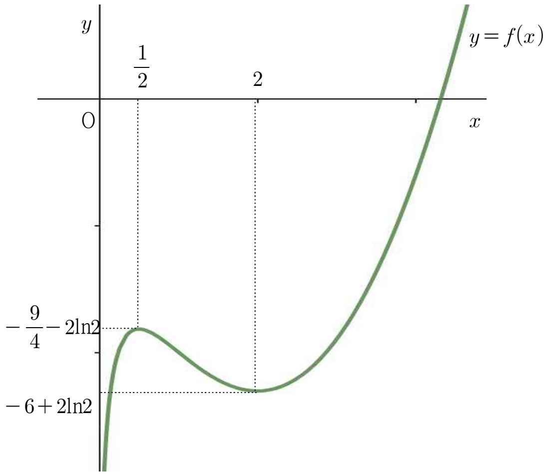
이때 함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\times\frac{1}{2}+2\ln\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{9}{4}-2\ln 2$$

극솟값은

$$f(2)=2^2-5\times 2+2\ln 2$$
$$=-6+2\ln 2$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$ 이 서로 다른 실근의 개수가 2가 되기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ 또는 $t=-6+2\ln 2$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은

$$\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\frac{33}{4}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$ 이므로

곡선 $y=\sin x$위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|$$

$$=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$$

그런데 $0<t<\pi$ 이므로

$$\tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

이므로

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to0+$이고

$$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$$

이므로

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2^2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구한 후, 상수 a, b의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$ …… ㉠

조건 (가)에서

양변에 $x=2$를 대입하면

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\{f(0)\}^2+2f(0)=\{f(2)\}^2+2f(2)$

$\{f(2)-f(0)\}\{f(2)+f(0)+2\}=0$

$f(2)=f(0)$ 또는 $f(2)+f(0)+2=0$

$f(2)=f(0)$이면

조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$f(2)+f(0)+2=0$ …… ㉢

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1$

을 ㉢에 대입하면

$2f(2)+3=0$

$$f(2)=-\frac{3}{2}$$

조건 (나)에서

$$f(0)=f(2)+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$$

$f(0)=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=a+b$$

$a+b=-\frac{3}{4}$ …… ㉣

한편, 조건 (가)에서

양변에 1을 더하면

$\{f(x)\}^2+2f(x)+1=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

$\{f(x)+1\}^2=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$

$g(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$이라 하면

$\{f(x)+1\}^2=g(x)$ …… ㉤

에서 모든 실수 x에 대하여

$g(x) \geq 0$

이고,

$f(x)=-1 \pm \sqrt{g(x)}$

이다.

$f(0)=-\dfrac{1}{2}>-1,$

$f(2)=-\dfrac{3}{2}< -1$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(c)=-1$인 상수 c가 열린 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(c)=-1 \pm \sqrt{g(c)}=-1$에서

$g(c)=0$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여

$g(x) \geq 0$이므로 함수 $g(x)$는

$x=c(0<c<2)$에서 극소이다.

한편,

$$g'(x)=3a\cos^2\pi x \times(-\pi\sin\pi x)\times e^{\sin^2\pi x} + a\cos^3\pi x \times e^{\sin^2\pi x} \times 2\sin\pi x \times \pi\cos\pi x$$

$$=a\pi\cos^2\pi x \times \sin\pi x \times e^{\sin^2\pi x} \times(-3+2\cos^2\pi x)$$

열린구간 $(0,\ 2)$에서

$\cos^2\pi x \geq 0,$

$e^{\sin^2\pi x}>0,$

$-3+2\cos^2\pi x<0$

이고,

$\sin\pi x=0$에서

$x=1$

이때, $a>0$이므로 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 극소이다.

따라서 $c=1$이므로

$g(1)=0$이다.

ⓜ의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)+1\}^2=g(1)$에서

$\{f(1)+1\}^2=0$

$f(1)=-1$

조건 (가)에서

양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2+2f(1)=-a+b$

$-a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ⓗ

ⓔ, ⓗ을 연립하면

$a=\dfrac{1}{8},\ b=-\dfrac{7}{8}$

따라서

$a\times b=\dfrac{1}{8}\times\left(-\dfrac{7}{8}\right)=-\dfrac{7}{64}$

정답 ②

29. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$에서

양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y-2x\dfrac{dy}{dx}+4y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x-2y}$(단, $x\neq 2y$)

점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}=\dfrac{k}{a+2k}$

점 $\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}=\dfrac{k}{b+2k}$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$\dfrac{k}{a+2k}\times\dfrac{k}{b+2k}=-1$

$ab+2(a+b)k+5k^2=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 A가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$

즉, $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(a+k)^2=15$ $\cdots\cdots$ ㉡

점 B가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$

즉, $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(b+k)^2=15$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$(a+k)^2=(b+k)^2$

$(a-b)(a+b+2k)=0$

$a\neq b$이므로

$a+b=-2k$ …… ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$ab-4k^2+5k^2=0$

$k^2=-ab$ …… ㉤

㉡에서

$2k^2+2ak+a^2=15$

㉣, ㉤을 위 식에 대입하면

$-2ab+a(-a-b)+a^2=15$

$ab=-5$

따라서

$k^2=-ab=-(-5)=5$

정답 5

30. **출제의도** : 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$a_n=a_1r^{n-1}$

이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1\neq 0$이다.

(i) $r>1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r=1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r=-1$인 경우

a_n의 값이 a_1, $-a_1$, a_1, $-a_1$, a_1, …이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r<-1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r=0$인 경우

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$ 이다.

그런데 $b_3=-1$ 이므로 $a_3\leq -1$ 이다.

즉 $a_1r^2\leq -1$ 이다.

그런데 $0<r^2<1$ 이므로

$a_1\leq -1$

따라서 $b_1=-1$ 이다.

또한 $a_1\leq -1$ 이므로 $0<r<1$ 이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 이다.

① $a_2=a_1r\leq -1$일 때

$r\geq -\dfrac{1}{a_1}>0$ 이므로 모순이다.

따라서 $a_2=a_1r>-1$ 이므로

$b_2=a_2=a_1r$

② $b_3=-1$ 이므로 $a_3=a_1r^2\leq -1$

③ $a_4=a_1r^3\leq -1$일 때

$a_4=a_1r^3=a_1r^2\times r\geq -r>0$

이므로 모순이다.

즉 $a_4>-1$ 이므로

$b_4=a_4=a_1r^3$

④ $a_5=a_1r^4\leq -1$일 때

$b_5=-1$

인데

$b_1+b_3+b_5=-3$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$b_5 = a_5 = a_1 r^4$

⑤ $a_6 = a_4 r^2$ 이고 $a_4 > -1$ 이므로

$a_6 > -r^2 > -1$

따라서

$b_6 = a_6 = a_1 r^5$

같은 방법으로 생각하면

$b_7 = a_7,\ b_8 = a_8,\ b_9 = a_9,\ \cdots$

이므로

$$b_n = \begin{cases} -1 & (n=1,\ n=3) \\ a_1 r^{n-1} & (n=2,\ n \geq 4) \end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$$

$$= -1 + (-1) + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 + \cdots$$

$$= -2 + \frac{a_1 r^4}{1-r^2} = -3$$

$$\frac{a_1 r^4}{1-r^2} = -1$$

$a_1 r^4 = r^2 - 1 \cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$$

$$= a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \cdots$$

$$= \frac{a_1 r}{1-r^2} = 8$$

$a_1 r = 8 - 8r^2 = 8(1-r^2) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1 r = -8 a_1 r^4$

이므로

$$r^3 = -\frac{1}{8}$$

즉 $r = -\frac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면

$$-\frac{1}{2} a_1 = 6,\ a_1 = -12$$

따라서 $a_n = -12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| -12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 24$$

정답 24

[다른풀이]

b_2, b_3, …의 값을 조사하면 다음과 같다.

(1) b_2의 값

$a_1 \leq -1$이고 $-1 < r < 0$이므로

$a_2 > 0$

(2) b_3의 값

주어진 조건으로부터

$b_3 = -1$

(3) b_4의 값

$a_3 \leq -1$이고 $-1 < r < 0$이므로

$a_4 > 0$

그러므로

$b_4 = a_4$

그러므로 $a_{2n} > 0$이므로 $b_{2n} = a_{2n}$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 8$$

이므로

$ar + ar^3 + ar^5 + \cdots = 8$

한편, 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -3 \quad ---㉡$$

이고 $b_1 = b_3 = -1$이고 $b_5 = ar^4$, $b_7 = ar^6$,

$\cdots$

라 하면 ㉡은

$$(-1)+(-1)+r^3\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = -3$$

$r^3 \times 8 = -1$

$$r = -\frac{1}{2}$$

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 22.12.5(월)

[공통: 수학 I ·수학 II]				
01. ⑤	02. ④	03. ①	04. ③	05. ⑤
06. ②	07. ④	08. ④	09. ③	10. ④
11. ①	12. ②	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. 10	17. 15	18. 22	19. 7	
20. 17	21. 33	22. 13		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} = \left(2^2 \div 2^{\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$
$$= \left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$
$$= 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2^2$$
$$= 4$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0}$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하자.

$a_2+a_4=30$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $a_4+a_6=\frac{15}{2}$

에서

$r^2(a_2+a_4)=\frac{15}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$r^2\times 30=\frac{15}{2}$

$r^2=\frac{1}{4}$

$r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

㉠에서

$a_1r+a_1r^3=30$

$a_1\times\frac{1}{2}+a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=30$

$a_1\times\frac{5}{8}=30$

따라서

$a_1=30\times\frac{8}{5}=48$

정답 ①

4. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=x^2f(x)$에서 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

이때, $f(2)=1$, $f'(2)=3$이므로

$$\begin{aligned} g'(2)&=4f(2)+4f'(2) \\ &=4\times1+4\times3 \\ &=16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. **출제의도** : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta&=1-\sin^2\theta \\ &=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$f'(1)=6-18+a=0$

$a=12$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-18x+12 \\ &=6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로

$b=2$

따라서 $a+b=12+2=14$

정답 ②

7. **출제의도** : 등차수열의 일반항과 $\sum$의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$$\begin{aligned} a_n&=a+(n-1)\times a \\ &=an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+\cdots$$

$$\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$

$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}}=2$$

이때,

$$2\sqrt{a}=3$$

$$a=\frac{9}{4}$$

따라서,

$$a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$$

정답 ④

8. 출제의도 : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=x^3-x+2$에서

$y'=3x^2-1$

이때 곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(t,\ t^3-t+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(0-t)$

정리하면 $t^3=-1$이므로

$t=-1$

따라서 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$y=2x+4$

그러므로 직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2이다.

정답 ④

9. 출제의도 : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$

이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$

$a+3=7$

$a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서

$\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로

$2b=\frac{\pi}{6}$

$b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A=B$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

따라서,

$2k=\frac{28}{3}$

$k=\frac{14}{3}$

정답 ④

11. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$
$$=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$
$$=49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$$

이때 $\angle BAC=\angle CAD$이므로

$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$
$$=70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=10$$

즉, $\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편,

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$

이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$

$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$

$5\sqrt{2} = 2R$

즉, $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

정답 ①

12. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1 \le x \le n$일 때,

$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$

또는

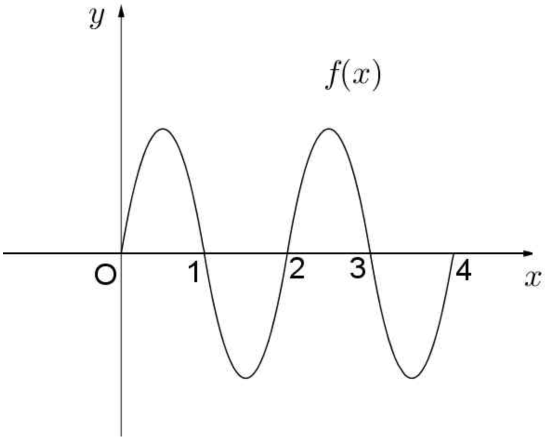
$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$

$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

$= -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2-6x)dx$

$= \left[2x^3-3x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= -\frac{1}{2}$

정답 ②

13. **출제의도** : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식

$x^n = m^{12}$ ----㉠

의 근이다.

이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=2$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 2^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(2)=5$

(ⅱ) $m=3$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 3^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(3)=5$

(ⅲ) $m=4$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 4^{12}$

즉,

$x^n = 2^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(4)=7$

(ⅳ) $m=5$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 5^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(5)=5$

(ⅴ) $m=6$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 6^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(6)=5$

(ⅵ) $m=7$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 7^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(7)=5$

(ⅶ) $m=8$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 8^{12}$

즉,

$x^n = 2^{36}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

이므로

$f(8)=8$

(viii) $m=9$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=9^{12}$

즉,

$x^n=3^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(9)=7$

따라서,

$\sum_{m=2}^{9} f(m)$

$=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=5+5+7+5+5+5+8+7$

$=5\times5+7\times2+8$

$=47$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x>1$에서 $g(x)=x$이므로

$h(1)=\lim_{t\to0+}g(1+t)\times\lim_{t\to2+}g(1+t)$

$=\lim_{t\to0+}(1+t)\times\lim_{t\to2+}(1+t)$

$=1\times3$

$=3$ (참)

ㄴ.

$h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$

이므로

$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$

$-3<x<-1$일 때

$h(x)=x\times f(x+2)$

$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$

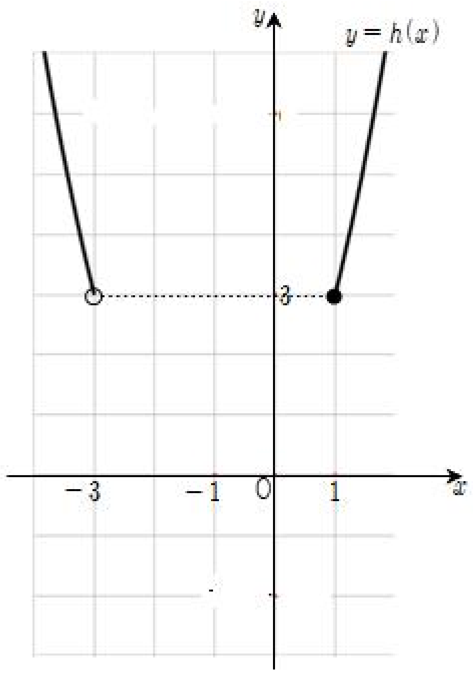
$-1<x<1$일 때

$h(x)=f(x)\times(x+2)$

$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$

$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

즉, $x<-3$ 또는 $x\geq1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

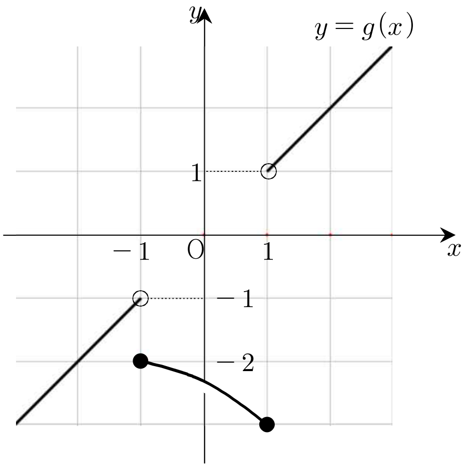


$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$

$h(-1)=f(-1)\times 1=-2\times 1=-2$

이다.

$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$

또 $-1<x<1$에서

$h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로

$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$

$f'(x)<0$, $x+2>0$, $f(x)<0$이므로

$h'(x)<0$

즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $h(1)=3$이므로

함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x)=2$라 하자.

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times 2=2x$

$x=-1$일 때, $h(x)=2\times 1=2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$

이때,

$\lim_{x\to-1-} h(x)=\lim_{x\to-1-} 2x=-2$

$\lim_{x\to-1+} h(x)=\lim_{x\to-1-} 2(x+2)=2$

$h(-1)=2$

이므로

$\lim_{x\to-1-} h(x)\neq\lim_{x\to-1+} h(x)$

이다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x)=-x-3$이라 하자.

$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$

$-3<x<-1$일 때,

$h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$

$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times 1=-2$

$-1<x<1$일 때,

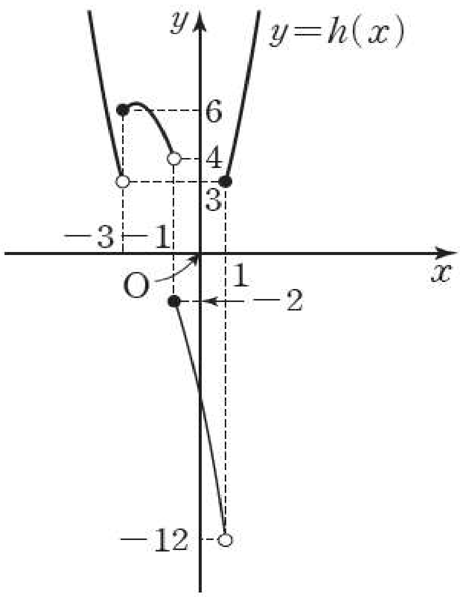
$h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$

$x=1$일 때, $h(x)=1\times 3=3$

$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

이때, $\lim_{x\to1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로

함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



15. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로

$\frac{a_6}{3}=a_7$

$a_6=3a_7=3\times40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ⅱ) $a_6=3k-2$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$$\begin{aligned}a_5&=a_7-a_6\\&=40-(3k-2)\\&=42-3k\\&=3(14-k)\end{aligned}$$

a_5는 자연수이므로

$3(14-k)>0$에서

$k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로

$a_6=\frac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서

$4k=16$

$k=4$

따라서

$a_6=3\times4-2=10$

이므로

$$\begin{aligned}a_8&=a_6+a_7\\&=10+40\\&=50\end{aligned}$$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로

$$\begin{aligned}a_9&=a_7+a_8\\&=40+50\\&=90\end{aligned}$$

(ⅲ) $a_6=3k-1$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$$\begin{aligned}a_5&=a_7-a_6\\&=40-(3k-1)\\&=41-3k\end{aligned}$$

a_5는 자연수이므로

$41-3k>0$에서

$k<\frac{41}{3}$ …… ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$$\begin{aligned}a_4&=a_6-a_5\\&=(3k-1)-(41-3k)\\&=6k-42\\&=3(2k-14)\end{aligned}$$

a_4가 자연수이므로

$3(2k-14)>0$에서

$k>7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로

$a_5=\frac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서

$a_6=3\times11-1=32$

이므로

$a_8 = a_6 + a_7$
$\quad = 32 + 40$
$\quad = 72$

$a_8 = 72$가 3의 배수이므로

$a_9 = \dfrac{a_8}{3} = \dfrac{72}{3} = 24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값은

$M = 200$이고 최솟값은 $m = 24$이다.

따라서

$M + m = 200 + 24 = 224$

정답 ⑤

16. **출제의도** : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$

에서

$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$

$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$

이므로

$3x + 2 = 4(x-2)$

$3x + 2 = 4x - 8$

$x = 10$

정답 10

17. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

$\quad = \int (4x^3 - 2x)\,dx$

$\quad = x^4 - x^2 + C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0) = 3$이므로 $C = 3$

따라서

$f(x) = x^4 - x^2 + 3$이므로

$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$

정답 15

18. **출제의도** : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k + 5) = 55$에서

$3\sum_{k=1}^{5} a_k + 25 = 55$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = 32$에서

$\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = 32$

따라서

$\sum_{k=1}^{5} b_k = -\sum_{k=1}^{5} a_k + 32$

$\quad = -10 + 32$

$\quad = 22$

정답 22

19. **출제의도** : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$2x^3-6x^2+k=0$ ----㉠

에서

$f(x)=2x^3-6x^2+k$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

한편,

$$f'(x)=6x^2-12x$$
$$=6x(x-2)$$

이므로

$f'(x)=0$

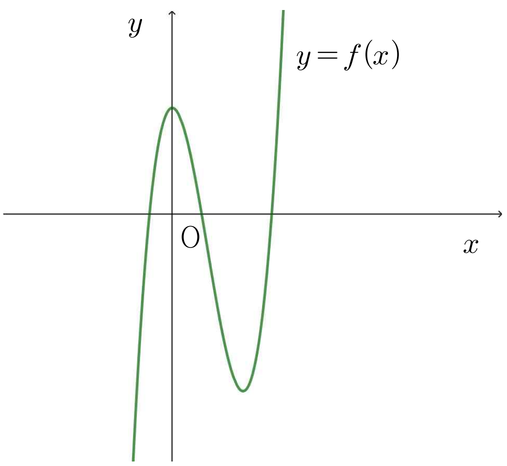
에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$k>0$이고 $k-8<0$

이므로

$0<k<8$

따라서, 정수 k는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. **출제의도** : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$일 때

$v(t)=3t^2+4t+C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2)=0$이므로

$12+8+C=0$에서 $C=-20$

즉, $0 \leq t \leq 3$에서

$$v(t)=\begin{cases} 2t^3-8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2+4t-20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^3 |v(t)|\,dt$$
$$=-\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$
$$=-\int_0^2 (2t^3-8t)\,dt+\int_2^3 (3t^2+4t-20)\,dt$$
$$=-\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$
$$=-(-8)+9$$
$$=17$$

정답 17

21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

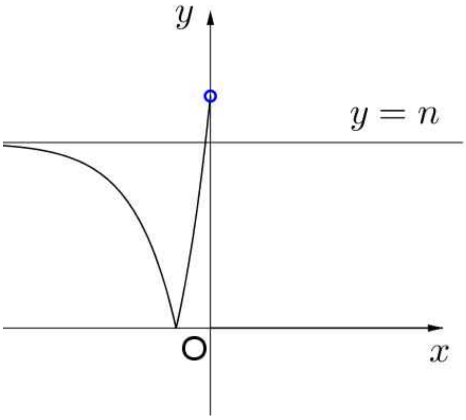
정답풀이 :

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2 만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

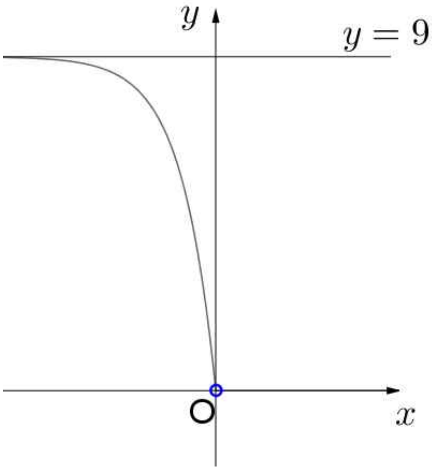
함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

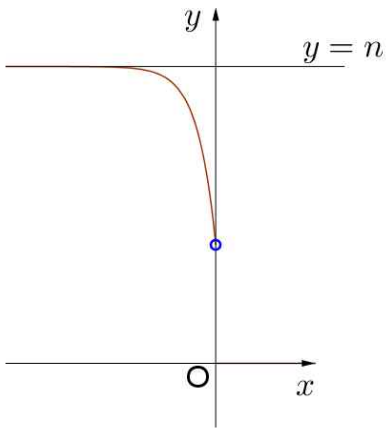
$1 \le n<9$일 때,



$n=9$일 때,



$n>9$일 때,

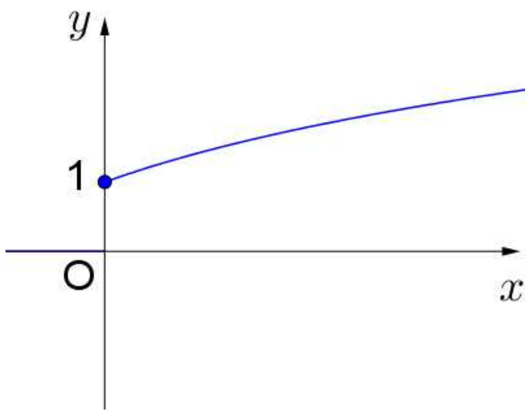


또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

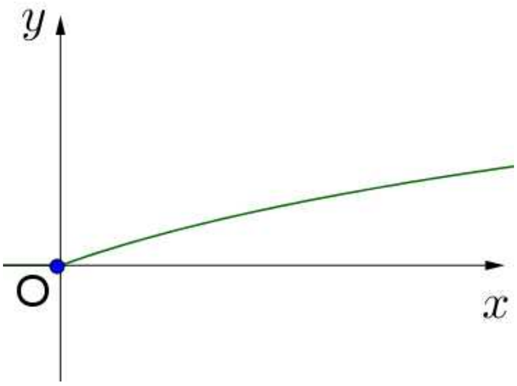
함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x \ge 0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

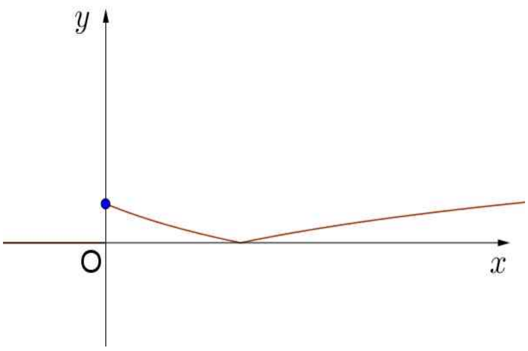
$n=1$일 때,



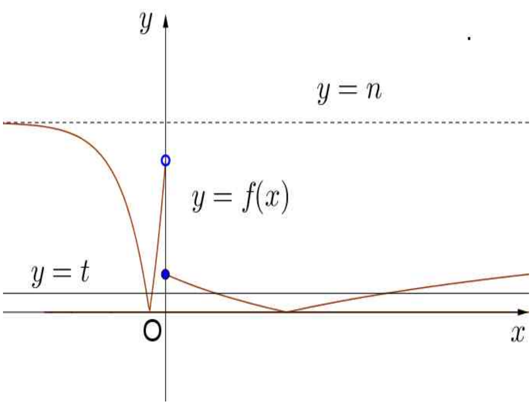
$n=2$일 때,



$n>2$일 때,



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로

$9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.

즉, $2<n<9$이다.

따라서 자연수 n의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$$

이라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로 $x\neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \text{----㉠}$$

이때, 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고

조건(나)에서 $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 두 점

$(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

는 점 $(1, f(1))$을 지난다.

즉,

$$1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$$

$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$

이 식을 정리하면

$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$

$a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$

$f'(x)=3x^2-12x+b$

한편, ㉠에서

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$\lim_{x\to1}f'(g(x))$

$=\lim_{x\to1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$

$=3k^2-12k+b$ -----㉡

또, 우변은

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=3-12+b$

$=b-9$ -----㉢

㉡과 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=b-9$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

$27-54+3b-3=6$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

정답 13

[다른 풀이 1]

조건(가)와 조건(나)에 의해 두 점

$(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-\left\{f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}$

$=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ----㉠

이다.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(1)=f'(g(1))$

이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$=3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ -----㉡

이고 $g(1)=k\left(k\geq\frac{5}{2}\right)$라 하면

$f'(1)=f'(k)$

이므로 ㉡에서

$f'(1)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이고

$f'(k)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)$

에서

$3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이므로

$k=3$

따라서

$f'(1)=f'(3)=\alpha$라 하면

$f'(x)=3(x-1)(x-3)+\alpha$

$=3x^2-12x+9+\alpha$

양변을 x에 대하여 부정적분하면

$f(x)=x^3-6x^2+(9+\alpha)x+C$

(단, C는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(0)=-3$, $f(3)=6$이므로

$C=-3$, $\alpha=3$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

따라서

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

[다른 풀이 2]

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

한편, 조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로

$f(x)-f(1)$
$=(x^3+ax^2+bx-3)-(1+a+b-3)$
$=x^3-1+a(x^2-1)+b(x-1)$
$=(x-1)\{x^2+x+1+a(x+1)+b\}$
$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$

즉,

$f'(g(x))=x^2+(a+1)x+a+b+1$ ----㉠

그리고

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$g(x)=y$라 하면

$3y^2+2ay+b=x^2+(a+1)x+a+b+1$

따라서 y에 대하여 정리하면

$3y^2+2ay-\{x^2+(a+1)x+a+1\}=0$

이고 y에 대하여 풀면

$y=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+3\{x^2+(a+1)x+a+1\}}}{3}$

이고 근호 안을 정리하면

$a^2+3\{x^2+(a+1)x+a+1\}$
$=3\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{3}a^2+a+1\right\}$
$=3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}$

따라서

$g(x)=\dfrac{-a\pm\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

즉,

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\pm k\sqrt{x^2+l}$ (k, l은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수 $g(x)$가 최솟값을 가지므로

$g(x)=\dfrac{-a+\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

이고, $g(x)$는 $x=-\frac{a+1}{2}$에서 최솟값

$\dfrac{-a+\sqrt{\dfrac{(a+3)^2}{4}}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}$ 을 가진다.

따라서

(i) $a\ \geq -3$인 경우

$$\frac{-a+\frac{|a+3|}{2}}{3}=\frac{-a+\frac{a+3}{2}}{3}=\frac{-a+3}{6}=\frac{5}{2}$$

에서 $a=-12$인데 $a\ \geq -3$을 만족하지 않는다.

(ii) $a<-3$인 경우

$$\frac{-a+\frac{|a+3|}{2}}{3}=\frac{-a-\frac{a+3}{2}}{3}=\frac{-3a-3}{6}=\frac{5}{2}$$

에서 $a=-6$

(i).(ii)에 의해 $a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$ ----ⓛ

$f'(x)=3x^2-12x+b$ ----ⓒ

한편, ㉠에서 $f'(x)$와 $g(x)$가 연속이므로

$$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$f'(g(1))=f'(1)$

이때, $g(1)=k$라 하면 ⓒ으로부터

$3k^2-12k+b=-9+b$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

이것을 ⓛ에 대입하면

$27-54+3b=9$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

■ [선택: 미적분]
23. ④ 24. ③ 25. ⑤ 26. ④ 27. ②
28. ② 29. 26 30. 31

23. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\ln(x+1)\times\frac{1}{\sqrt{x+4}-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$
$$=1\times(2+2)$$
$$=4$$

정답 ④

24. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$$
$$=\int_0^1\sqrt{1+3x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{9}(8-1)$$
$$=\frac{14}{9}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 등비수열이 포함된 식의 극한값을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$이다.

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times\frac{r^{n-1}}{4^n}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$$

이고 극한값이 3으로 존재하므로

$r=4$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{a}{4}+0}{0+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{a}{2}=3$$

에서 $a=6$ 이므로

$a_2=6\times4=24$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le t \le \frac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{\sec^2 t+\tan t})^2=\sec^2 t+\tan t$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t+\tan t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sec^2 x-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=[\tan x-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\tan\frac{\pi}{3}-\ln\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln 2$$

정답 ④

27. **출제의도** : 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OC_1}=3t$, $\overline{OD_1}=4t$ $(t>0)$라 하면

$\overline{OP_1}=5t$ 이므로

$5t=1$ 에서 $t=\frac{1}{5}$

따라서, $\overline{OC_1}=\frac{3}{5}$에서 $\overline{A_1C_1}=\frac{2}{5}$이고

$\overline{C_1P_1}=\overline{OD_1}=\frac{4}{5}$

이므로

$$\overline{A_1P_1}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_1Q_1}=\overline{P_1Q_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

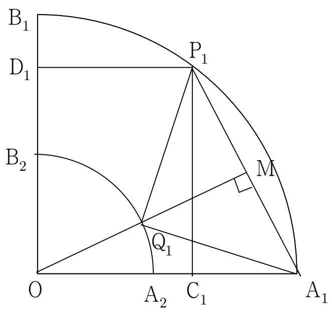
따라서

$$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$$

또한, 선분 A_1P_1의 중점을 M이라 하면

$\overline{A_1P_1}\perp\overline{Q_1M}$, $\overline{A_1P_1}\perp\overline{OM}$

이므로 세 점 O, Q_1, M은 한 직선 위에 있다.



이때,

$$\overline{OM}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{Q_1M}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{OQ_1}=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

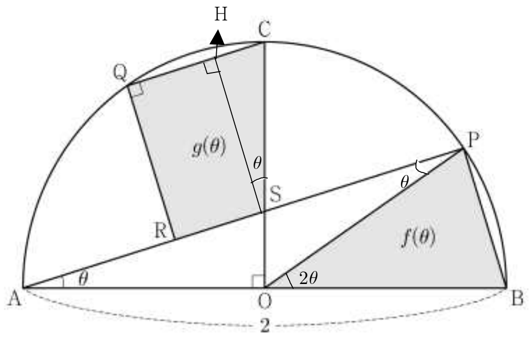
따라서 두 도형(부채꼴) OA_1B_1, OA_2B_2의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{5}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

정답 ②

28. **출제의도** : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{OPA} = \theta$이므로

$\angle \mathrm{BOP} = 2\theta$

따라서

$f(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

또한, $\overline{\mathrm{OA}} = 1$ 에서 $\overline{\mathrm{OS}} = \tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CS}} = 1 - \tan\theta$

이때, $\angle \mathrm{BOP} = \angle \mathrm{COQ} = 2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{SCQ} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

또한, $\angle \mathrm{CSR} = \theta + \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\angle \mathrm{QRS} = \dfrac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle \mathrm{CSH} = \theta$

이므로

$\overline{\mathrm{SH}} = \overline{\mathrm{RQ}} = (1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CH}} = (1-\tan\theta)\sin\theta$

이고

$\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{BP}} = 2\sin\theta$

$\overline{\mathrm{RS}} = \overline{\mathrm{QH}} = \overline{\mathrm{CQ}} - \overline{\mathrm{CH}}$

$= 2\sin\theta - (\sin\theta - \sin\theta\tan\theta)$

$= \sin\theta + \sin\theta\tan\theta$

따라서

$g(\theta)$

$= \dfrac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{CQ}} + \overline{\mathrm{RS}}) \times \overline{\mathrm{QR}}$

$= \dfrac{1}{2} \times (2\sin\theta + \sin\theta + \sin\theta\tan\theta)$

$\times (1-\tan\theta)\cos\theta$

$= \dfrac{1}{2} \times (3\sin\theta + \sin\theta\tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

이므로

$3f(\theta) - 2g(\theta)$

$= \dfrac{3}{2}\sin 2\theta - (3\sin\theta + \sin\theta\tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

$= 3\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)$

$= \sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta + 2)$

따라서

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$

$= \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2}$

$= \lim\limits_{\theta \to 0+} \left\{ \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \dfrac{\tan\theta}{\theta} \times \cos\theta \times (\tan\theta + 2) \right\}$

$= 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2$

정답 ②

29. **출제의도** : 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)+6}{e^x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ae^{2x} + be^x + c + 6}{e^x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(ae^x + b + \dfrac{c+6}{e^x} \right) = 1$

따라서, $b=1$, $c=-6$이므로

$f(x)=ae^{2x}+e^{x}-6$

조건 (나)에서

$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$

$a=1$

즉, $f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$

이때 $f(k)=14$라 하면

$f(k)=e^{2k}+e^{k}-6=14$

에서

$e^{2k}+e^{k}-20=(e^{k}+5)(e^{k}-4)=0$

이므로

$e^{k}=4$

즉, $k=\ln 4$

따라서 $f(\ln 2)=0, f(\ln 4)=14$이므로

$g(0)=\ln 2$, $g(14)=\ln 4$

따라서, $\int_{0}^{14} g(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이고

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(t)}$

이므로

$$\int_{0}^{14} g(x)dx$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$

$$=[tf(t)]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$

$$=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+e^{t}-6)dt$$

$$=14\ln 4-\left[\frac{1}{2}e^{2t}+e^{t}-6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=28\ln 2-(8-6\ln 2)$$

$$=34\ln 2-8$$

따라서 $p=-8$, $q=34$ 이므로

$p+q=26$

정답 26

30. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ ($a>0$, b,c,d는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^{2}+2bx+c$

이므로

$f(3)=27a+9b+3c+d=\frac{1}{2}\cdots$ ㉠

$f'(3)=27a+6b+c=0\cdots$ ㉡

조건 (가)에서

$h(0)=g(f(0))=g(d)=e^{\sin\pi d}-1=0$

$e^{\sin\pi d}=1$, $\sin\pi d=0$

이므로 d는 정수이다.

또한,

$g'(x)=e^{\sin\pi x}\times\pi cos\pi x$

$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

이므로

$$\begin{aligned}h'(0)&=g'(f(0))\times f'(0)\\&=g'(d)\times c\\&=e^{\sin\pi d}\times\pi cos\pi d\times c\\&=\pi cos\pi d\times c=0\end{aligned}$$

그런데, $\cos\pi d\neq 0$ 이므로 $c=0$

따라서, ㉠, ㉡에서

$27a+9b+d=\frac{1}{2}\cdots$ ㉢, $9a+2b=0\cdots$ ㉣

이고 $a>0$이므로 $b<0$ 이고

㉢$-3\times$㉣에서

$3b+d=\frac{1}{2}$

따라서 $d>0$이므로 d는 자연수이다.

또한, $f'(0)=c=0$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이 $f(0)=d$, $x=3$에서 극솟값이 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 두 함수 $f(x)$와 $h(x)$가 $x=0$에서 모두 극댓값을 가지므로 두 함수의 도함수의 부호는 $x=0$의 좌우에서 같다.
그러므로 $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$에서 $x=0$의 좌우에서 $g'(f(x))>0$ 이다.
즉 $\cos\pi d>0$ 이어야 한다.
따라서 d는 짝수이다

그리고
$0<x<3$ 에서 $f(3)<f(x)<f(0)$
이므로
$\frac{1}{2}<f(x)<d$
$\frac{\pi}{2}<\pi f(x)<\pi d$
그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간 $(0,3)$에서 방정식
$h(x)=g(f(x))=e^{\sin\pi f(x)}-1=1$
즉,
$e^{\sin\pi f(x)}=2$, $\sin\pi f(x)=\ln 2\,(0<\ln 2<1)$
의 서로 다른 실근의 개수가 7이기 위해서는 함수 $y=\sin\pi t$의 주기는 2이므로
$d=8$
㉢, ㉣에서
$a=\frac{5}{9}$, $b=-\frac{5}{2}$
이므로
$f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$
따라서
$f(2)=\frac{40}{9}-10+8=\frac{22}{9}$
즉, $p=9$, $q=22$ 이므로
$p+q=31$

정답 31

2023학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.9.2(금)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.④	02.①	03.②	04.①	05.③
06.⑤	07.⑤	08.①	09.③	10.④
11.②	12.②	13.⑤	14.⑤	15.③
16. 7	17. 16	18. 13	19. 4	
20. 80	21. 220	22. 58		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}=\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$$

$$=2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=2^{3-1}=2^2=4$$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2+5$에서

$f'(x)=4x$

이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$$=4\times 2=8$$

정답 ①

3. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 탄젠트 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

이므로

$$\sin\theta=\frac{5}{13}$$

이때

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$=1-\frac{25}{169}$$

$$=\frac{144}{169}$$

$$=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\frac{12}{13}$$

따라서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$$

$$=-\frac{5}{12}$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수가 연속이 되도록 하는 모든 상수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉,

$$f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$$

가 성립해야 한다.

$f(a)=-2a+a=-a,$

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)$$
$$=-2a+a=-a,$$

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(ax-6)=a^2-6$$

이므로 $f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$-a=a^2-6,$

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$(-3)+2=-1$

정답 ①

5. **출제의도** : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=2a_5=2(a_1+4d)$

$a_1+8d=0\cdots㉠$

$a_8+a_{12}=(a_1+7d)+(a_1+11d)$

$=2a_1+18d=-6$

$a_1+9d=-3\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $a_1=24$, $d=-3$ 이므로

$a_2=a_1+d=21$

정답 ③

6. **출제의도** : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로

$f(0)=k=9$

따라서

$f(x)=x^3-3x^2+9$

이고 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)$이므로 구하는 극솟값은

$f(2)=2^3-3\times2^2+9=5$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

한편,

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = S_{10} = \frac{1}{10\times 11} = \frac{1}{110}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{10}{11} - \frac{1}{110} = \frac{99}{110} = \frac{9}{10}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

$k=1$**이면** $S_k - a_k = S_1 - a_1 = 0$

$k \geq 2$**이면** $S_k - a_k = S_{k-1} = \frac{1}{(k-1)k}$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = (S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10}(S_k - a_k)$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= \sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

8. **출제의도** : 두 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = x^3 - 4x + 5$에서

$y' = 3x^2 - 4$

이므로 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y - 2 = -(x-1)$

$y = -x + 3 \cdots$ ㉠

또한, $y = x^4 + 3x + a$ 에서

$y' = 4x^3 + 3$

이고 곡선 $y = x^4 + 3x + a$와 직선 ㉠이 접하므로 접점의 x좌표는

$4x^3 + 3 = -1$, $x^3 = -1$

$x = -1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이고 이 점은 곡선 $y = x^4 + 3x + a$ 위의 점이므로

$4 = 1 - 3 + a$

$a = 6$

정답 ①

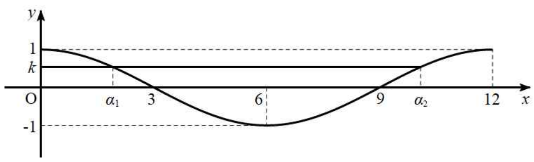
9. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그림과 같이 일반성을 잃지 않고

$\alpha_1 < \alpha_2$

라 하면

$\alpha_1 + \alpha_2 = 12$

주어진 조건에 의하여

$\alpha_2 - \alpha_1 = 8$

이므로

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$

그러므로

$k=\cos\left(\frac{\pi\times 2}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

한편,

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$

에서

$\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$0\le x\le 12$에서 $0\le\frac{\pi x}{6}\le 2\pi$이므로

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{\pi x}{6}=\frac{4}{3}\pi$

즉, $x=4$ 또는 $x=8$

따라서

$|\beta_1-\beta_2|=|4-8|=4$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2+at)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=8+2a$$

점 $\mathrm{P}(8+2a)$와 점 $\mathrm{A}(6)$ 사이의 거리가 10이려면 $|(8+2a)-6|=10$, 즉

$2a+2=\pm 10$

이어야 하므로 양수 a의 값은

$2a+2=10$에서

$a=4$

정답 ④

11. **출제의도** : 실수인 거듭제곱근을 이해하고 조건을 만족시키는 $f(n)$의 값을 지수법칙을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$, $-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$

이므로

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\times\left(-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\right)$

$=-\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}\times\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)}\times 3^{\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)+\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{4}f(n)}=-9$

따라서,

$3^{\frac{1}{4}f(n)}=3^2$

이므로

$\frac{1}{4}f(n)=2$, $f(n)=8\cdots$㉠

이때, 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이기 위해서는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,8)$을 지나야 한다.

$f(1)=-1+k=8$

$k=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 주어진 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 함수의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표를 각각

A(a, a^2), B(b, b^2)

이라 하면 x에 대한 이차방정식

$x^2-x-t=0$

의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}}&=a-b\\&=\sqrt{(a-b)^2}\\&=\sqrt{(a+b)^2-4ab}\\&=\sqrt{1+4t}\end{aligned}$$

또, 점 C의 좌표가 C$(-a, a^2)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CH}}&=b-(-a)\\&=b+a=1\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

정답 ②

13. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 CDE에서 $\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}}^2&=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{ED}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{ED}}\times\cos\frac{\pi}{4}\\&=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=10\end{aligned}$$

이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{CDE}=\theta$라 하면 삼각형 CDE에서

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{\mathrm{ED}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}{2\times\overline{\mathrm{ED}}\times\overline{\mathrm{CD}}}\\&=\frac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-4^2}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=x$, $\overline{\mathrm{AE}}=y$라 하면 삼각형 ACE에서

코사인법칙에 의하여

$x^2=y^2+4^2-2\times y\times4\times\cos\frac{3}{4}\pi$,

$x^2=y^2+16-2\times y\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$x^2=y^2+4\sqrt{2}y+16$ ⋯ ㉠

한편, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin\theta}=2R$, 즉 $\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=2R$

에서

$$2R=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이등변삼각형 AOC에서

$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{CAO}=\alpha$

이므로 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{x}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$, 즉 $\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{y}{\frac{\sqrt{5}}{5}}$에서

$\sqrt{2}x=\sqrt{5}y$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{5}{2}y^2=y^2+4\sqrt{2}y+16,$

$\frac{3}{2}y^2-4\sqrt{2}y-16=0,$

$3y^2-8\sqrt{2}y-32=0$

$(3y+4\sqrt{2})(y-4\sqrt{2})=0$에서

$y=4\sqrt{2}$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times4\sqrt{2}=4\sqrt{5}$$

따라서

$\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

정답 ⑤

[다른 풀이]

삼각형 CED에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=16+18-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=34-24=10$$

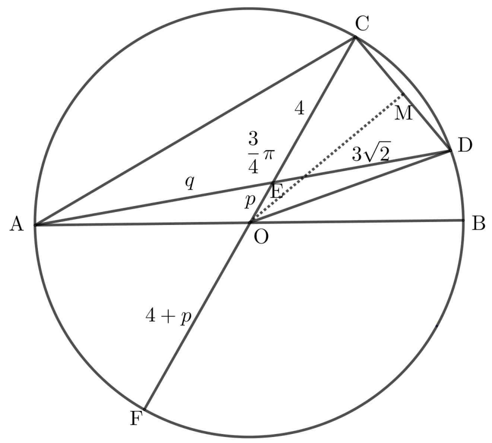
이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$$

직선 OC가 원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 F라 하고, $\overline{\mathrm{OE}}=p$, $\overline{\mathrm{AE}}=q$라 하면

$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OC}}$

$=p+(p+4)=2(p+2)$



따라서 원의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{DE}}$

이므로

$4\times2(p+2)=q\times3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

한편,

$\angle\mathrm{CAD}$는 호 CD의 원주각이고, $\angle\mathrm{COD}$는 호 CD의 중심각이므로 $\angle\mathrm{CAD}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{COD}=2\times\angle\mathrm{CAD}=2\theta$

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{DO}}$이므로 선분 CD의 중점을 M이

라 하면

$$\angle \mathrm{COM} = \frac{1}{2} \times \angle \mathrm{COD} = \frac{1}{2} \times 2\theta = \theta$$

직각삼각형 OMC에서

$$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{p+4} = \frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}$$

따라서 삼각형 AEC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}, \text{ 즉}$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{8(p+4)}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4(p+4)}{\sqrt{5}} \quad \cdots \text{ ㉡}$$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{CE}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AE}} \times \overline{\mathrm{CE}} \times \cos\frac{3}{4}\pi$$

$$= q^2 + 16 - 2 \times q \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= q^2 + 4\sqrt{2}q + 16 \quad \cdots \text{ ㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$\left\{\frac{4(p+4)}{\sqrt{5}}\right\}^2 = q^2 + 4\sqrt{2}q + 16$$

이때 ㉠에서

$$4(p+2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}q$$

이므로

$$\left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}q + 8}{\sqrt{5}}\right)^2 = q^2 + 4\sqrt{2}q + 16,$$

$$\frac{9}{2}q^2 + 24\sqrt{2}q + 64 = 5(q^2 + 4\sqrt{2}q + 16),$$

$$9q^2 + 48\sqrt{2}q + 128 = 10q^2 + 40\sqrt{2}q + 160,$$

$$q^2 - 8\sqrt{2}q + 32 = 0,$$

$$(q - 4\sqrt{2})^2 = 0$$

$$q = 4\sqrt{2}$$

그러므로 ㉢에서

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 32 + 32 + 16 = 80$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{CD}} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x) = x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)$\cdots$㉠

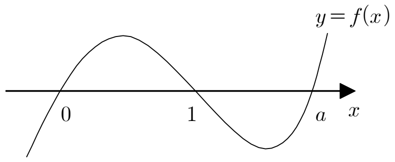
라 하자.

ㄱ. $g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx = 0$

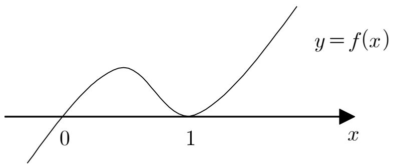
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx$$

따라서 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $a > 1$일 때



(ii) $a = 1$일 때



(i), (ii)에 의하여

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx < 0$$

이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx < 0$$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1) > 0$이면 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$
$$= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x(x-1)(x-a)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} \{-(a+1)x^2\}dx$$
$$= 2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= -\frac{2(a+1)}{3} > 0$$

즉, $a<-1$ 이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1) = -\frac{2(a+1)}{3} > 1$ 에서

$$a < -\frac{5}{2}$$

$0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(0) = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$
$$= \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}a - \frac{1}{6} < -1 \quad \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항과 조건을 만족시키는 항의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$

조건 (나)에 의하여

$a_4 = r$이고 $0 < |r| < 1$에서 $|a_4| < 5$이므로

$$a_5 = r+3$$

$|a_5| < 5$이므로

$$a_6 = a_5 + 3 = r+6$$

$|a_6| \ge 5$이므로

$$a_7 = -\frac{1}{2}a_6 = -\frac{r}{2} - 3$$

$|a_7| < 5$이므로

$$a_8 = a_7 + 3 = -\frac{r}{2}$$

그러므로

$$r^2 = -\frac{r}{2}$$

$r \neq 0$이므로 $r=-\frac{1}{2}$

즉, $a_4=-\frac{1}{2}$

이때 $|a_3|<5$이면 $a_3=-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$이고 이것은 조건을 만족시키며, $|a_3| \geq 5$이면 $a_3=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$인데 이것은 조건을 만족시키지 않으므로

$a_3=-\frac{7}{2}$

또, $|a_2|<5$이면 $a_2=-\frac{7}{2}-3=-\frac{13}{2}$인데 이것은 조건을 만족시키지 않고, $|a_2| \geq 5$이면 $a_2=-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=7$이고 이것은 조건을 만족시키므로

$a_2=7$

또, $|a_1|<5$이면 $a_1=7-3=4$이고, $|a_1| \geq 5$이면 $a_1=-2\times 7=-14$인데 조건 (나)에 의하여 $a_1<0$이므로

$a_1=-14$

따라서

$a_1=-14$, $a_2=7$, $a_3=-\frac{7}{2}$, $a_4=-\frac{1}{2}$,

$a_5=-\frac{1}{2}+3$, $a_6=-\frac{1}{2}+6$, $a_7=\frac{1}{4}-3$, $a_8=\frac{1}{4}$,

$a_9=\frac{1}{4}+3$, $a_{10}=\frac{1}{4}+6$, $a_{11}=-\frac{1}{8}-3$, $a_{12}=-\frac{1}{8}$,

$\cdots$

이와 같은 과정을 계속하면

$|a_1| \geq 5$이고, 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}| \geq 5$임을 알 수 있다.

그러므로 $|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m은

1, 2, 6, 10, $\cdots$, 98

이고, $2=4\times 1-2$, $98=4\times 25-2$이므로

$p=1+25=26$

따라서

$p+a_1=26+(-14)=12$

정답 ③

16. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서

$x-4>0$이고 $x+2>0$이어야 하므로

$x>4$ $\cdots$ ㉠

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(x-4)^2=\log_9(x-4)^2$

이므로 주어진 방정식은

$\log_9(x-4)^2=\log_9(x+2)$,

$(x-4)^2=x+2$,

$x^2-8x+16=x+2$,

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

따라서 $x=2$ 또는 $x=7$

㉠에서 구하는 실수 x의 값은 7이다.

정답 7

17. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int(6x^2-4x+3)dx$

$=2x^3-2x^2+3x+C$

(단, C는 적분상수)

이므로

$f(1)=2-2+3+C=3+C=5$

에서

$C=2$

따라서

$f(2)=16-8+6+2=16$

정답 16

18. 출제의도 : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = c\sum_{k=1}^{5} a_k$$
$$= c \times 10 = 10c$$

이고

$$\sum_{k=1}^{5} c = 5c$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

에서

$10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

따라서

$c = 13$

정답 13

19. 출제의도 : 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$이라 하면

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$
$$= 12x(x^2 - x - 2)$$
$$= 12x(x+1)(x-2)$$

이므로 $f'(x) = 0$에서

$x = 0$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 사차함수 $f(x)$는

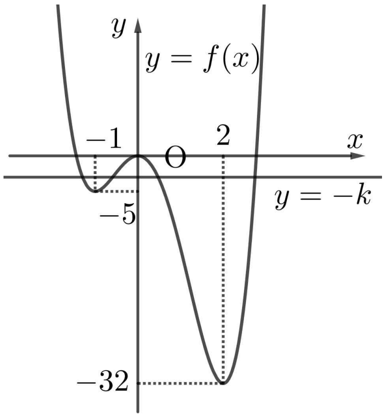
$x = 0$에서 극댓값 $f(0) = 0$을 갖고,

$x = -1$, $x = 2$에서 각각 극솟값

$f(-1) = 3 + 4 - 12 = -5$,

$f(2) = 48 - 32 - 48 = -32$

를 갖는다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -k$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은 위의 그래프에서

$-5 < -k < 0$, 즉 $0 < k < 5$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 4이다.

정답 4

20. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+x^2-x$ 에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$=(3x-1)(x+1)$

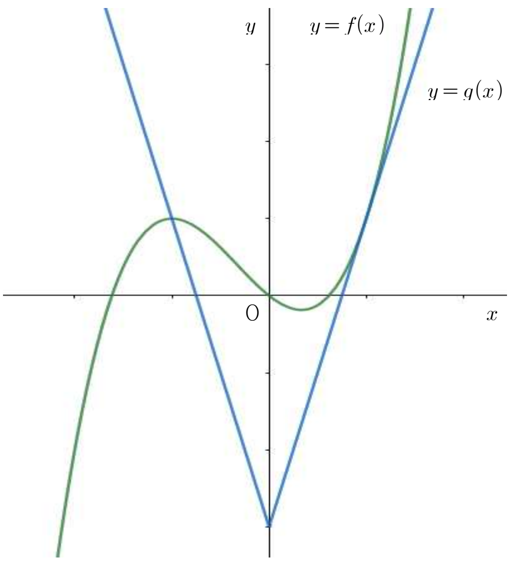
이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값이 $f(-1)=1$, $x=\frac{1}{3}$에서 극솟값이 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}$ 이므로 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는 그림과 같이 $x>0$인 부분에서 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 접해야 한다.



$x>0$일 때 $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$

에서

$3x^2+2x-5=0$, $(3x+5)(x-1)=0$

즉, $x=1$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,1)$이고

$g(1)=4+k=1$

따라서, $k=-3$

또한, $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-x=-4x-3$, $x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0$

$x=-1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

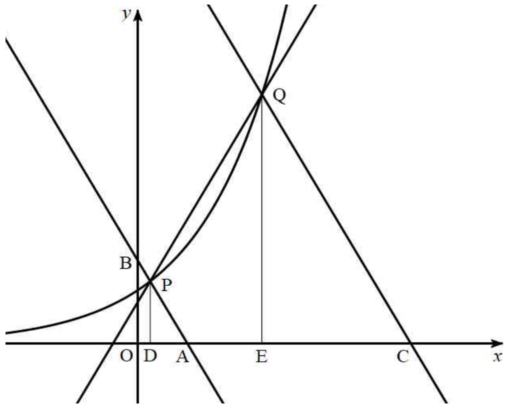
$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$

정답 80

21. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{\mathrm{PB}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{PB}}$

$=4\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PB}}$

$=3\overline{\mathrm{PB}}=3k$

이고,

$\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$

$=3\times4\overline{\mathrm{PB}}$

$=12\overline{\mathrm{PB}}=12k$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle\mathrm{PDA}\backsim\triangle\mathrm{QEC}$이므로

$\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{QE}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로

$2^b=4\times2^a=2^{a+2}$

에서

$b=a+2$

즉,

$$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$

$$=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}$$

$$=\frac{3\times2^a}{2}$$

$$=3\times2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$ ……㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

$$x-a=\frac{2}{3}$$

$$x=a+\frac{2}{3}$$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\frac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle\mathrm{APD}\backsim\triangle\mathrm{ABO}$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{PB}}=4:1$

즉, $a+\frac{2}{3}:a=4:1$

$$a+\frac{2}{3}=4a$$

$$a=\frac{2}{9}$$

$$b=a+2=\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$$

따라서

$$90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)$$

$$=90\times\frac{22}{9}$$

$$=220$$

정답 220

22. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$$

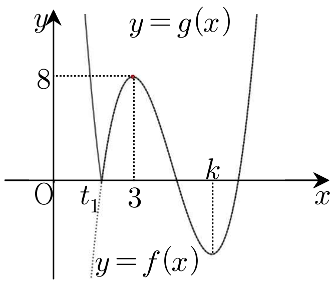
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

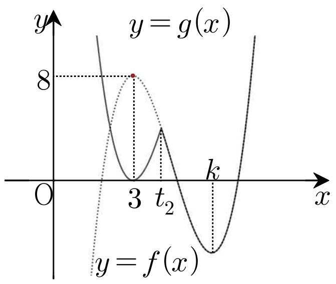
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

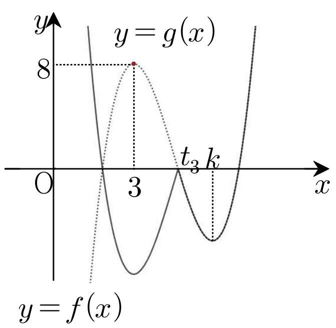
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.

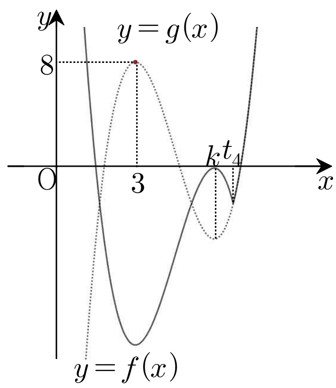
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

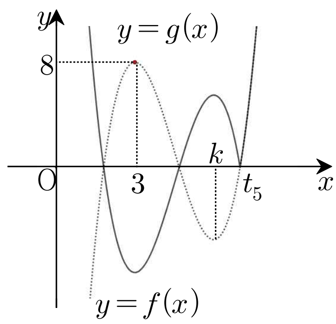
우선, $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.







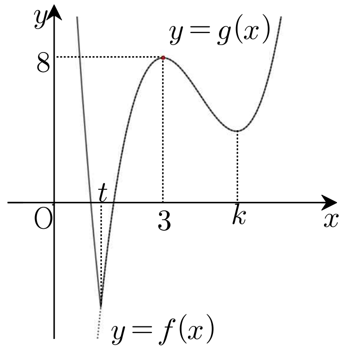




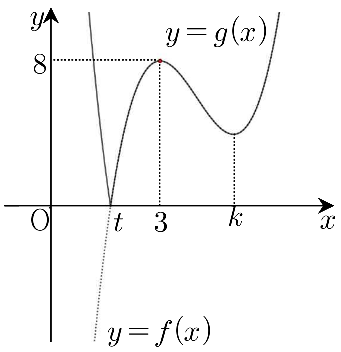
따라서 함수 $h(t)$는

$t=t_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.

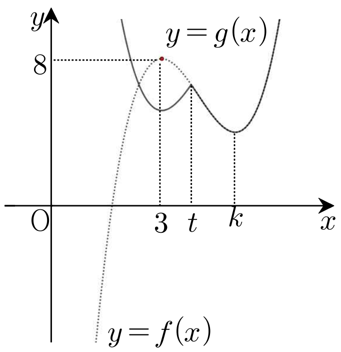
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



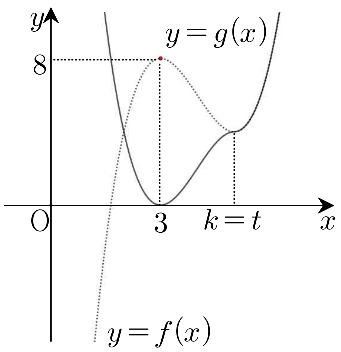
[교점 2개]



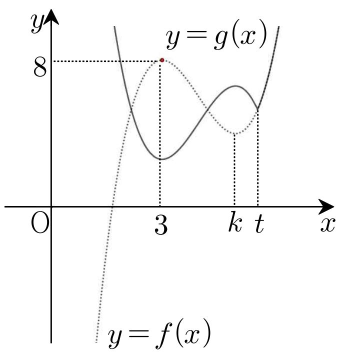
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$, 즉 $-8+2f(k)=0$

에서

$f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$$\begin{aligned} f'(x)&=3(x-3)(x-k) \\ &=3x^2-3(3+k)x+9k \end{aligned}$$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\dfrac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$,

$C=\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\dfrac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k=4$,

$-\dfrac{k^3}{2}+\dfrac{9}{2}k^2-\dfrac{27}{2}k+\dfrac{35}{2}=0$,

$k^3-9k^2+27k-35=0$,

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

정답 58

■ [선택: 미적분]

23. ① 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ③
28. ④ 29. 3 30. 283

23. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)-(2^x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$$

$$=\ln4-\ln2$$

$$=\ln\frac{4}{2}=\ln2$$

정답 ①

24. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\int_0^\pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$=\int_0^\pi x\sin x dx$$

$$=[-x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx$$

$$=(\pi-0)+[\sin x]_0^\pi$$

$$=\pi$$

정답 ②

25. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$에서

$\frac{a_n+2}{2}=b_n$

이라 하면

$a_n=2b_n-2$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{\frac{2b_n}{n}-\frac{2}{n}+2}$$

$$=\frac{2\times6-2+0}{0-0+2}$$

$$=5$$

정답 ⑤

26. **출제의도** :
입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$

이므로 정사각형의 넓이는

$$\left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)^2=\frac{kx}{2x^2+1}$$

그러므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx \quad ---㉠$$

이때, $2x^2+1=t$로 놓으면

$$4x=\frac{dt}{dx}$$

또, $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=9$이므로 ㉠은

$$\int_3^9 \frac{k}{4}\times\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\int_3^9 \frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\times[\ln t]_3^9$$

$$=\frac{k}{4}\times(\ln 9-\ln 3)$$

$$=\frac{k}{4}\ln 3$$

이 값이 $2\ln 3$이므로

$$\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$$

$$k=8$$

정답 ③

27. 출제의도 : 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $A_1B_1D_1$에서

$$\overline{B_1D_1}=\sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1D_1}^2}$$

$$=\sqrt{4^2+1^2}$$

$$=\sqrt{17}$$

이므로

$$\overline{D_1E_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

그러므로

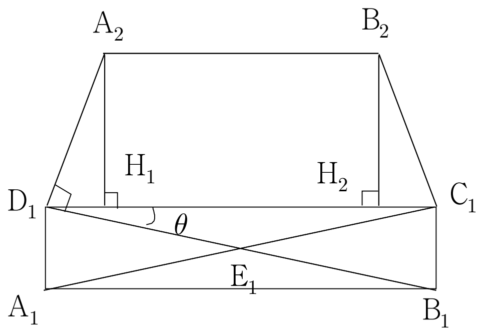
$$S_1=2\times(\triangle A_2D_1E_1)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$=\frac{17}{4}$$

한편, 직각삼각형 $D_1B_1C_1$에서 $\angle C_1D_1B_1=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{D_1B_1}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$$



또, A_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1라 하면

$$\angle A_2D_1H_1=\frac{\pi}{2}-\theta$$

이므로

$$\overline{D_1H_1}=\overline{A_2D_1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\overline{A_2D_1}\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$$

또, 점 B_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\overline{A_2B_2}=\overline{H_1H_2}$$
$$=4-2\times\overline{D_1H_1}$$
$$=4-2\times\frac{1}{2}=3$$

이때, $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_2B_2}=3$에서 길이의 비가 $\frac{3}{4}$이므로 넓이의 비는 $\frac{9}{16}$이다.

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}$$
$$=\frac{17\times4}{16-9}=\frac{68}{7}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 도형의 넓이에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

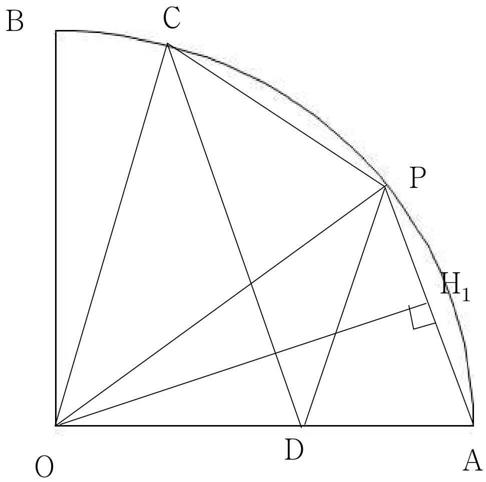
$\angle COP=\angle POA=\theta$

또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$$\angle H_1OA=\frac{\theta}{2}$$

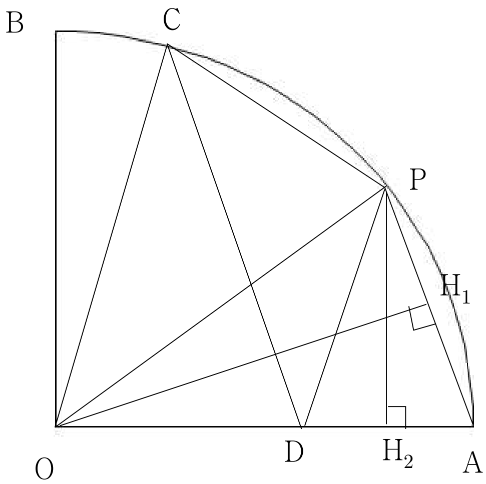
이므로

$$\overline{AP}=2\overline{AH_1}$$
$$=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\qquad\text{------㉠}$$



한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\angle APD=2\angle APH_2$$
$$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}$$
$$=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\theta$$



또,

$$\angle APO=\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta$$
$$=\pi-2\theta\qquad\text{---㉡}$$

그러므로 ㉠과 ㉡으로부터

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PD}}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta$$

$$=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta$$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$$\overline{\mathrm{DA}}=2\overline{\mathrm{AP}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음 삼각형이고 $\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\overline{\mathrm{DA}}=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$$g(\theta)=\triangle\mathrm{DAE}$$

$$=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle\mathrm{OAP}$$

$$=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{4}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ④

29. 출제의도 :

합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s, f(s))$와 점 $\mathrm{Q}(t, 0)$에 대하여 점 P에서의 접선과 직선 PQ는 수직이어야 한다.

이때, $f(x)=e^x+x$에서

$$f'(x)=e^x+1$$

이므로

$$f'(s)=e^s+1 \quad \text{-----㉠}$$

또, 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(s)-0}{s-t}=\frac{e^s+s}{s-t} \quad \text{---㉡}$$

㉠과 ㉡으로부터

$$(e^s+1)\times\frac{e^s+s}{s-t}=-1$$

$$(e^s+1)(e^s+s)=t-s$$

$$t=(e^s+1)(e^s+s)+s \quad \text{---㉢}$$

한편, $f(s)$의 값이 $g(t)$이므로

$$g(t)=e^s+s \quad \text{----㉣}$$

또, 함수 $g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로

$h(1)=k$

라 하면

$g(k)=1$

㉣에서

$e^s+s=1$

$s=0$

이 값을 ㉢에 대입하면

$k=2\times1+0=2$

$g(h(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(h(t))\times h'(t)=1$

$h'(t)=\dfrac{1}{g'(h(t))}$

이때, $t=1$을 대입하면

$h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}$

한편, ㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=(e^s+1)\dfrac{ds}{dt}$

이때, ㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$1=\{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1\}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$$

이므로

$$g'(t)=\frac{e^s+1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$$

이때, $s=0$일 때, $t=2$이므로

$$g'(2)=\frac{2}{1+2^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}$$

따라서,

$$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$$

정답 3

30. 출제의도 :

도함수를 이용하여 함수의 식을 구할 수 있고, 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(가)에서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -3)$에서 감소하는 함수이다.

또, 조건 (나)에서 $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$ ---㉠

이고 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\ge0$이므로 ㉠의 좌변은 0이상인 실수이다.

그러므로 구간 $(-3,\infty)$에서

$f'(x)\ge0$

또, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$

이때, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 4차 함수이므로

$f'(x)=4x^2(x+3)$

즉,

$f'(x)=4x^3+12x^2$

이때,

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (C는 상수)

이 식을 ㉠에 대입하면

$g(x+3)\times(x^4+4x^3)^2=4x^3+12x^2$--㉡

한편,

$\displaystyle\int_4^5 g(x)dx$ ---㉢

에서 구간 $[4,5]$에서의 $g(x)$가 가지는

값은 구간 $[1, 2]$에서의 $g(x+3)$가 가지는 값과 같다.

한편 ㉡의 좌변의 식 x^4+4x^3은 구간 $[1, 2]$에서

$$x^4+4x^3 \neq 0$$

이므로

$$g(x+3)=\frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}$$

또, ㉢에서

$$x-3=t$$

로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=1$이고 $x=4$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=2$이므로

$$\int_4^5 g(x)dx$$

$$=\int_1^2 g(x+3)dx$$

$$=\int_1^2 \frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx \quad \text{---㉣}$$

이때, $x^4+4x^3=s$로 놓으면

$$4x^3+12x^2=\frac{ds}{dx}$$

이고 $x=1$일 때 $s=5$, $x=2$일 때 $s=48$이므로 ㉣은

$$\int_1^2 \frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx$$

$$=\int_5^{48} \frac{1}{s^2}ds$$

$$=\left[-\frac{1}{s}\right]_5^{48}$$

$$=\left(-\frac{1}{48}\right)+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{43}{240}$$

따라서, $p=240$, $q=43$이므로

$$p+q=240+43=283$$

정답 283

2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.①	02.②	03.④	04.②	05.③
06.⑤	07.④	08.③	09.⑤	10.③
11.⑤	12.③	13.①	14.④	15.②
16.6	17.15	18.3	19.2	
20.13	21.426	22.19		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$

$=(-1)^4 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=1 \times 2^{\frac{1}{2}\times 4} \times 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=2^2 \times 2^{-2}$

$=2^{2+(-2)}$

$=2^0$

$=1$

정답 ①

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+9$에서

$f'(x)=3x^2$

이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=3\times 2^2=12$

정답 ②

3. **출제의도** : 삼각함수의 정의를 이해하고, 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\frac{4}{9}$

$=\frac{5}{9}$

따라서

$\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=-\frac{1}{9}$

정답 ④

4. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to 0-$일 때 $f(x)\to -2$이고,

$x\to 1+$일 때 $f(x)\to 1$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=(-2)+1=-1$

정답 ②

5. 출제의도 : 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r>0)$라 하면

$$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2$$
$$=\frac{1}{4}r+\frac{1}{4}r^2=\frac{3}{2}$$

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서

$$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6$$
$$=\frac{1}{4}\times 2^5+\frac{1}{4}\times 2^6$$
$$=24$$

정답 ③

6. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|x+a|$$
$$=|-1+a|,$$
$$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x|=1,$$
$$|f(-1)|=|-1|=1$$

이므로

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로 $a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|f(x)|=|f(3)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|x|=3,$$
$$\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|bx-2|$$
$$=|3b-2|,$$
$$|f(3)|=|3b-2|$$

이므로

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여

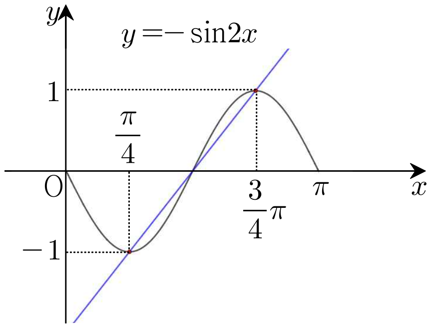
$$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 1\right)$,$\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,5)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)\cdots㉠$$

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\geq 5$

이므로 ㉠에서

$$\frac{f(5)-3}{4}\geq 5$$

$f(5)\geq 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

정답 ③

9. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$$\begin{aligned} h'(x)&=3x^2-2x-1\\ &=(3x+1)(x-1) \end{aligned}$$

이므로

$h'(x)=0$

에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a \le 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

정답 ⑤

10. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \theta$, $\overline{AC} = a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$

즉,

$2^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \dfrac{7}{8}$

$a^2 - \dfrac{21}{4}a + 5 = 0$,

$4a^2 - 21a + 20 = 0$

$(4a-5)(a-4) = 0$

따라서 조건에서 $a > 3$ 이므로 $a = 4$

$\overline{AM} = \overline{CM} = \dfrac{a}{2} = 2$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AM} \times \cos\theta$

$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \dfrac{7}{8}$

$= \dfrac{5}{2}$

이므로

$\overline{MB} = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MB} \times \overline{MD}$

에서

$2 \times 2 = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \times \overline{MD}$

따라서

$\overline{MD} = \dfrac{8}{\sqrt{10}} = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

정답 ③

11. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t (2-t)dt$$

$$= \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^t$$

$$= 2t - \frac{1}{2}t^2$$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$2t - \dfrac{1}{2}t^2 = 0$, $t^2 - 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 4$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t|dt = \int_0^4 3tdt$$

$$= \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4$$

$$= 24$$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$

이므로

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

즉, $n \le 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \ge 7$일 때 $a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$$

이므로

$$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$$
$$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30)$$
$$= 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$$

$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78$ ⋯⋯㉠

㉠에서 $a_1 + 15 \ge 0$이면

$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$

$4a_1 = -63$

$$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$이므로 ㉠에서

$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$

$6a_1 = -93$

$$a_1 = -\frac{31}{2}$$

따라서

$$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$$
$$= -\frac{31}{2} + 27$$
$$= \frac{23}{2}$$

정답 ③

13. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64} = 16^{x_1}$에서

$2^{64} = 2^{4x_1}$

$4x_1 = 64$에서

$x_1 = 16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{P_n}$, $\mathrm{Q_n}$의 x좌표는 x_n으로 서로 같고, 두 점 $\mathrm{Q_n}$, $\mathrm{P_{n+1}}$의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$

이므로

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5 \geq \frac{1}{k}$이고 $x_6 < \frac{1}{k}$

어어야 한다.

$x_5 \geq \frac{1}{k}$에서 $2^{-4} \geq \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16} \geq \frac{1}{k}$에서 $k \geq 16$ ⋯ ㉠

$x_6 < \frac{1}{k}$에서 $2^{-6} < \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64} < \frac{1}{k}$에서 $k < 64$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $16 \leq k < 64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.

정답 ①

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$

$x>0$일 때 $g'(x)=f(x)$

그런데, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-}\{-f(x)\} = \lim_{x \to 0+} f(x)$

$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로

$g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수)

로 놓으면

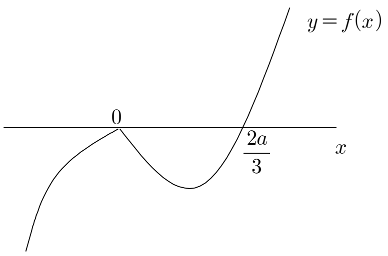
$g'(x)=2x(x-a)+x^2$

$\quad =x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때

$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$

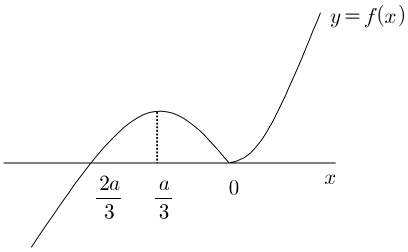
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a<0$일 때

$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$

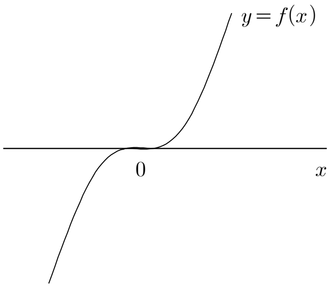
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$일 때

$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<0) \\ 3x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서

$0<a<\dfrac{1}{2}$

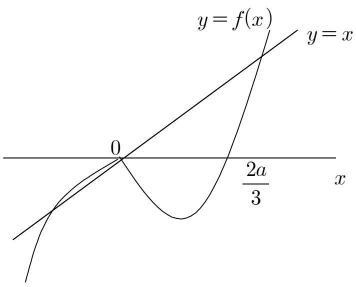
또한, $x<0$일 때

$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$

이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=2a$

이때 $0<2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)의 경우

$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서

$-\dfrac{1}{2}<a<0$

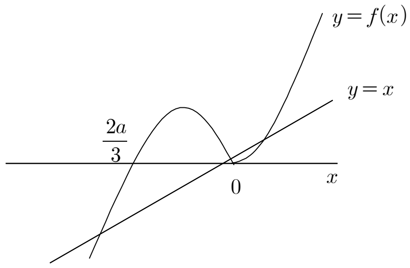
또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$

이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-2a$

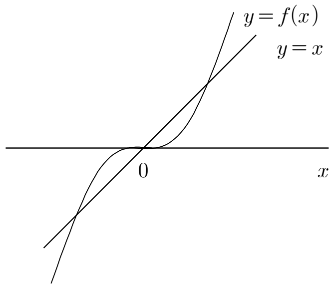
이때 $0<-2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)의 경우

$f(1)=3$ 이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ④

<다른풀이>

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$0<a<\dfrac{1}{2}$이고

① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$

$-3x+2a=1$, $x=\dfrac{2a-1}{3}$

② $x \ge 0$일 때, $x(3x-2a)=x$

$x(3x-2a-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2a+1}{3}$

따라서 $2<f(1)<4$일 때,

방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근

$\dfrac{2a-1}{3}$, 0, $\dfrac{2a+1}{3}$을 갖는다.

15. 출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=0$이므로

$a_2=a_1+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$

$a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}$

$a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5=a_4-\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{2}{k}$

$a_5<0$이므로

$a_6=a_5+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}=\dfrac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}\ne 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로

$a_7=a_6-\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{3}{k}$

$a_7<0$이므로

$a_8=\dfrac{4}{k+1}-\dfrac{3}{k}=\dfrac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.

$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\ne 0$이다.

$5\le k\le 9$이면 $a_{22}\ne 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.

$k\ge 11$이면 $a_{22}\ne 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에서

$x+2>0$이고 $x-2>0$

이어야 하므로

$x>2$ … ㉠

$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$

$=\log_2(x+2)(x-2)$

$=\log_2(x^2-4)$

$=5$

에서

$x^2-4=2^5$

$x^2=36$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$x=6$

정답 6

17. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int(8x^3+6x^2)dx$

$=2x^4+2x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(0)=C=-1$

따라서

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

그러므로

$f(-2)=32-16-1=15$

정답 15

18. **출제의도** : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=4\sum_{k=1}^{10}k+10a$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+10a$

$=220+10a$

즉, $220+10a=250$이므로

$10a=30$

따라서

$a=3$

정답 3

19. **출제의도** : 사차함수의 극대, 극소를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=4+2a=0$

에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

정답 2

20. **출제의도** : 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극소값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이면

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{x+1}f(t)dt$

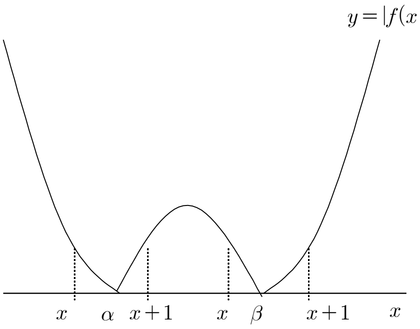
이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하면

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고

$x=1$, $x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$ 이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$g(x)$

$$=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$$

$$=\int_{x}^{\alpha}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}dt$$

$$=-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)dt$$

$$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$

$$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$$

이므로

$$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$$

$$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)=6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0\cdots㉠$

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$g(x)$

$$=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$$

$$=\int_{x}^{\beta}\{-f(t)\}dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$$

$$=\int_{\beta}^{x}f(t)dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$$

$$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt+\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$

$$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt+\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$$

이므로

$$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$$

$$g'(4)=2(4-\alpha)(4-\beta)+2(5-\alpha)(5-\beta)=82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$$

$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0\cdots㉡$

㉠, ㉡에서

$$\alpha\beta=\frac{13}{2}$$

이므로

$$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$$

정답 13

21. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 자연수를 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\log_{8}\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2$$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m \ (m\text{은 정수}) \qquad \cdots\cdots㉠$$

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1 \le k \le 333$인 자연수)

이어야 한다. 이때 ㉠에서

$\left(\dfrac{1}{4k+4}\right)^2 = 2^{3m}$

$16(k+1)^2 = 2^{-3m}$

$(k+1)^2 = 2^{-3m-4}$

이어야 하므로

$(k+1)^2 = 2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$

$k+1 = 2,\ 2^4,\ 2^7$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$

정답 426

22. **출제의도** : 연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x \ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$ … ㉠

이 성립한다.

이때

$\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(x+3)f(x)=3f(0)$,

$\displaystyle\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$,

$g(0)=af(-b)$

이므로 ㉠에서

$3f(0)=af(-b)$ … ㉡

한편,

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$

… ㉢

이때 $t\ne-3$이고 $t\ne6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad \cdots ㉣$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$이 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(i) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때

$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\ge0$ 또는 $k=3$ … ㉤

$x \ge 0$에서 **정답** 19

$g(x)=(x+a)f(x-9)$

$\quad =(x+a)(x-6)(x-9+k)$

이때 $x \ge 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로

$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ ⋯ ㉥

㉤, ㉥에서

$k=3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서

$3\times 3^2=af(-9)$, $27=36a$

$a=\frac{3}{4}$

따라서

$g(4)=(4+a)f(4-b)$

$=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)$

$=\frac{19}{4}\times(-2)^2=19$

(ⅱ) $k-b=-6$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로서

$-k \ge 0$ 또는 $k=3$

$x \ge 0$에서

$g(x)=(x+a)f(x-b)$

$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$

$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$

이때 $x \ge 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로

$b-3=6$에서

$b=9$

$k-b=-6$에서

$k=3$

따라서 (ⅰ)과 같은 결과이므로

$g(4)=19$이다.

■ [선택: 미적분]
23. ① 24. ① 25. ② 26. ②
27. ③ 28. ⑤ 29. 50 30. 16

23. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주어진 식의 분자와 분모에

$$\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}$$

을 각각 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}$$
$$=\frac{1+1}{2}=1$$

정답 ①

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x^2-y\ln x+x=e$
의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\frac{dy}{dx}\times\ln x-y\times\frac{1}{x}+1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{y}{x}+1}{\ln x}$$

그러므로 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e-\frac{e^2}{e}+1}{\ln e}=e+1$$

정답 ①

25. **출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수이므로
$x=y^3+2y+3$ ----㉠
$x=3$일 때,
$3=y^3+2y+3$
$y(y^2+2)=0$
$y=0$
또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=(3y^2+2)\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+2}$$

따라서,

$$g'(3)=\frac{1}{3\times0^2+2}=\frac{1}{2}$$

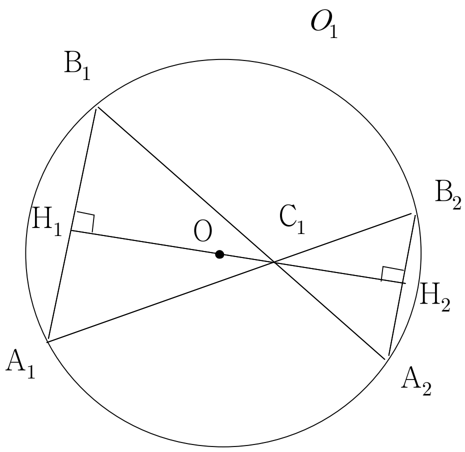
정답 ②

26. **출제의도** : 도형에 활용된 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 A_1B_1, A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H_1은 선분 A_1B_1의 중점이고 점 H_2는 선분 A_2B_2의 중점이다.

또, $\overline{A_1B_1}//\overline{A_2B_2}$이므로 세 점 H_1, O, H_2는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1H_1}\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=1\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$$\angle A_1B_2A_2=\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$$

$$\angle A_2C_1B_2=\angle A_1C_1B_1=\frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형이다.

이때,

$$\overline{C_1A_2}=\overline{B_1A_2}-\overline{B_1C_1}=3-2=1$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$S_1=2\times(\triangle A_1A_2B_1-\triangle A_1C_1B_1)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}$$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$에서

$\overline{A_1A_2}//\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1B_1}//\overline{A_2B_2}$,

$\overline{A_2B_1}//\overline{A_3B_2}$

이고

$\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{A_2B_2}=1$

이므로 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 급수의 수렴조건을 이해하고 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$$a_n=4+(n-1)d$$

이때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(n-1)d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d+\frac{4-d}{n}}{1}-\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$$=d-3=0$$

그러므로

$d=3$

이때, $a_n=3n+1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 미분과 주어진 조건을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$$\begin{cases}x=1\text{일 때}, f(1)=0\\ x\neq1\text{일 때}, f(x)\neq0\end{cases}\quad \text{--㉠}$$

한편,

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad(f(x)\neq0)$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

$$f'(2)=0\quad \text{----㉡}$$

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식

$$g(x)=0$$

은

$$\ln|f(x)|=0$$

$$|f(x)|=1$$

$$f(x)=-1\ \text{또는}\ f(x)=1$$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는 극값을 가져야 한다.

한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

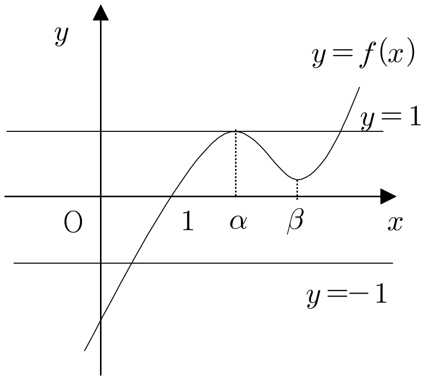
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0\ (1<\alpha<\beta)$

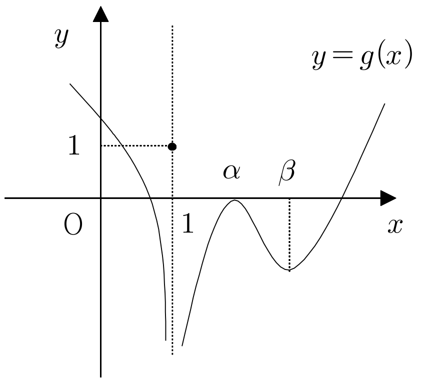
로 놓을 수 있다.

이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.

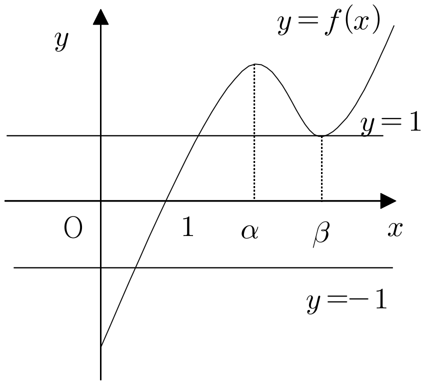
이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

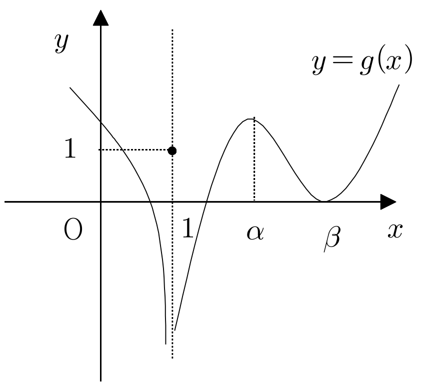
(i)





(ii)





이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고

$\alpha=2$

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)$ (k는 상수)

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$

이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$

$1-k=-2$

$k=3$

이때,

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\} \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(3x-8) \end{aligned}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

그러므로 $\beta=\frac{8}{3}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은

$$\begin{aligned} \ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right| &= \ln\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right| \\ &= \ln\frac{25}{27} \end{aligned}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 도형에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 AHP에서 $\angle \mathrm{APH}=\theta$이므로

$$\angle \mathrm{HAP}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

한편, 삼각형 OPA는

$$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}=1$$

인 이등변삼각형이므로

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{AOP}&=\pi-2\times\angle \mathrm{HAP}\\&=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=2\theta\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}}&=1-\overline{\mathrm{OH}}\\&=1-\overline{\mathrm{OP}}\cos 2\theta\\&=1-\cos 2\theta \qquad \text{----㉠}\end{aligned}$$

또,

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{HAQ}&=\frac{1}{2}\angle \mathrm{HAP}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{HQ}}&=\overline{\mathrm{AH}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=(1-\cos 2\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{---㉡}\end{aligned}$$

㉠과 ㉡에서

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}\\&=\frac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

그러므로

$$\lim_{\theta\to 0-}\frac{f(\theta)}{\theta^4}$$

$$=\frac{1}{2}\times 16\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{(1+\cos 2\theta)^2}\times\lim_{\theta\to 0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times 16\times 1^2\times\frac{1}{4}\times 1$$

$$=2 \qquad \text{------㉢}$$

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle \mathrm{H'OP}=\theta$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}&=2\overline{\mathrm{PH'}}\\&=2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\theta\\&=2\sin\theta\end{aligned}$$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{RP}}$$

$$1:2\sin\theta=\overline{\mathrm{OR}}:1-\overline{\mathrm{OR}}$$

$$2\sin\theta\times\overline{\mathrm{OR}}=1-\overline{\mathrm{OR}}$$

$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{1+2\sin\theta} \qquad \text{----㉣}$$

또,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OS}}&=\overline{\mathrm{OA}}\tan(\angle \mathrm{SAO})\\&=1\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\&=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{----㉤}\end{aligned}$$

㉣과 ㉤에서

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\triangle\mathrm{OSP}-\triangle\mathrm{OSR}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin(\angle \mathrm{POS})\\&\quad-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\angle \mathrm{POS})\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\sin(\angle \mathrm{POS})\times(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OR}})\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$
$$\times\left(1-\frac{1}{2\sin\theta+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$
$$\times\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}$$

그러므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$
$$\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\sin\theta+1}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times2\times1\times1=1\qquad ----ⓑ$$

따라서, ⓒ과 ⓑ을 이용하면

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

이므로

$$100k=100\times\frac{1}{2}=50$$

정답 50

30. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}=(x^2-ax)e^{-x}$$

이므로

$$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+(x^2-ax)e^{-x}\times(-1)$$
$$=e^{-x}\{-x^2+(a+2)x-a\}$$
$$=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$$x^2-(a+2)x+a=0\qquad ---ⓐ$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4a$$
$$=a^2+4>0$$

또, ⓐ의 서로 다른 두 근은

$$x=\frac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2}\qquad ---ⓛ$$

이때, $a>0$이므로

$$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

ⓛ의 두 근을 $\alpha,\beta(0<\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

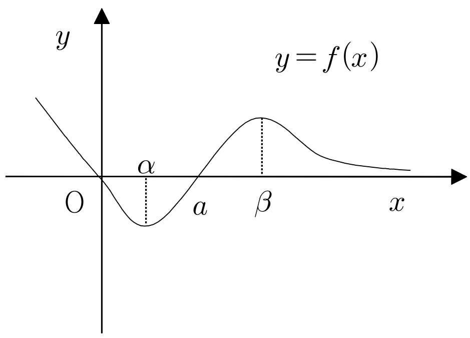
이때,

$f(0)=0$, $f(a)=0$

이고

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$$
$$-e^{-x}\{2x-(a+2)\}$$
$$=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$ ----㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times1\times(2a+2)$

$=a^2+8>0$

그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$y=f(x)$, $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선이다.

한편, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 연속이면

$g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$

이므로

$g(a)+\lim_{t\to a}g(t)$

의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$ ---- ㉢

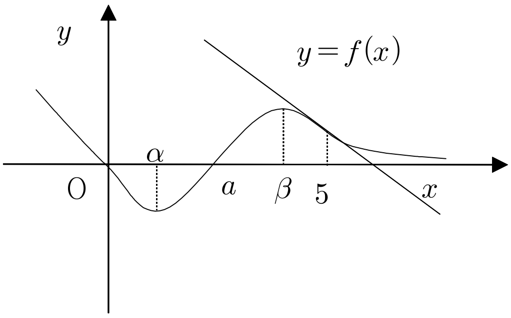
이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다.

함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ㉢을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$\lim_{t\to 5}g(t)=3$, $g(5)=2$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로 대입하면

$5^2-(a+4)\times5+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$a=\dfrac{7}{3}$ ---㉢

한편,

$$\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다.

㉠에 ㉢을 대입하면

$x^2-\left(\dfrac{7}{3}+2\right)x+\dfrac{7}{3}=0$

$x^2-\dfrac{13}{3}x+\dfrac{7}{3}=0$

따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\dfrac{13}{3}$

이므로

$p+q=3+13=16$

정답 16

2022학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 22.03.07

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.②	02.⑤	03.⑤	04.④	05.①
06.③	07.①	08.①	09.④	10.⑤
11.③	12.③	13.②	14.③	15.②
16. 3	17. 4	18. 12	19. 6	
20. 110	21. 678	22. 9		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2^{\sqrt{3}}\times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}}\times 2^2\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=2^{3-4}$

$=2^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}$

정답 ②

2. **출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=6$ …… ㉠

$a_4+a_6=36$에서

$(a_1+3d)+(a_1+5d)=36$

$2a_1+8d=36$

$a_1+4d=18$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=2,\ d=4$

따라서

$a_{10}=2+9\times 4=38$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to -1-$일 때, $f(x)\to 3$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=3$

또, $x\to 2$일 때, $f(x)\to 1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

따라서,

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3+1=4$

정답 ④

5. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5 = 1$이므로 $a_6 = 2$

$a_6 = 2$이므로 $a_7 = 4$

$a_7 = 4$이므로 $a_8 = 8$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 2\times(1+2+4+8)$$
$$= 2\times 15$$
$$= 30$$

정답 ①

6. **출제의도** : 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ ⋯⋯ ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

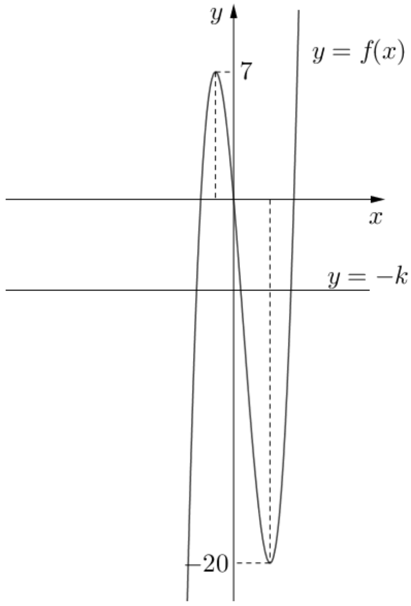
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20 < -k < 7$

즉, $-7 < k < 20$ 이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

정답 ③

7. **출제의도** : 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta - \dfrac{6}{\tan\theta} = 1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta - 6 = \tan\theta$

$\tan^2\theta - \tan\theta - 6 = 0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta = 3$

이때,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 3$,

$\sin\theta = 3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$9\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$10\cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ ······ ㉠

이 값을 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$\sin^2\theta + \frac{1}{10} = 1$

$\sin^2\theta = \frac{9}{10}$

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ······ ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\begin{aligned}\sin\theta + \cos\theta &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\ &= -\frac{4}{\sqrt{10}}\\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

정답 ①

8. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

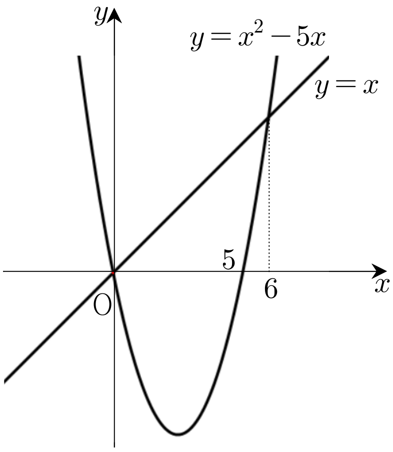
정답풀이 :

$x^2 - 5x = x$에서

$x(x-6) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 6$

곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$가 만나는 점은 원점과 $(6, 6)$이다.



곡선 $y = x^2 - 5x$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\}\,dx$$

$$= \int_0^6 (6x - x^2)\,dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$

$= 36$

따라서 직선 $x = k$가 넓이를 이등분하므로

$$18 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\}\,dx$$

$$= \int_0^k (6x - x^2)\,dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$

$=3k^2-\dfrac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

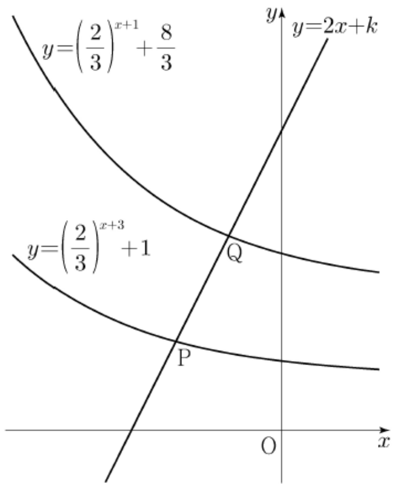
즉, $0<k<6$이므로

$k=3$

정답 ①

9 . **출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 점 P, Q의 x좌표를 각각

$p,\ q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의

점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k),\ \mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의

그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+\dfrac{8}{3}$의 그래프

위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\dfrac{17}{3}$

정답 ④

10. **출제의도** : 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(0,0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프

위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때, 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ …… ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,2)$가 있

으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서
$y'=f(x)+xf'(x)$이므로
$(1,2)$에서의 접선의 방정식은
$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$
$=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$
$=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉣
이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
㉠에서
$d=0$
이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로
㉢에서
$a+b+c=2$ …… ㉤
㉡과 ㉣에서
두 접선이 일치해야 하므로
$f'(0)=f'(1)+2$, $f'(1)=0$
따라서 $f'(0)=2$, $f'(1)=0$
이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로
$f'(0)=2$에서
$c=2$
이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로
$f'(1)=0$에서
$3a+2b+2=0$
㉤에서 $c=2$를 대입하면
$a+b=0$이므로
$b=-a$를 위 식에 대입하여 a,b를 구하면 $a=-2$, $b=2$이므로
$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$,
$f'(x)=-6x^2+4x+2$
따라서
$f'(2)=-14$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\dfrac{\pi}{\dfrac{\pi}{a}}=a$이므로
함수 $f(x)$의 주기는 a이다.
직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로
양수 t에 대하여
$\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면
$\mathrm{A}(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}=4t$이다.
이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로
$\overline{\mathrm{AC}}=4t=a$이고,
$\mathrm{C}(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $\mathrm{C}(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.
점 C가 곡선 $y=\tan\dfrac{\pi x}{a}=\tan\dfrac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로
$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{\pi\times 3t}{4t}$
$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{3\pi}{4}$에서
$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\\&=\frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

정답 ③

12. **출제의도** : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$

이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$일 때,

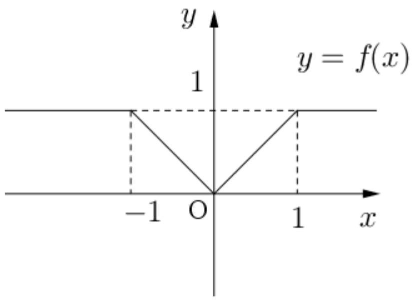
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le 1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le 1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$



따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

13. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$$

그러므로 이 직선의 y절편은

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$

그러므로 이 직선의 y절편은

$$-\frac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같으므로

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

이 식을 정리하면

$$\frac{1}{2}\times\log_2 a=\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$\log_2 a=\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$(b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$$

$$a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}$$

$$a^b=b^a \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고

$f(1)=40$이므로

$a^b+b^a=40$

㉢을 대입하면

$a^b+a^b=40$

$a^b=20$

따라서 $b^a=20$이므로

$$f(2)=a^{2b}+b^{2a}$$
$$=(a^b)^2+(b^a)^2$$
$$=20^2+20^2$$
$$=800$$

정답 ②

14. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$x(0)=0,\ x(1)=0$이므로

점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지
위치의 변화량이 0이므로
$\int_0^1 v(t)\,dt=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$이면
점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로
점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지
움직인 거리가 2 보다 크다. (거짓)

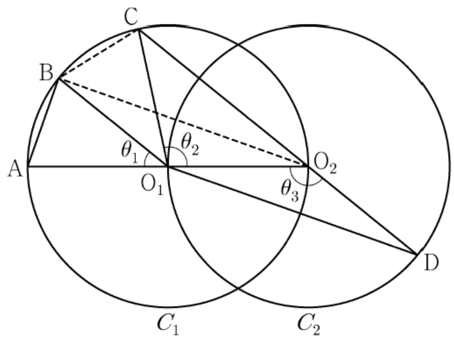
ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 시각 t에서
점 P와 원점 사이의 거리가 1 보다 작고, 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로
점 P는 $0<t<1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로

$\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

$\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때,

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{AO_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 BO_2C에서

$\overline{O_2C}=x\,(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\cos\frac{\theta_1}{2}$

$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$3x^2-16kx+21k^2=0$

$(3x-7k)(x-3k)=0$

$0<x<3k$이므로

$x=\frac{7}{3}k$

즉, $\overline{O_2C}=\boxed{\frac{7}{3}k}$이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\frac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$f(k)=3k$, $g(k)=\frac{7}{3}k$, $p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$=\left(3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\frac{56}{9}$

정답 ②

16. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$

$=\log_2 120-\log_2 15$

$=\log_2\frac{120}{15}$

$=\log_2 8$

$=\log_2 2^3$

$=3$

정답 3

17. **출제의도** : 도함수가 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2+2x)\,dx$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

정답 4

18. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$ ...... ㉠

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50$ ...... ㉡

㉠ − ㉡을 하면

$\frac{a_8}{2}=6$

따라서 $a_8=12$

정답 12

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x)\geq 0$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D/4\leq 0$이어야 하므로

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2-3(-a^2+8a) \\ &= 4a^2-24a \\ &= 4a(a-6)\leq 0 \end{aligned}$$

그러므로

$0\leq a\leq 6$

따라서, a의 최댓값은 6이다.

정답 6

20. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에

$x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로

$0\leq x\leq 1$에서

$$\begin{aligned} f(x+1) &= xf(x)+ax+1 \\ &= x^2+ax+1 \end{aligned}$$

$x+1=t$로 치환하면

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)^2+a(t-1)+1 \\ &= t^2+(a-2)t+2-a \quad \cdots\cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\leq x\leq 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 (x^2-x+1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6} \end{aligned}$$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)\,dx=60\times\frac{11}{6}$

$=110$

정답 110

21. **출제의도** : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2$,

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=-14$

를 만족하기 위해서는

$a_1 = -2,\ a_2 = -4$

$$\sum_{k=3}^{9} a_k = \sum_{k=3}^{9} 2^k = \frac{2^3(2^7-1)}{2-1} = 2^{10} - 8,$$

$a_{10} = -1024$

이어야 한다.

따라서

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$

$= (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$

$= 678$

정답 678

22. 출제의도 :

함수의 극한을 이용하여 도함수 $f'(x)$의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

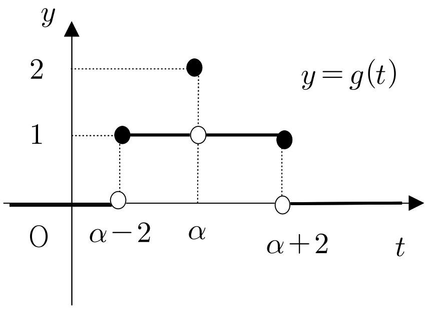
정답풀이 :

이차방정식 $f'(x) = 0$이 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는 경우에는 조건(나)에서 함수 $g(t)$가 함숫값 1과 2를 모두 갖는다는 조건에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x) = 0$는 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$를 갖는다.

(i) $\beta = \alpha + 2$일 때,

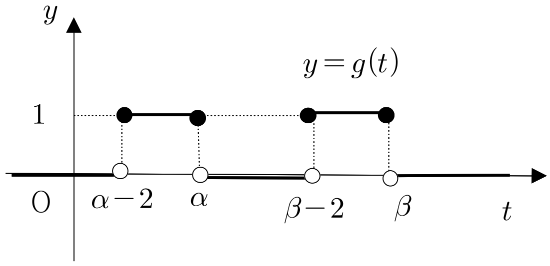
함수 $y = g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta > \alpha + 2$일 때,

함수 $y = g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

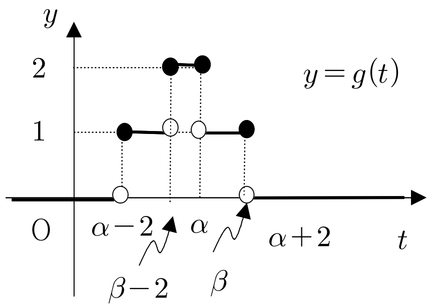


이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta < \alpha + 2$일 때,

함수 $y = g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta - 2 \le a \le \alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$

$$= \frac{3}{2}\{x^2 - (2\alpha+2)x + \alpha^2 + 2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

따라서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$$

이 식을 정리하면

$$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$$

$$9\alpha^2-27\alpha+18=0$$

$$\alpha^2-3\alpha+2=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((ⅰ)-①) $\alpha=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=1$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$$

$$2+C=1$$

$$C=-1$$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((ⅰ)-②) $\alpha=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=2$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$$

$$8+C=2$$

$$C=-6$$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((ⅰ)-①)에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

이므로

$$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$$

$$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$$

$$=9$$

정답 9

[선택: 확률과 통계]
23. ④ **24.** ④ **25.** ① **26.** ③ **27.** ②
28. ① **29.** 31 **30.** 191

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+2)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r x^{7-r} \times 2^r$ (단, $r=0,1,2,\cdots,7$)

이므로

x^5의 계수는 $r=2$일 때

$${}_7C_2 \times 2^2 = \frac{7\times6}{2\times1}\times4=84$$

정답 ④

24. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2X)&=4\mathrm{V}(X)\\&=4\times\frac{2}{9}n\\&=\frac{8}{9}n=40\end{aligned}$$

따라서, $n=45$

정답 ④

25. 출제의도 : 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a^2-b^2=-5$ 또는 $a^2-b^2=5$

즉,

$(b-a)(b+a)=5$ 또는 $(a-b)(a+b)=5$

이고 a,b는 자연수이므로

$b-a=1$, $b+a=5$

또는

$a-b=1$, $a+b=5$

따라서, $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$이다.

또한, 조건 (가)에서

$a+b+c+d+e=12$

이므로 $c+d+e=7$ 이고 c,d,e는 자연수이므로

$c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

(c',d',e'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$

$c'+d'+e'=4$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (c',d',e')의 개수는

$$\begin{aligned}{}_3H_4&={}_{3+4-1}C_4\\&={}_6C_4\\&={}_6C_2\\&=\frac{6\times5}{2\times1}=15\end{aligned}$$

따라서, 구하는 모든 순서쌍 (a,b,c,d,e)의 개수는

$2\times15=30$

정답 ①

26. 출제의도 : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4이하이거나 7이상인 사건을 A라 하면 사건 A^C은 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4보다 크고 7보다 작은 경우이다. 즉, 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$
$$=1-\frac{\frac{5\times4}{2\times1}+\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}}$$
$$=1-\frac{16}{120}$$
$$=\frac{13}{15}$$

정답 ③

27. **출제의도** : 모평균을 추정하여 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$
$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{10}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{10}$$

전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$
$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{20}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{20}$$

이때, $a=c$ 에서

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{10}=\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{20}$$

이고 $\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34$ 이므로

$$\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.96\times\frac{\sigma}{10}-2.58\times\frac{\sigma}{20}$$
$$=0.67\times\frac{\sigma}{10}=1.34$$
$$\sigma=\frac{1.34\times10}{0.67}=20$$

따라서,

$$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{10}$$
$$=2\times1.96\times2$$
$$=7.84$$

정답 ②

28. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에 의하여

$f(1)\ge1$
$f(2)\ge\sqrt{2}>1$
$f(3)\ge\sqrt{3}>1$
$f(4)\ge\sqrt{4}=2$
$f(5)\ge\sqrt{5}>2$

이고 조건 (나)에 의하여 치역으로 가능한 경우는

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$
이다.
(i) 치역이 $\{1,2,3\}$인 경우
$f(1)=1$, $f(5)=3$ 이므로 $\{2,3,4\}$에서 $\{2,3\}$으로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$${}_{2}\Pi_{3}-1=2^3-1=7$$

(ii) 치역이 $\{1,2,4\}$인 경우
(i)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 7이다.
(iii) 치역이 $\{1,3,4\}$인 경우
$f(1)=1$ 이므로 $\{2,3,4,5\}$에서 $\{3,4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$, $\{4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$${}_{2}\Pi_{4}-2=2^4-2=14$$

(iv) 치역이 $\{2,3,4\}$인 경우
((iv)-①) $f(5)=3$ 인 경우
$\{1,2,3,4\}$에서 $\{2,3,4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$${}_{3}\Pi_{4}-\{3+({}_{2}\Pi_{4}-2)\times 2\}$$
$$=3^4-\{3+(2^4-2)\times 2\}$$
$$=81-31$$
$$=50$$

((iv)-②) $f(5)=4$ 인 경우
((iv)-①)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 50이다.
(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$7+7+14+50\times 2=128$

정답 ①

29. **출제의도** : 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 연속확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

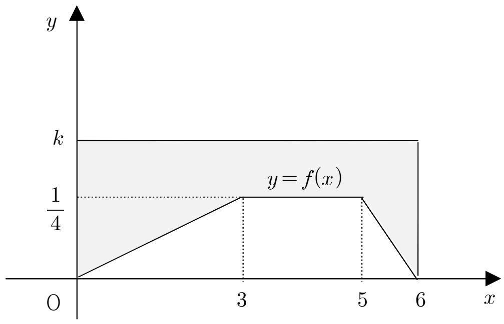
정답풀이 :
$0\le x\le 6$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

이므로

$$g(x)=k-f(x)$$

이때, $0\le Y\le 6$이고 확률밀도함수의 정의에 의하여 $g(x)=k-f(x)\ge 0$ 즉, $k\ge f(x)$ 이므로 그림과 같이 세 직선 $x=0$, $x=6$, $y=k$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 1이다.



또한, $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이므로

$$k\times 6=2$$

따라서, $k=\dfrac{1}{3}$

이때,

$$\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$$

이고 이 값은 세 직선 $x=2$, $x=5$, $y=\dfrac{1}{3}$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $0\le x\le 3$

에서 $f(x)=\frac{1}{12}x$이므로

$\mathrm{P}(6k \leq Y \leq 15k)$

$=\mathrm{P}(2 \leq Y \leq 5)$

$=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\{f(2)+f(3)\}\times 1\right]$

$+\left(\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{4}\times 2\right)$

$=\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\right\}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{24}+\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{24}$

따라서, $p=24$, $q=7$ 이므로

$p+q=31$

정답 31

30. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_5+b_5 \geq 7$인 사건을 A, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \leq k \leq 5)$가 존재하는 사건을 B라 하자.

사건 A가 일어나는 경우는

$a_5+b_5=7=2+2+1+1+1$

$a_5+b_5=8=2+2+2+1+1$

$a_5+b_5=9=2+2+2+2+1$

$a_5+b_5=10=2+2+2+2+2$

이고 주사위의 눈의 수가 5이상일 확률은 $\frac{1}{3}$, 4이하일 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

(i) $a_5+b_5=7$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{8}{3^5}$

(ii) $a_5+b_5=8$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{4}{3^5}$

(iii) $a_5+b_5=9$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\times\frac{2}{3^5}$

(iv) $a_5+b_5=10$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=10\times\frac{8}{3^5}+10\times\frac{4}{3^5}+5\times\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}$

또한, 사건 $A\cap B$인 경우는 (i), (ii)의 경우 3번째 시행까지 5이상의 눈의 수가 1번, 4이하의 눈의 수가 2번 일어나야 하고 (iii), (iv)인 경우는 사건 $A\cap B$은 일어나지 않는다.

$\mathrm{P}(A\cap B)$

$={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=3\times\frac{16}{3^5}+3\times\frac{4}{3^5}$

그러므로, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{3\times\frac{16}{3^5}+3\times\frac{4}{3^5}}{10\times\frac{8}{3^5}+10\times\frac{4}{3^5}+5\times\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}}$

$$= \frac{48+12}{80+40+10+1}$$

$$= \frac{60}{131}$$

이므로

$p=131$, $q=60$

따라서, $p+q=131+60=191$

정답 191

[선택: 미적분]
23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①
28. ② 29. 11 30. 143

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\times n}{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\times n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{5+0}{1-0}=5$$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$ ⋯ ㉠

이다.

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$

이므로 $x=1$이다.

따라서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1+1)\times(3+1)=e$

이므로

$f'(2)=\frac{e}{4}$

정답 ④

25. **출제의도** : 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

이때

$$\begin{aligned}a_{2n-1}-a_{2n}&=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}\\&=ar^{2n-2}(1-r)\\&=a(1-r)(r^2)^{n-1}\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서

$-1<r<1$

이고

$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$

이고 $r\neq 1$이므로

$\frac{a}{1+r}=3$ ⋯ ㉠

또, $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=6$이므로

$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$

따라서 ㉠에서

$\frac{a}{1-r}\times 3=6$

이므로

$$\frac{a}{1-r}=2$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$$=\frac{a}{1-r}=2$$

정답 ②

26. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 1)$$

$$=\frac{\ln 5}{3}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점의 좌표는

$(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\ \cdots\ ㉠$$

이다. 두 식 $y=x^2$, $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$를 연립하면

$$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8},$$

$$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$$

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=t^2,$$

$$\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$$

따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=t^4-\frac{\ln t}{4}$$

이므로 ㉠에서 중점의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}t^2,\ \frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}\right)$이다.

그러므로 점 P의 시각 t에서의 위치는

$$x=\frac{1}{2}t^2,\ y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$$

이다.

이때

$$\frac{dx}{dt}=t,\ \frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= 2t^3 + \frac{1}{8t}$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 x의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x)$이므로

$$g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x)$$
$$= f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$$
$$= 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$$

이므로 $g'(x) = 0$에서

$x = 1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2) = \frac{3}{4}$

(i) $x = 1$일 때

$x = 1$일 때 $\sin(6\pi(x-1)^2) = 0$이므로

$x = 1$ 부근에서 $3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2) > 0$ 이다.

이때 $x-1$은 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로

$g'(x) = 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$도 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

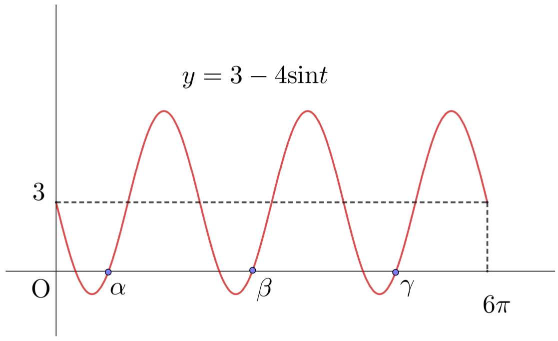
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

(ii) $1 < x < 2$일 때

$12\pi(x-1) > 0$이고, 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 0에서 6π까지 증가한다.

즉, $f(x) = t$라 하면 x의 값이 1에서 2까지 증가할 때 t의 값은 0에서 6π까지 증가한다.

이때 함수 $y = 3 - 4\sin t$의 그래프는 다음과 같으므로 $t = \alpha$, β, γ의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin t$의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x) = \alpha$, β, γ인 x의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin f(x)$의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한 x는 세 수 α, β, γ에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$가 $1 < x < 2$에서 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

(iii) $0 < x < 1$일 때

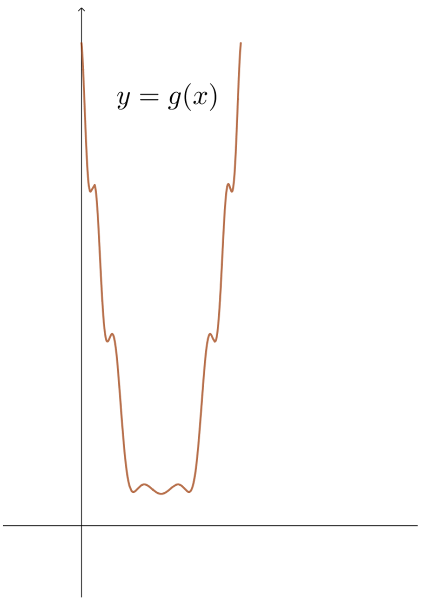
함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f(1-x)=f(1+x)$
가 성립한다.
이때
$$g(1-x)=3f(1-x)+4\cos f(1-x)$$
$$=3f(1+x)+4\cos f(1+x)$$
$$=g(1+x)$$
이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
따라서 (ⅱ)와 같이 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수도 3이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 x의 개수는
$1+3+3=7$
이다.

<참고>
$0<x<2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

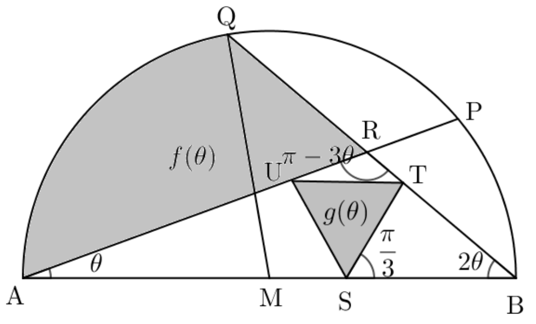


정답 ②

29. **출제의도** : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 M이라 하면
$\angle \mathrm{AMQ}=2\times\angle \mathrm{ABQ}=2\times 2\theta=4\theta$
이므로
(부채꼴 AMQ의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 4\theta=2\theta$,
(삼각형 MBQ의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-4\theta)=\frac{1}{2}\sin 4\theta$
삼각형 RAB에서 $\angle \mathrm{ARB}=\pi-3\theta$이므로
사인법칙에 의하여
$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin\theta},$$
즉
$$\overline{\mathrm{BR}}=\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$
이므로
(삼각형 RAB의 넓이)
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\sin 2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta=\frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$
그러므로
$$f(\theta)=2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta-\frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$
이므로
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(2+2\times\frac{\sin 4\theta}{4\theta}-\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3\times\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}\right)$$
$$=2+2-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\quad\cdots\text{㉠}$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BT}}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{\mathrm{BT}}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{RT}}:\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{UT}}:\overline{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}-\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}:\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}=a:2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이고

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{a}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}\times\frac{1}{\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\dfrac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{\theta^2}}{\dfrac{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{2\times 3}{0+3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{a}{\theta}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{27}\ \cdots\ ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\dfrac{g(\theta)}{\theta^2}}{\dfrac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\dfrac{16\sqrt{3}}{27}}{\dfrac{8}{3}}$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로

$p+q=9+2=11$

정답 11

30. **출제의도** : 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=2f(1)=2$

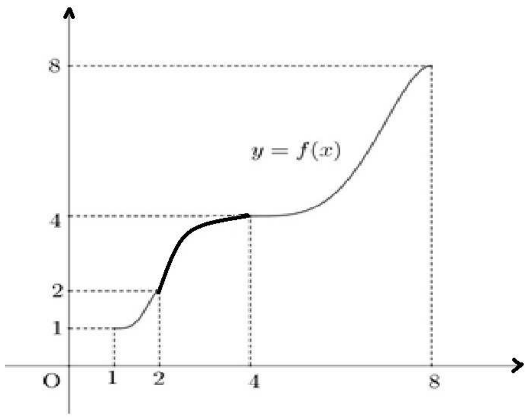
따라서 $f(2)=2$이므로

$g(4)=2f(2)=4$

따라서 $f(4)=4$이므로

$g(8)=2f(4)=8$

따라서 $f(8)=8$이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$=[xf(x)]_1^8-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8f(8)-f(1)-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8\times8-1-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=63-\int_1^8 f(x)dx \ \cdots \ ㉠$$

이때

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$$

$\cdots$ ㉡

이고,

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4} \ \cdots \ ㉢$$

이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x)dx=4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-\int_2^4 g(y)dy \ \cdots \ ㉣$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

$$=2\int_1^2 2f(t)dt$$

$$=4\int_1^2 f(x)dx$$

$$=4\times\frac{5}{4}=5$$

㉣에서

$$\int_2^4 f(x)dx=12-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-5=7 \ \cdots \ ㉤$$

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x)dx=8\times8-4\times4-\int_4^8 g(y)dy$$

$= 48 - \int_4^8 g(y)dy$ ⋯ ㉥

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$\int_4^8 g(y)dy = 2\int_2^4 g(2t)dt$

이므로 조건 (나)에서

$\int_4^8 g(y)dy = 2\int_2^4 g(2t)dt$

$= 2\int_2^4 2f(t)dt$

$= 4\int_2^4 f(x)dx$

$= 4\times 7 = 28$

㉥에서

$\int_4^8 f(x)dx = 48 - \int_4^8 g(y)dy$

$= 48 - 28 = 20$ ⋯ ㉦

㉡, ㉢, ㉤, ㉦에서

$\int_1^8 f(x)dx$

$= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx$

$= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}$

이므로 ㉠에서

$\int_1^8 xf'(x)dx$

$= 63 - \int_1^8 f(x)dx$

$= 63 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4}$

따라서

$p+q = 4+139 = 143$

정답 143

[다른 풀이]

$\int_1^8 xf'(x)dx$에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때 $y=1$, $x=8$일 때 $y=8$이고,

$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

이므로

$\int_1^8 xf'(x)dx = \int_1^8 g(y)dy$

$= \int_1^2 g(y)dy + \int_2^4 g(y) + \int_4^8 g(y)dy$

이때

$\int_1^2 g(y)dy = 2\times 2 - 1\times 1 - \int_1^2 f(x)dx$

$= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$

한편, $\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2} = t$라 하면 $y=2$일 때 $t=1$, $y=4$일 때 $t=2$이고, $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy}$이므로

$\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$= \int_1^2 4f(t)dt = 4\int_1^2 f(t)dt$

$= 4\times\frac{5}{4} = 5$,

또, $\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2} = t$라 하면 $y=4$일 때 $t=2$, $y=8$일 때 $t=4$이고, $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy}$이므로

$\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$

$$=\int_2^4 4f(t)dt=4\int_2^4 f(t)dt$$

$$=4\times\left\{4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy\right\}$$

$$=4(12-5)=28$$

따라서

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^8 g(y)dy$$

$$=\int_1^2 g(y)dy+\int_2^4 g(y)+\int_4^8 g(y)dy$$

$$=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$$

이므로

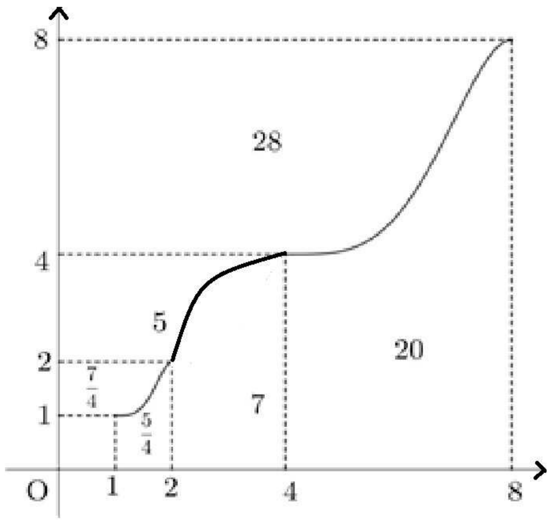
$p+q=4+139=143$

<참고>

조건 (나)의 성질

$g(2x)=2f(x)$

에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.



[선택: 기하]
23. ② 24. ③ 25. ⑤ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 100 30. 23

23. **출제의도** : 좌표공간의 점의 대칭이동을 이해하고 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(2,1,3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(2,1,-3)$

점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(-2,1,3)$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이는

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(2+2)^2+(1-1)^2+(-3-3)^2}$$
$$=\sqrt{52}$$
$$=2\sqrt{13}$$

정답 ②

24. **출제의도** : 초점의 좌표가 주어진 쌍곡선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{6}=1$의 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},0)$이므로

$a^2+6=18$

$a^2=12$

$a>0$이므로

$a=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

정답 ③

25. **출제의도** : 좌표평면의 두 직선의 방향벡터를 이해하고 이를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$\dfrac{x+1}{2}=y-3$, $x-2=\dfrac{y-5}{3}$

의 방향벡터를 각각

$\overrightarrow{u_1}=(2,1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1,3)$

이라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$$
$$=\frac{|2\times1+1\times3|}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+3^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 타원의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

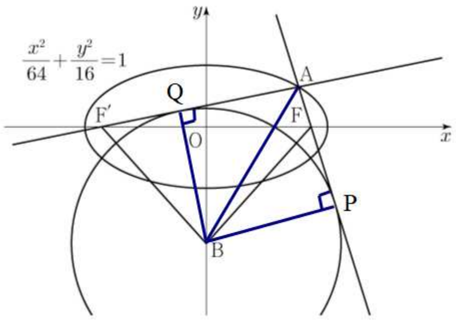
정답풀이 :

$\overline{\mathrm{AF}}=p$, $\overline{\mathrm{AF'}}=q$라 하면 타원의 정의에 의하여

$p+q=2\times8=16$

원 C가 두 직선 AF, AF′과 접하는 두 점을 각각 P, Q, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=r$



사각형 AFBF′의 넓이를 삼각형 ABF와 삼각형 ABF′으로 나누어 생각하면

$\frac{1}{2}\times p\times r+\frac{1}{2}\times q\times r=72$

따라서

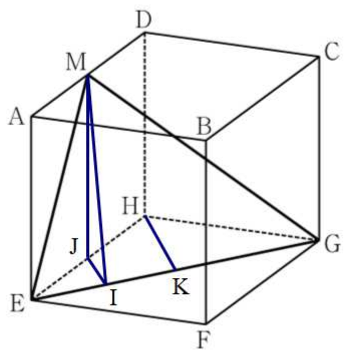
$$r=72\times\frac{2}{p+q}$$
$$=72\times\frac{2}{16}$$
$$=9$$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I, 선분 EH에 내린 수선의 발을 J라 하자.



삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{JI}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$

이므로 점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 K는 선분 EG의 중점이고

$$\overline{\mathrm{IJ}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HK}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}$$

한편, 직각삼각형 MJI에서

$\overline{\mathrm{MJ}}=4$

이므로

$$\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MJ}}^2+\overline{\mathrm{IJ}}^2}$$
$$=\sqrt{16+2}$$
$$=3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\overline{\mathrm{MI}}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$$
$$=12$$

정답 ④

28. 출제의도 : 포물선의 정의와 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

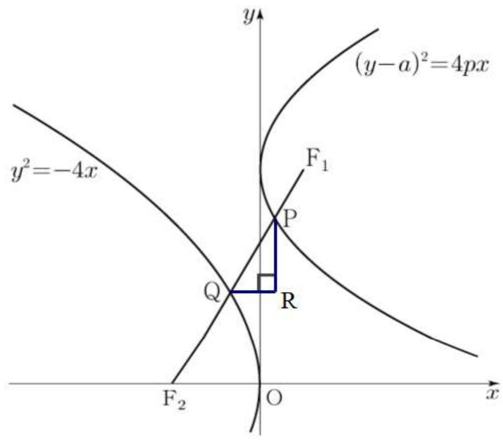
두 점 F_1, F_2의 좌표가 각각

$\mathrm{F}_1(p,\ a)$, $\mathrm{F}_2(-1,\ 0)$

이고, $\overline{\mathrm{F_1F_2}}=3$이므로

$(p+1)^2+a^2=9$ $\cdots\cdots$ ㉠

그림과 같이 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.



직선 PQ의 기울기는 직선 F_1F_2의 기울기와 같은 $\dfrac{a}{p+1}$이므로 직각삼각형 PQR에서 양수 t에 대하여

$\overline{PR}=at$, $\overline{QR}=(p+1)t$

로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{PQ}=1$이므로

$a^2t^2+(p+1)^2t^2=1$

에서

$$t^2=\frac{1}{a^2+(p+1)^2}=\frac{1}{9}$$

즉, $t=\dfrac{1}{3}$

한편, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\overline{PF_1}=p+x_1$,

$\overline{QF_2}=1-x_2$,

$\overline{PF_1}+\overline{QF_2}=2$

이고

$$x_1-x_2=(p+1)t=\frac{1}{3}(p+1)$$

이므로

$(p+x_1)+(1-x_2)=2$

에서

$p=1-(x_1-x_2)$

$$=1-\frac{1}{3}(p+1)$$

즉, $p=\dfrac{1}{2}$

㉠에서

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+a^2=9$$

이므로

$$a^2=\frac{27}{4}$$

따라서

$$a^2+p^2=\frac{27}{4}+\frac{1}{4}=7$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$

$$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-1=2$

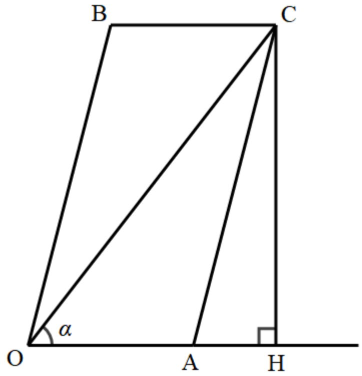
이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

(ⅰ) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최

대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA=\alpha$라 하자.



$\angle CAH=\angle AOB$에서

$$\cos(\angle CAH)=\cos(\angle AOB)=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{AH}&=\overline{AC}\times\cos(\angle CAH)\\&=\overline{OB}\times\frac{1}{4}\\&=2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

한편,

$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$

$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

$=2+8+2=12$

이므로

$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$

그러므로

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}&=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\alpha\\&=|\overrightarrow{OP}|\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{OP}|=3\end{aligned}$$

이므로

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향이면

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=3|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{OX}|$

이므로

$M=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(ⅱ) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}&=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\\&=|\overrightarrow{OP}|\times2\sqrt{3}=3\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=3|\overrightarrow{OP}|-|\overrightarrow{OX}|$

이므로

$$m=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\begin{aligned}M\times m&=4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right)\\&=6\sqrt{6}-8\end{aligned}$$

이므로

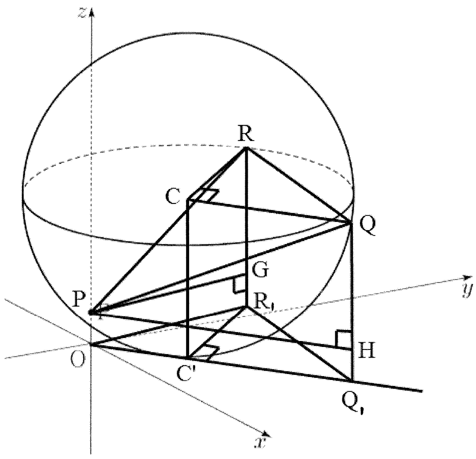
$$\begin{aligned}a^2+b^2&=6^2+(-8)^2\\&=100\end{aligned}$$

정답 100

30. 출제의도 : 좌표공간의 구의 방정식 및 도형의 위치관계를 이해하고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 $\overline{CC'}=5$이므로 구 S는 점 C′에서 xy평면에 접한다.



평면 OPC는 점 C′을 지나므로 점 Q_1은 직선 OC′ 위에 있다. 이때 선분 OQ_1의 길이가 최대가 되려면 점 Q가 점 C를 지나고 직선 OC′과 평행한 직선이 구 S와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$\overline{OQ_1}=\overline{OC'}+5=3+5=8$

한편, 삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되려면 점 R가 점 C를 지나고 직선 CQ에 수직인 직선이 구 S와 만나는 점이어야 한다.

이때 $\overline{R_1C'}\perp\overline{OC'}$이고, $\overline{R_1C'}=5$이므로 삼각형 OQ_1R_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$

이제 삼각형 PQR의 넓이를 구해 보자.

점 P에서 직선 QQ_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{OQ_1}=8$,

$\overline{QH}=\overline{QQ_1}-1=4$

이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$ ……㉠

직각삼각형 CQR에서

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{CQ}^2+\overline{CR}^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$ ……㉡

직각삼각형 $OC'R_1$에서

$\overline{OR_1}=\sqrt{\overline{OC'}^2+\overline{R_1C'}^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

이므로 점 P에서 직선 RR_1에 내린 수선의 발을 G라 하면

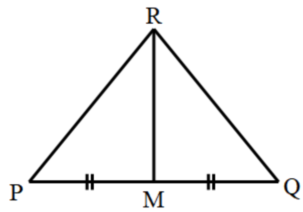
$\overline{PG}=\overline{OR_1}=\sqrt{34}$

$\overline{RG}=\overline{RR_1}-1=4$

직각삼각형 RPG에서

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{RG}^2}=\sqrt{34+16}=5\sqrt{2}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 PQR는 $\overline{PR}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이다.



위 그림과 같이 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{RM}=\sqrt{\overline{PR}^2-\overline{PM}^2}$

$=\sqrt{50-20}$

$=\sqrt{30}$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\sqrt{30}=10\sqrt{6}$

이때 삼각형 PQR의 xy평면 위로의 정사

영이 삼각형 OQ_1R_1이므로 두 평면 PQR 와 OQ_1R_1이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로 의 정사영의 넓이는

$$20 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

이므로

$$p+q=3+20=23$$

정답 23

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.①	02.⑤	03.⑤	04.④	05.③
06.①	07.④	08.②	09.③	10.③
11.④	12.②	13.②	14.⑤	15.①
16. 2	17. 8	18. 9	19. 11	
20. 21	21. 192	22. 108		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$$

$$=3^{-\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$$

$$=3^{-\frac{1}{4}+\left(-\frac{7}{4}\right)}$$

$$=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+4x+5$에서

$f'(x)=6x^2+4$

이므로

$f'(1)=6+4=10$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2a_4=36$

에서 $a_1=2$이므로

$2r\times 2r^3=36$

즉, $r^4=9$

따라서

$$\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1r^6}{a_1r^2}=r^4=9$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$$

이 성립해야 한다. 이때,

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(2x+a)=-2+a$$

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^2-5x-a)=6-a$$

$f(-1)=-2+a$

이므로

$-2+a=6-a$

따라서 $a=4$

정답 ④

5. 출제의도 : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$\quad\quad =6(x+2)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값

$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$

을 갖고, $x=1$에서 극솟값

$m=f(1)=2+3-12+1=-6$

을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

정답 ③

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$$

에서

$$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$$

$$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$$

$$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$$

$$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

따라서

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ①

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{4}$이므로 $n=12$를 대입하면

$$\frac{1}{a_{13}}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13}=-3$

정답 ④

8. **출제의도** : 함수의 극한값을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to 0$이면

(분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

같은 방법으로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서

$f(1)=0$

따라서 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)=-b$$

이므로

$b=-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(ax+b)=a+b$$

이므로

$a+b=1$

따라서 $a=2$이므로

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

따라서 $f(2)=2\times1\times3=6$

정답 ②

[다른 풀이]

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to0$이면

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

이때

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=1$

같은 방법으로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서

$f(1)=0$, $f'(1)=1$

함수 $f(x)$는 삼차함수이고

$f'(0)=f'(1)=1$이므로

$f'(x)=ax(x-1)+1$, 즉

$f'(x)=ax^2-ax+1$

이라 놓으면

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(1)=0$에서 $\frac{a}{3}-\frac{a}{2}+1=0$

$a=6$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+x$

$\therefore\ f(2)=6$

9. **출제의도** : 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$

이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로 $3\le t\le4$일 때 $v(t)\le0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_3^4|v(t)|dt&=\int_3^4\left|-4t^3+12t^2\right|dt\\&=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt\\&=\left[t^4-4t^3\right]_3^4\\&=0-(-27)=27\end{aligned}$$

정답 ③

10. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이므로 두 점 A,B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b},a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5,\ \frac{a}{b}=5$

$a=5b\cdots$㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}$

$=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16},\ ab=\frac{5}{4}\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{2}$ 이므로

$a+b=3$

정답 ③

11. **출제의도** : 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt\ \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a+0$

이므로

$f(1)=2+4a\ \cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)\,dt$

즉,

$0=3a-\int_0^1 f(t)\,dt$

이므로

$\int_0^1 f(t)dt=3a\ \cdots$ ㉢

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$2+4a=3a$

즉, $a=-2,\ f(1)=-6$

㉠의 양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$

이므로

$f'(x)=6x+2a=6x-4$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서

$C=-5$

따라서

$f(3)=27-12-5=10$

이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

정답 ④

12. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{\mathrm{BC}}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의

길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}=4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sin(\angle\mathrm{BCD})\times4\sqrt{7}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$$

한편, $\angle\mathrm{BDC}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{\mathrm{CD}}=2$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=8+2=10$

정답 ②

13. **출제의도** : 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=-45<0$ 이고 $d>0$이므로

조건(가)를 만족시키기 위해서는

$a_m<0$, $a_{m+3}>0$

즉, $-a_m=a_{m+3}$ 에서 $a_m+a_{m+3}=0$

따라서,

$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$

$-90+(2m+1)d=0$

$(2m+1)d=90\cdots$㉠

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90=2\times3^2\times5$ 이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2}>-100$$

$n\{-90+(n-1)d\}>-200\cdots$㉡

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은

$18+30=48$

정답 ②

14. **출제의도** : 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

이다.

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^3-3x^2+C\ (C\text{는 적분상수})$$

따라서

$f(x)-f(0)=x^3-3x^2$

이고

$f(x+p)-f(p)$

$=(x+p)^3-3(x+p)^2+C-(p^3-3p^2+C)$

$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le0)\\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3-3x & (x>0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x<0)\\ 3x^2-3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

ㄴ.

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+} g'(x)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\{3x^2+2(3p-3)x+(3p^2-6p)\}$$

$$=3p^2-6p$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$3p^2-6p=0$

이어야 한다.

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ.

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-2$$

$$=\frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p\ge 2$일 때 $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx\ge 0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

[다른 풀이]

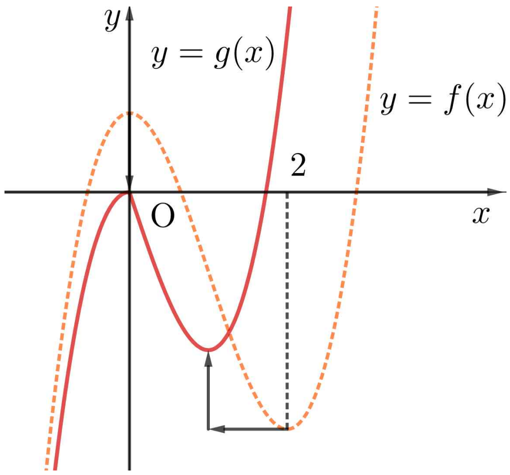
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동한 것이다.

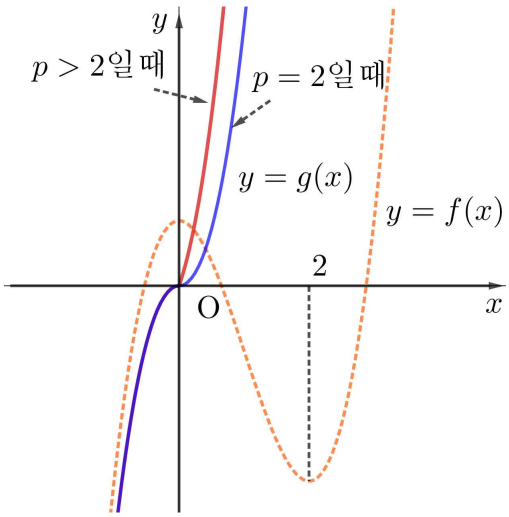
따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)=g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
이때
$\lim\limits_{x\to0-}g'(x)=\lim\limits_{x\to0-}(3x^2-6x)=0$
이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$\lim\limits_{x\to0+}g'(x)=0$
이어야 한다.
그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로 양수 p의 값은 2뿐이다.
따라서 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p\ge2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$일 때,
함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
$\int_{-1}^{1}g(x)dx=0$
$p>2$일 때, 모든 실수 x 에 대하여
$f(x+p)-f(p)\ge f(x+2)-f(2)$
이므로
$\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge0$
따라서 $p\ge2$일 때 $\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge0$ (참)

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
먼저 a_5의 값을 구해 보자.
$-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이면 $a_6=-2a_5-2$이므로
$a_5+a_6=0$에서 $-a_5-2=0$
즉, $a_5=-2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.
$-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$이면 $a_6=2a_5$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $3a_5=0$

즉, $a_5=0$

$\frac{1}{2}<a_5\le 1$이면 $a_6=-2a_5+2$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $-a_5+2=0$

즉, $a_5=2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5=0$이고 이때 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

한편 $0\le a_{n+1}\le 1$일 때

$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n=1-\frac{1}{2}a_{n+1}$

(i) $a_4=-1$인 경우

$a_3<0$, $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4=0$인 경우

㉠ $a_3=-1$인 경우

$a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고, $a_2=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2 100-2\log_2 5$

$=\log_2 100-\log_2 25$

$=\log_2\frac{100}{25}$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2$

정답 2

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx$

$\quad=\int(8x^3-12x^2+7)dx$

$=2x^4-4x^3+7x+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+3$

이므로

$f(1)=2-4+7+3=8$

정답 8

18. **출제의도** : 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45$에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=45 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$3\sum_{k=1}^{10}b_k=42$

즉, $\sum_{k=1}^{10}b_k=14$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{10}b_k-10\times\frac{1}{2}$$
$$=14-5=9$$

정답 9

19. **출제의도** : 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{64-96+20}{4}=-3$$

또한, $f'(x)=3x^2-12x+5$ 이므로

$3a^2-12a+5=-3$, $3a^2-12a+8=0\cdots㉠$

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0<a<4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $p=3$, $q=8$ 이므로

$p+q=11$

정답 11

20. **출제의도** : 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$

라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (f(x)<-x)\\ 2f(x)-5x & (f(x)\geq -x)\end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은

$g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x$,

$\frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$

이때 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는

오직 원점 $(0,0)$에서만 만난다.
따라서 함수 $h(x)$를

$$h(x)=2f(x)-5x$$
$$=x^3-9x^2+15x$$

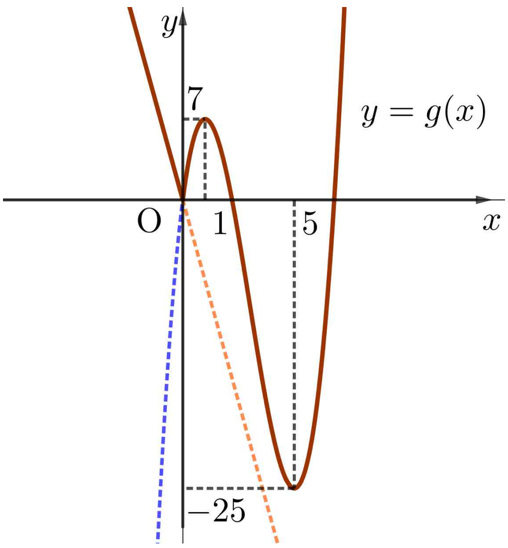
라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다.

$$h'(x)=3x^2-18x+15$$
$$=3(x-1)(x-5)$$

이므로 $h'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=5$
따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값
$h(1)=1-9+15=7$
을 갖고, $x=5$에서 극솟값
$h(5)=125-225+75=-25$
를 갖는다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는
$0<k<7$
이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은
$1+2+3+\cdots+6$
$=\frac{6}{2}(1+6)=21$

정답 21

21. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}$이다.
점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$라 하면

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

에서

$$k=\frac{3}{2}$$

즉, $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$$
$$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$$
$$a=\frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$ 이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

$$=\frac{96}{25}$$

이므로

$$50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$$

정답 192

22. **출제의도** : 함수의 연속성과 미분가능성 및 삼차함수의 그래프를 이해하고 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$$\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h},\ \lim_{h\to0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$$

의 값이 항상 존재한다.

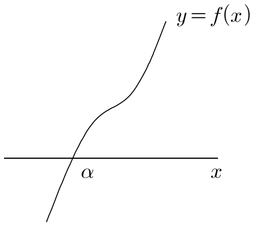
따라서,

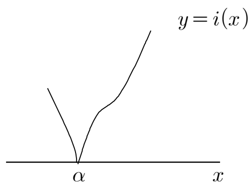
$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(i) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq0$인 경우





$g(x)$

$$=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)\times$$

$$\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

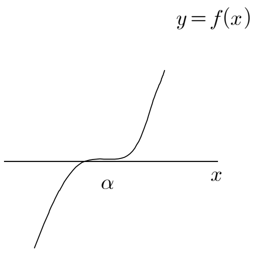
$$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$$

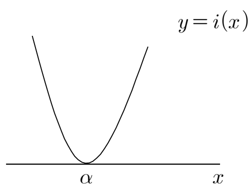
이어야 하므로

$$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$$

그런데 $f'(\alpha)\neq0$, $f(\alpha-3)\neq0$ 이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우





$g(x)$

$$=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$=f(x-3)\times$

$$\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$$

이어야 하고 $f'(\alpha)=0$ 이므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}$

$=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

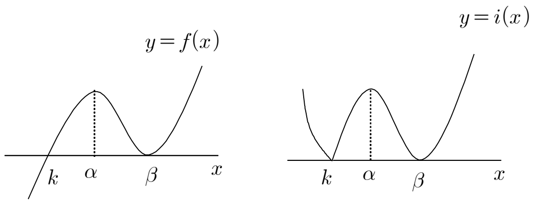
이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha)\neq0$, $f(\beta)\neq0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)\neq0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<\beta)$ 인 경우

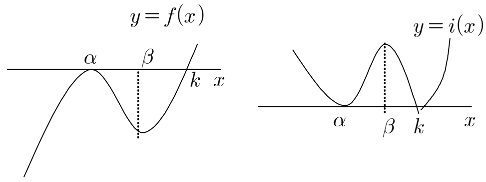


(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<l<\beta<m)$ 인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(\alpha<\beta<k)$ 인 경우



$g(x)$

$$=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$=f(x-3)\times$

$$\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k)\\ 0 & (x=k)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k+}g(x)=g(k)$$

이어야 하므로

$f(k-3)\times\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$

그런데 $f'(k)\neq0$ 이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha\cdots$㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의

합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4 \cdots$ ㉡

또한,

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

이고 $f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로

$f'(x)=0$에서

$\beta=\dfrac{\alpha+2k}{3}$

㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+2k=3$

㉠,㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$ 이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서

$f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times3=108$

정답 108

■ [선택: 미적분]

23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ② 27. ③

28. ① 29. 24 30. 115

23. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{6+5\times 0}{1+2\times 0}$$

$$=6$$

정답 ③

24. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}$ 이므로

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}$$

$$=\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}$$

이고, $\tan(\alpha+\beta)=1$이므로

$$\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}=1$$

따라서

$$\tan\beta=\frac{1}{5}$$

정답 ②

25. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 곡선에서 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x=e^t-4e^{-t}$, $y=t+1$ 에서

$\frac{dx}{dt}=e^t+4e^{-t}$,

$\frac{dy}{dt}=1$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{e^t+4e^{-t}}$$

따라서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{e^{\ln 2}+4e^{-\ln 2}}=\frac{1}{2+4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

정답 ④

26. **출제의도** : 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

x좌표가 $t(1\le t\le 2)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3t+1}{t^2}}$인 정사각형이므로

단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{3t+1}{t^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_1^2 S(t)dt$$
$$=\int_1^2 \frac{3t+1}{t^2}dt$$
$$=\int_1^2\left(\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[3\ln|t|-\frac{1}{t}\right]_1^2$$
$$=\left(3\ln 2-\frac{1}{2}\right)-(3\ln 1-1)$$
$$=\frac{1}{2}+3\ln 2$$

정답 ②

27. 출제의도 : 한없이 반복되는 도형에서 등비급수를 활용하여 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서

$\angle C_1D_1F_1=\frac{\pi}{6}$,

$\overline{C_1D_1}=1$

이므로

$$\overline{C_1F_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서

$\angle C_1D_1E_1=\frac{\pi}{3}$

이므로

$$\overline{C_1E_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

이때,

$$\overline{E_1F_1}=\overline{C_1E_1}-\overline{C_1F_1}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $E_1F_1H_1$에서

$\angle H_1E_1F_1=\frac{\pi}{6}$

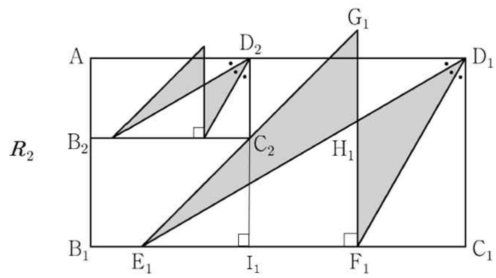
이므로

$$\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$$

$$S_1=\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\times\triangle E_1F_1H_1$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1G_1}+\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1D_1}-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1H_1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 1-2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{6-\sqrt{3}}{9}$$

한편, $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$이므로

$\overline{AB_2}=k$, $\overline{B_2C_2}=2k(k>0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1}=\overline{C_2I_1}=1-k$,

$\overline{I_1C_1}=2-2k$

이므로

$(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}$

$$k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비

가 $1:\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는

$1:\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이

$\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$인

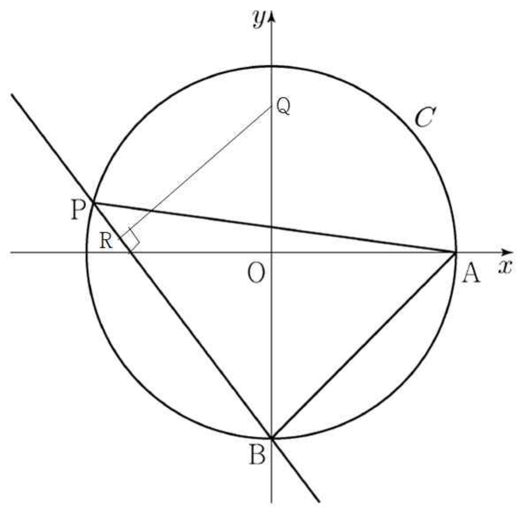
등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 삼각함수의 적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{\mathrm{QB}}=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$

이고

직각삼각형 QRB에서

$\angle\mathrm{QBR}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{QB}}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin\theta}=2\times2$

이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=4\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{BR}}\\&=4\sin\theta-2(1+\cos\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\left[-2\cos\theta-\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)-\left(-2\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\left(-1-\frac{3}{4}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

정답 ①

29. **출제의도** : 함수의 극대, 극소 및 함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이므로

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $f(x)+3=0$

$f(x)$가 이차함수이므로

조건 (가), (나)에 의해

$f'(a)=0$, $f(a)=6$

$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$

이어야 한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하면

$f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$이므로

$f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$

즉, $f(x)=p(x-b)(x-b-6)-3$ …… ㉠

이때, $f'(a)=0$이므로

$$\frac{b+(b+6)}{2}=a$$

$b=a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=p(x-a+3)(x-a-3)-3$

이므로

$f(a)=-9p-3=6$에서

$p=-1$

방정식 $f(x)=0$에서

$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0$

$(x-a)^2-6=0$

$x=a\pm\sqrt{6}$

따라서

$(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$

정답 24

30. 출제의도 : 삼각함수의 극한 및 함수의 극값을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉,

$\lim_{x\to0}\sin(\pi\times f(x))=\sin(\pi\times f(0))=0$

에서

$f(0)=n$(n은 정수)

이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+n$(a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때, $h(x)=\sin(\pi\times f(x))$라 하면

$h(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$$

이다. 즉,

$h'(0)=0$

이다.

이때, $h'(x)=\pi f'(x)\times\cos(\pi\times f(x))$이므로

$h'(0)=\pi f'(0)\times\cos(n\pi)=0$에서

$f'(0)=0$

$f'(x)=27x^2+2ax+b$에서

$f'(0)=b=0$ ------------------㉠

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이므로

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)$

이다.

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=9+a+n$,

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=n$

이므로

$9+a+n=n$

$a=-9$ ----------------㉡

$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2)$

이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=\frac{2}{3}$에서 극소이다.

조건 (나)에 의해

$f(0)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=5$

이므로

$n\times\left(n-\frac{4}{3}\right)=5$

$(3n+5)(n-3)=0$

n이 정수이므로

$n=3$ ----------------㉢

㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$

따라서,

$$\int_0^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)g(x+1)dx+\int_0^1 (x+2)g(x+2)dx+\int_0^1 (x+3)g(x+3)dx+\int_0^1 (x+4)g(x+4)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x)dx+\int_0^1 (x+2)f(x)dx+\int_0^1 (x+3)f(x)dx+\int_0^1 (x+4)f(x)dx$$

$$=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$$

$$=5\int_0^1 (9x^4-9x^3+3x)dx+10\int_0^1 (9x^3-9x^2+3)dx$$

$$=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}$$

$$=\frac{111}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=111$이므로

$p+q=4+111=115$

정답 115

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

[공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]				
01. ④	02. ⑤	03. ①	04. ①	05. ③
06. ④	07. ②	08. ④	09. ⑤	10. ②
11. ②	12. ③	13. ⑤	14. ③	15. ②
16. 2	17. 11	18. 4	19. 6	20. 8
21. 24	22. 61			

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$

$= 2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})}$

$= 2^2$

$= 4$

정답 ④

2. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \int (3x^2 - 2x)dx$

$\quad = x^3 - x^2 + C$ (C는 적분상수)

$f(1) = 1^3 - 1^2 + C = 1$에서

$C = 1$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$이므로

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\tan\theta = \frac{12}{5}$이고 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로

각 θ가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 어떤 원의 교점이

$\mathrm{P}(-5,\ -12)$이다.

따라서 원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

이므로

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{-12}{13} + \frac{-5}{13} = -\frac{17}{13}$

정답 ①

4. 출제의도 : 함수의 그래프에서 좌극한의 값과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0-} f(x) = -2$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = 0$

따라서

$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$

$= -2 + 0 = -2$

정답 ①

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = (x^2+3)f(x)$에서

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2+3)f'(x)$

따라서

$$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$$
$$=2\times2+4\times1$$
$$=8$$

정답 ③

6. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$의 교점의 x좌표는

$3x^2-x=5x$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 2]$에서 직선 $y=5x$가 곡선 $y=3x^2-x$보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$$S=\int_0^2\{5x-(3x^2-x)\}dx$$
$$=\int_0^2(6x-3x^2)dx$$
$$=\left[3x^2-x^3\right]_0^2$$
$$=3(4-0)-(8-0)$$
$$=4$$

정답 ④

7. 출제의도 : 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_3-S_2=a_3$이므로

$a_6=2a_3$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2+5d=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$에서

$d=2$

따라서 $a_{10}=2+9\times2=20$이므로

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}$$
$$=\frac{10\times(2+20)}{2}$$
$$=110$$

정답 ②

8. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a+}(2x-a)^2=a^2$$

$$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$$

$$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$$

이므로

$a^2=(-2a+6)^2$에서
$3(a-2)(a-6)=0$
$a=2$ 또는 $a=6$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은
$2+6=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 찾을 수 있는가?

정답풀이 :
$a_{12}=\frac{1}{2}$이고 $a_{12}=\frac{1}{a_{11}}$이므로
$a_{11}=2$
또, $a_{11}=8a_{10}$이므로
$a_{10}=\frac{1}{4}$
또, $a_{10}=\frac{1}{a_9}$이므로
$a_9=4$
또, $a_9=8a_8$이므로
$a_8=\frac{1}{2}$
또, $a_8=\frac{1}{a_7}$이므로
$a_7=2$
또, $a_7=8a_6$이므로
$a_6=\frac{1}{4}$
또, $a_6=\frac{1}{a_5}$이므로
$a_5=4$
또, $a_5=8a_4$이므로
$a_4=\frac{1}{2}$
또, $a_4=\frac{1}{a_3}$이므로
$a_3=2$
또, $a_3=8a_2$이므로
$a_2=\frac{1}{4}$
또, $a_2=\frac{1}{a_1}$이므로
$a_1=4$
따라서
$a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 로그함수의 그래프가 만나는 점이 조건을 만족하도록 하는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
진수 조건에서 $x>0$
$-\log_n(x+3)+1=\log_n\frac{n}{x+3}$이므로
$\log_n x=\log_n\frac{n}{x+3}$에서
$x=\frac{n}{x+3}$
$x^2+3x-n=0$
$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면
$f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.
$f(1)=4-n<0$에서 $n>4$
$f(2)=10-n>0$에서 $n<10$
따라서 $4<n<10$이므로
n의 값은 $5, 6, 7, 8, 9$이고, 그 합은
$5+6+7+8+9=35$

정답 ②

11. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

이므로

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx$$

$$=1-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0} g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=1$$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$

이므로

$$\int_{-3}^{2} g(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$$

$$=2\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$

$$=2\times1+\frac{5}{6}$$

$$=\frac{17}{6}$$

정답 ②

12. **출제의도** : 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로

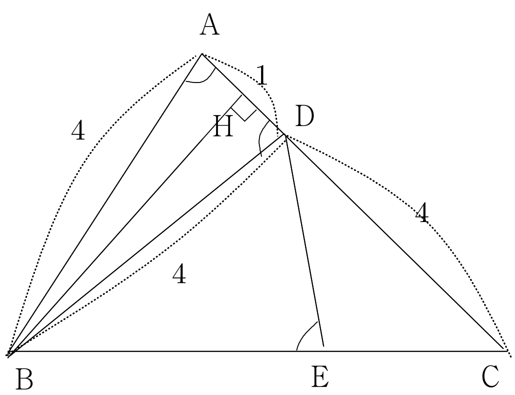
$\overline{\mathrm{BD}}=4$ ······㉠

이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle\mathrm{BAC})=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

그러므로

$\overline{\mathrm{AD}}=1$



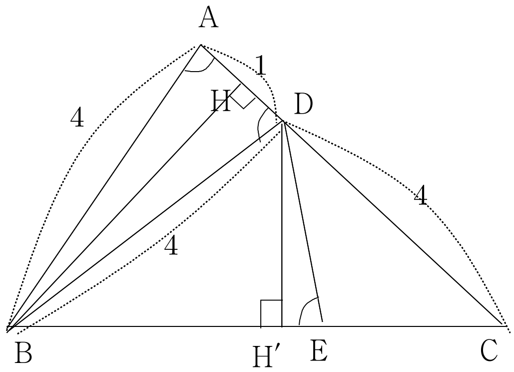
삼각형 BCD는 $\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DC}}=4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{\mathrm{DE}}=x$라 하면

$$\overline{\mathrm{DH'}}=x\sin(\angle\mathrm{H'ED})$$

$$=x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{63}}{8}x \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$



한편, 삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$
$$-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$
$$= 4^2 + 5^2 - 2\times4\times5\times\frac{1}{8}$$
$$= 36$$

이므로

$\overline{BC} = 6$

이때,

$$\overline{BH'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2$$

$$\frac{63}{64}x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$\overline{DE} = x$이므로 $x > 0$

따라서 $\overline{DE} = \frac{8}{3}$

정답 ③

13. 출제의도 : 주기함수에서 함숫값을 구하고, 그 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $k = 1, 4, 9, 16$일 때

$f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x)$이므로

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$에서

$f(\sqrt{k}) = 1$

(ⅱ) $k \neq 1, 4, 9, 16$일 때

$f(\sqrt{k}) = 3$

따라서

$\sum_{k=1}^{20} k = 210$이고, $1+4+9+16 = 30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{20} \left\{ k \times \frac{f(\sqrt{k})}{3} \right\}$$
$$= 30 \times \frac{1}{3} + (210-30)\times\frac{3}{3}$$
$$= 10 + 180 = 190$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$에서

$x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

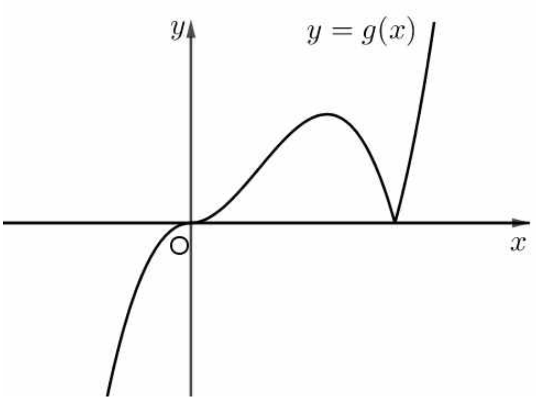
즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로

$p=1$, $q=7$이어야 한다.

따라서 $p+q=1+7=8$



정답 ③

15. 출제의도 :

삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

에서

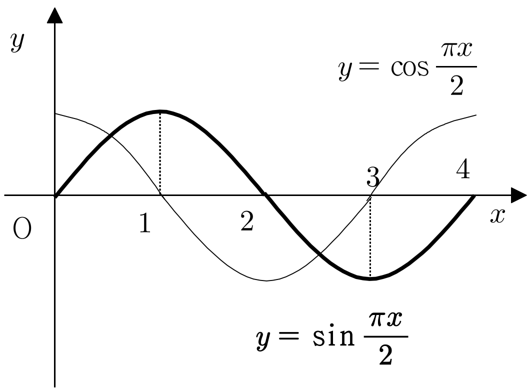
$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$

이 방정식의 실근은 두 함수

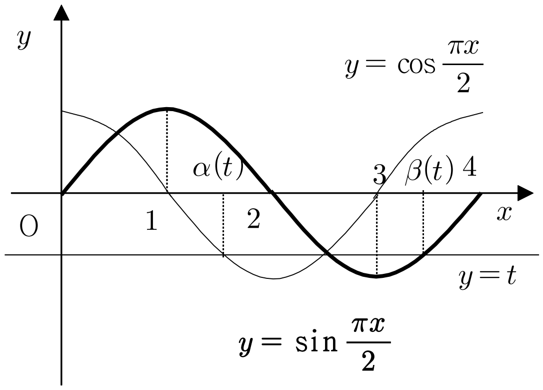
$y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와

$y=t$와의 교점의 x좌표이다.

한편, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1\le t<0$이면 직선 $y=t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x=1$, $x=3$에 대하여 대칭이고 점 $(2, 0)$에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\alpha(t)=1+k\ (0<k\le 1)$

로 놓으면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

$\alpha(t)+\beta(t)=5$ <참>

ㄴ.

실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x|0\le x<4\}$의 원소이므로

$\beta(0)=3$, $\alpha(0)=0$

그러므로 주어진 식은

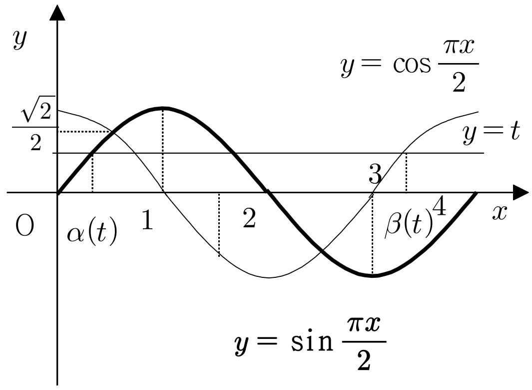
$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}$

$=\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

(ⅰ) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3-0=3$

$t\ne 0$이면 다음 그림과 같다.



이때,

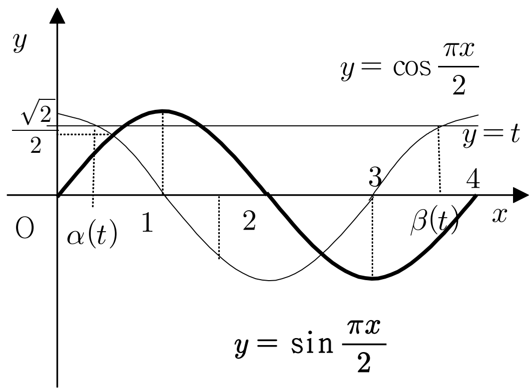
$\alpha(t)=k\ \left(0<k\le\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=3+k$

그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$

(ⅱ) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



이때,

$\alpha(t)=k\ \left(0<k<\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

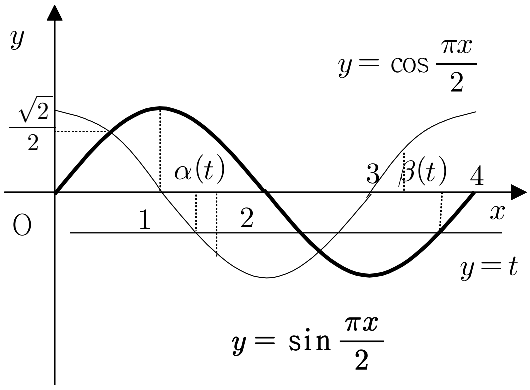
$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ (0<2k<1)$

(ⅲ) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0$, $\beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(iv) $-1 \le t < 0$일 때,



$1 < \alpha(t) \le 2$, $3 \le \beta(t) < 4$이므로

$\beta(t)-\alpha(t) < 3$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서

$\{t|\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

$=\left\{t \middle| 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ <참>

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는

$$0 < t_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_2$$

이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\frac{\pi}{2}\alpha$, $t_2=\cos\frac{\pi}{2}\alpha$

이때, $t_2=t_1+\frac{1}{2}$이므로

$\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{2}$

이 식을 $\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면

$2\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{4}=1$

$8\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+4\sin\frac{\pi}{2}\alpha-3=0$

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$

이때, $\sin\frac{\pi}{2}\alpha>0$이므로

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

그러므로

$t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$t_2=t_1+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서

$t_1\times t_2=\frac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\frac{3}{8}$ <거짓>

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$

$=\log_4\left(\frac{2}{3}\times 24\right)$

$=\log_4 16$

$=\log_4 4^2$

$=2$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

따라서 $a=1$

$f(a)=f(1)=1^3-3\times1+12=10$

이므로

$a+f(a)=1+f(1)=1+10=11$

정답 11

18. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, $a_1=a$라 하면 $a_2=36$에서

$ar=36$ …… ㉠

또, $a_7=\frac{1}{3}a_5$에서

$ar^6=\frac{1}{3}ar^4$

$r^2=\frac{1}{3}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$a_6=ar^5$

$=ar\times r^4$

$=36\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=4$

정답 4

19. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로

$v(t)=3t^2-4t+k$에서

$x(t)=t^3-2t^2+kt$

이때 $x(1)=-3$에서

$-1+k=-3$, $k=-2$

따라서 $x(t)=t^3-2t^2-2t$이고,

$x(3)=27-18-6=3$이다.

그러므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$x(3)-x(1)=3-(-3)=6$

정답 6

20. **출제의도** : 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a\neq3$, $a\neq5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

정답 8

21. **출제의도** : a의 n제곱근의 의미를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$

즉,

$x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 (나)에서 함수$f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다. ㉠에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고 그 값은

$-2^{\frac{6}{n}}\times2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$

이 값이 음의 정수이기 위해서는 n의 값은

2, 4, 6, 12

따라서 (i), (ii)에서 n의 모든 값의 합은

$2+4+6+12=24$

정답 24

22. **출제의도** : 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

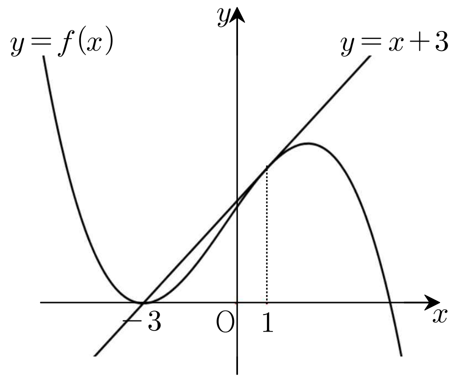
를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0$, $f'(0)>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$는 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$

$\cdots\cdots$ ㉠

이때, $f'(-3)=0$이므로

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\times 16+1$에서 $k=-\dfrac{1}{16}$

따라서

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{16}\times 3\times 1+3=\dfrac{45}{16}$

즉 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=16+45=61$

정답 61

[선택: 확률과 통계]
23. ④ **24.** ② **25.** ③ **26.** ③ **27.** ①
28. ⑤ **29.** 48 **30.** 47

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은
$_5C_r(2x)^{5-r}(1)^r = {}_5C_r \times 2^{5-r} \times x^{5-r}$
$(r=0, 1, 2, \cdots, 5)$
x^3항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로
x^3의 계수는
$_5C_2 \times 2^{5-2} = 10 \times 8 = 80$

정답 ④

24. 출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
이 조사에 참여한 학생 중에서 한 명을 선택하는 경우의 수는 20
이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 B, 1학년 학생인 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E|B)$이다.
이때 $\mathrm{P}(B) = \frac{9}{20}$이고, 사건 $E \cap B$는 진로활동 B를 선택한 1학년 학생을 선택하는 사건이므로
$\mathrm{P}(E \cap B) = \frac{5}{20}$

따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(E|B) = \frac{\mathrm{P}(E \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 중복순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는
$_5\Pi_4 = 5^4$
이 중에서 3500보다 큰 경우는 다음과 같다.
(i) 천의 자리의 숫자가 3, 백의 자리의 숫자가 5인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는
$_5\Pi_2 = 5^2$
(ii) 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우
천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2
이 각각에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는
$_5\Pi_3 = 5^3$
이므로 이 경우의 수는

2×5^3

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 3500보다 큰 자연수의 개수는

$5^2+2\times5^3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5^2+2\times5^3}{5^4}=\frac{11}{25}$

정답 ③

26. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생에게는 노란색 카드 1장을 반드시 주어야 한다.

노란색 카드 1장을 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이 각각에 대하여 이 학생에게 파란색 카드 1장을 먼저 준 후 나머지 파란색 카드 1장을 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이 각각에 대하여 노란색 카드를 받은 학생에게 빨간색 카드 1장도 먼저 준 후 나머지 빨간색 카드 3장을 나누어 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3$

$={}_5C_3$

$={}_5C_2$

$=\frac{5\times4}{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times10=90$

정답 ③

27. **출제의도** : 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6^2\times2^4$

(ⅰ) 앞면이 나온 동전의 개수가 1인 경우의 수는

${}_4C_1=4$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,1)$이어야 하므로 이 경우의 수는

$4\times1=4$

(ⅱ) 앞면이 나온 동전의 개수가 2인 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2}=6$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,2)$ 또는 $(2,1)$이어야 하므로 이 경우의 수는

$6\times2=12$

(ⅲ) 앞면이 나온 동전의 개수가 3인 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1,3)$, 또는 $(3,1)$이어야 하므로 이

경우의 수는

$4\times2=8$

(iv) 앞면이 나온 동전의 개수가 4인 경우의 수는

${}_4C_4=1$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 $(1, 4)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(4, 1)$이어야 하므로 이 경우의 수는

$1\times3=3$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4+12+8+3=27$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{27}{6^2\times2^4}=\frac{3}{64}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 0인 경우

1의 눈만 네 번 나와야 하므로 이 경우의 수는

1

(ii) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 1인 경우

1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번 나와야 하므로 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는

$12\times3=36$

(iii) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 2인 경우

㉠ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

㉡ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

㉠, ㉡ 각각에 대하여 4이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는 $3\times3=9$이므로 이 경우의 수는

$(12+6)\times9=162$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+36+162=199$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 원순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)! = 5! = 120$

이때 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(i) 2, 6이 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2! = 2$

그러므로 이 경우의 수는

$24 \times 2 = 48$

(ii) 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2! = 2$

그러므로 이 경우의 수는

$24 \times 2 = 48$

(iii) 2, 6이 각각 적힌 두 의자와 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 모두 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)! = 3! = 6$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2! \times 2! = 4$

그러므로 이 경우의 수는

$6 \times 4 = 24$

(i)~(iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우의 수는

$48 + 48 - 24 = 72$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 - 72 = 48$

정답 48

30. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 5번 반복할 때 나오는 모든 경우의 수는

3^5

이때 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) 한 개의 숫자만 나오는 경우

이 경우의 수는 3

(ii) 두 개의 숫자가 나오는 경우

1, 2가 적혀 있는 공이 나오는 경우

의 수는

$2^5-2=30$

1, 3이 적혀 있는 공이 나오는 경우

$2^5-2=30$

그러므로 이 경우의 수는

$30+30=60$

(i), (ii)에 의하여 확인한 5개의 수의

곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$3+60=63$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{63}{3^5}=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$$

이므로

$p+q=27+20=47$

정답 47

[선택: 미적분]
23. ② 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ④
28. ① 29. 17 30. 11

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1+1}{1}=2$$

정답 ②

24. **출제의도** : 매개변수로 나타낸 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$$

따라서 $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{1-0}=1$$

정답 ②

25. **출제의도** : 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이다.
$x\geq 0$일 때 $y=e^x$이고 접점을 (t, e^t)이라 하면 $y'=e^x$이므로 접선의 방정식은
$y-e^t=e^t(x-t)$
이 접선이 원점을 지나므로
$-e^t=e^t(-t)$, $t=1$
따라서 접선의 기울기는 e이고 이 접선과 y축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$이다.

$$\tan\theta=\frac{-e-e}{1+(-e)\times e}=\frac{-2e}{1-e^2}=\frac{2e}{e^2-1}$$

정답 ④

26. **출제의도** : 한없이 반복되는 도형에서 넓이의 합을 등비급수를 활용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

$\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}},\quad \frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overline{O_2A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의

비는 $1:\frac{1}{2}$이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^x = k\sin x$ 에서 $\frac{1}{k} = \frac{\sin x}{e^x} \cdots$ ㉠이므로

$h(x) = \frac{\sin x}{e^x}$라 하면

$$h'(x) = \frac{e^x\cos x - e^x\sin x}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

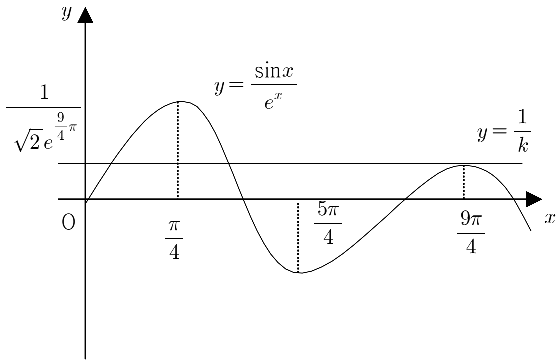
따라서 $x>0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$

이므로 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	1	+	0	-	0	+
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗

x	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{k}$이 $x=\frac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=\frac{\sin x}{e^x}$와 접해야 하므로

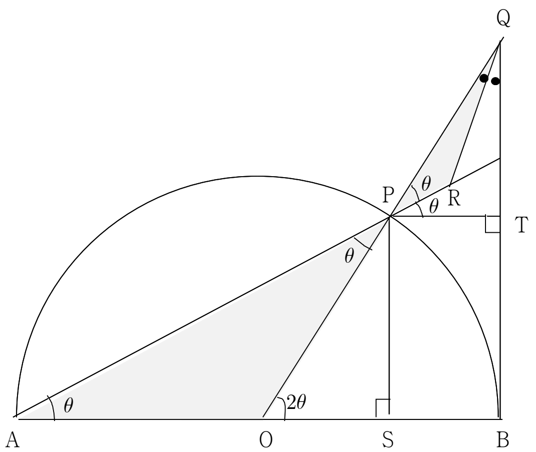
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서 $k = \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

정답 ④

28. 출제의도 : 도형에서 여러 가지 조건을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$f(\theta) = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin(\pi - 2\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

또한, $\angle \mathrm{APO}=\angle \mathrm{QPR}=\theta$이므로

점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면

$\angle \mathrm{QPT}=2\theta$

즉, 점 R는 삼각형 PTQ의 내심이다.

이때,

$\overline{\mathrm{OS}}=\cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{PS}}=\sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\tan 2\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{PT}}=1-\cos 2\theta$

$\overline{\mathrm{QT}}=\tan 2\theta-\sin 2\theta=\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)$

이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\cos 2\theta}-1=\dfrac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}$

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\frac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)\times\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times r\times\left\{\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}+1-\cos 2\theta+\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)\right\}$$

에서

$$r=\frac{(1-\cos 2\theta)\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}$$

이다.

그러므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\times\frac{(1-\cos 2\theta)\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos 2\theta)^2\sin 2\theta}{\cos 2\theta(1+\sin 2\theta+\cos 2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta\times\sin 2\theta}{\cos 2\theta(1+\sin 2\theta+\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)^2}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^4\times 16\times\frac{1}{\cos 2\theta(1+\sin 2\theta+\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)^2}\right\}$$

$$=1^4\times 16\times\frac{1}{8}=2$$

정답 ①

29. **출제의도** : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=\frac{2t\ln x-2x^2}{x}$$

이고 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이므로

$2t\ln k-2k^2=0$

$t\ln k=k^2$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ ……… ㉠

그런데 $g(\alpha)=e^2$ 이므로

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2$

$2\alpha=e^4$, $\alpha=\dfrac{e^4}{2}$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\ln g(t)+t\times\frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\times g'(t)$$

이 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$$\ln g(\alpha)+\alpha\times\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)\times g'(\alpha)$$

$$2+\frac{e^4}{2}\times\frac{g'(\alpha)}{e^2}=2e^2\times g'(\alpha)$$

$$\frac{3}{2}e^2\times g'(\alpha)=2$$

$$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$$

$$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=8$ 이므로

$p+q=17$

정답 17

30. **출제의도** : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을

$\mathrm{P}(\alpha,\alpha+\mathrm{t})$, $\mathrm{Q}(\beta,\beta+\mathrm{t})$ $(\alpha<\beta)$

로 놓으면

$$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}$$
$$=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$$

이때, α, β는 방정식

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

의 서로 다른 두 실근이므로

$$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$$

$$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0$$

$e^x=k(k>0)$로 놓으면

$$k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$$

따라서,

$$k=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$e^{\alpha}=\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$e^{\beta}=\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

즉

$$\alpha=\ln\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$\beta=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$\beta-\alpha$$
$$=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$$
$$=\ln\frac{(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})^2}{4(1-e^{-2t})}$$
$$=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

따라서

$$g(t)=2\ln(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4})$$
$$-\ln4-\ln(1-e^{-2t})$$

라 하면

$$g'(t)=2\times\frac{e^t+\dfrac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$$
$$-\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln2)=2\times\frac{2+\dfrac{8-2}{2}}{2+1}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

즉, $f(t)=\sqrt{2}g(t)$에서

$$f'(\ln2)=\sqrt{2}g'(\ln2)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=11$

정답 11

[선택: 기하]
23. ② 24. ⑤ 25. ① 26. ② 27. ③
28. ③ 29. 80 30. 48

23. **출제의도** : 두 벡터의 평행 조건을 이용하여 주어진 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행하므로 적당한 실수 m에 대하여

$\vec{a}=m\vec{b}$

가 성립한다.

$(k+3,\ 3k-1)=m(1,\ 1)$에서

$k+3=m,\ \ 3k-1=m$

따라서 $k=2,\ \ m=5$

정답 ②

24. **출제의도** : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{8}+\dfrac{\sqrt{2}\,y}{4}=1$

이므로 이 직선의 x절편은 4이다.

정답 ⑤

25. **출제의도** : 벡터로 나타내어진 식을 이용하여 주어진 점이 나타내는 도형을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$에서

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=5$

이므로

$|\overrightarrow{AP}|=5$

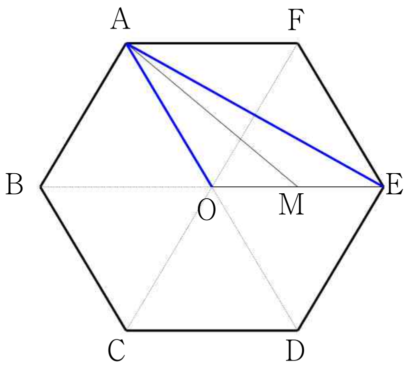
따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 길이는 10π이다.

정답 ①

26. **출제의도** : 도형에서 두 벡터의 합의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 선분 AD와 BE의 교점을 O라 하고 선분 OE의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$이므로



$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AM}$ ⋯ ㉠

삼각형 AOM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AM}^2=\overline{AO}^2+\overline{OM}^2-2\times\overline{AO}\times\overline{OM}\times\cos 120°$$
$$=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{4}$$

$\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이므로 ㉠에서

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2\overline{\mathrm{AM}}=2\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

정답 ②

27. 출제의도 : 쌍곡선 위의 점에서의 접선을 구하여 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\mathrm{P}(4,\,k)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2}=1$ ⋯ ㉠

점 P에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은

$\dfrac{4x}{a^2}-\dfrac{ky}{b^2}=1$

이므로 두 점 Q와 R의 좌표는 각각

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a^2}{4},\,0\right)$, $\mathrm{R}\left(0,\,-\dfrac{b^2}{k}\right)$

따라서 삼각형 QOR의 넓이는

$A_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a^2}{4}\times\left|-\dfrac{b^2}{k}\right|=\dfrac{a^2b^2}{8k}$

삼각형 PRS의 넓이는

$A_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PS}}\times\overline{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{2}\times k\times 4=2k$

이므로

$A_1 : A_2=9 : 4$에서

$\dfrac{a^2b^2}{8k} : 2k=9 : 4$

$36k^2=a^2b^2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{k^2}{\dfrac{36k^2}{a^2}}=1$, 즉 $\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{a^2}{36}=1$

$a^4+36a^2-16\times 36=0$

$(a^2-12)(a^2+48)=0$

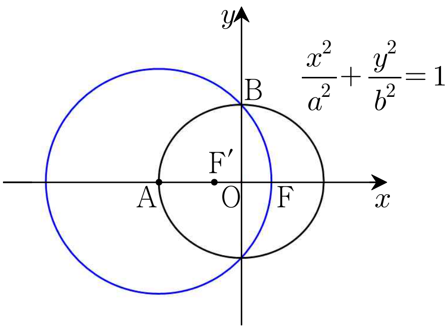
$a^2=12$에서 $a=2\sqrt{3}$이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$이다.

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 방정식에서 꼭짓점과 초점을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 타원의 중심을 원점으로 하고 장축이 x축 위에 놓이도록 좌표축을 설정하자.



이때 타원의 장축의 길이가 $2a$이므로 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$라 하면 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\,0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\,0)$

이다.

주어진 타원이 음의 x축과 만나는 점을 A, 양의 y축과 만나는 점을 B라 하면 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-a,\,0)$, $\mathrm{B}(0,\,b)$이다.

점 A를 중심으로 하고 두 점 B와 F를

지나는 원의 반지름의 길이는 1이므로

$\overline{AB}=1$에서 $\sqrt{a^2+b^2}=1$

$b^2=1-a^2$ ⋯ ㉠

$\overline{AF}=1$에서 $\sqrt{a^2-b^2}+a=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{a^2-(1-a^2)}=1-a$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$2a^2-1=1-2a+a^2$

$a^2+2a-2=0$

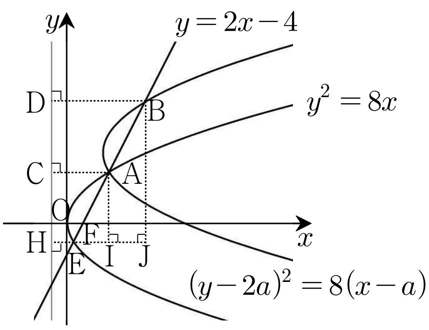
따라서 $a=-1+\sqrt{3}$ $(a>0)$

정답 ③

29. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점에서 준선까지의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

[풀이]



직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점과 일치한다.

따라서 $\overline{AF}=p$, $\overline{EF}=q$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}=p$, $\overline{EH}=q$

이때 포물선의 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 두 점 A, E의 x좌표는 각각 $p-2$, $q-2$이다.

선분 AI와 x축의 교점을 P, 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{FP}=p-4$, $\overline{FQ}=4-q$

이므로 두 직각삼각형 AFP, EFQ에서

$p=\sqrt{5}(p-4)$, $q=\sqrt{5}(4-q)$

따라서

$p=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)=5+\sqrt{5}$,

$q=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)=5-\sqrt{5}$

이므로

$\overline{EI}=p-q=2\sqrt{5}$

한편, 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B는 각각 두 점 E, A를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{AE}$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AE}$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AF}+\overline{EF})$

$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AC}+\overline{EH})$

$=\overline{BD}-\overline{EH}$

$=\overline{EJ}$

$=2\times\overline{EI}$

$=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

따라서 $k=4\sqrt{5}$이므로

$k^2=80$

[다른 풀이]

직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점과 일치한다.

이때 연립방정식

$$\begin{cases} y^2=8x \\ y=2x-4 \end{cases}$$

의 해는 $y^2=4(y+4)$ 즉, $y^2-4y-16=0$ 에서 $y=2\pm2\sqrt{5}$

$y=2+2\sqrt{5}$이면 $x=3+\sqrt{5}$

$y=2-2\sqrt{5}$이면 $x=3-\sqrt{5}$

이므로 두 점 A와 E의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(3+\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$,

$\mathrm{E}(3-\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$이다.

포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}$

따라서 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AB}}$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AE}}$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{EF}})$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{EH}})$

$=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{EH}}$

$=\overline{\mathrm{EJ}}$

$=2\times\overline{\mathrm{EI}}$

$=2\times\{(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})\}$

$=4\sqrt{5}$

$k=4\sqrt{5}$이므로 $k^2=80$

정답 80

30. 출제의도 : 벡터로 표현된 식을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

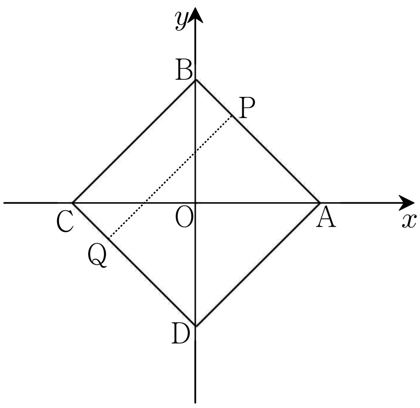
이므로 다음과 같이 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leq 0$

이므로 점 P는 선분 AB 위의 점이고 점 Q는 선분 CD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ $(0\leq a\leq 2)$라 하면 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(a-2, -a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq-2$에서

$(2, 0)\cdot(a, 2-a)=2a\geq-2$

이므로

$a\geq-1$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$에서

$(0, 2)\cdot(a, 2-a)=2(2-a)\geq 0$

이므로

$a\leq 2$ ⋯ ㉡

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geq-2$에서

$(2, 0)\cdot(a-2, -a)=2(a-2)\geq-2$

이므로

$a \ge 1$ ⋯ ㉢

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \le 0$에서

$(0, 2) \cdot (a-2, -a) = -2a \le 0$

이므로

$a \ge 0$ ⋯ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$1 \le a \le 2$ ⋯ ㉤

한편, 점 R(4, 4)에 대하여

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$

$= (a, 2-a) - (4, 4)$

$= (a-4, -a-2)$

$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$

$= (a-2, -a) - (4, 4)$

$= (a-6, -a-4)$

이므로

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$= (a-4, -a-2) \cdot (a-6, -a-4)$

$= (a-4)(a-6) + (a+2)(a+4)$

$= 2a^2 - 4a + 32$

$= 2(a-1)^2 + 30$

㉤에서

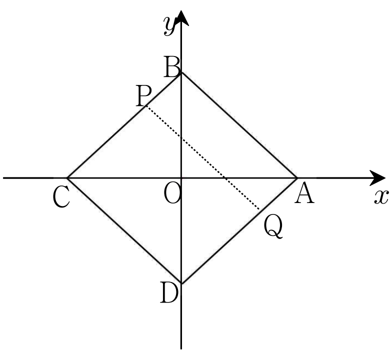
$30 \le \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \le 32$

(ⅱ) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 즉 $\overline{PQ} \perp \overline{AD}$인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \ge 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \le 0$

이므로 점 P는 선분 BC 위의 점이고 점 Q는 선분 AD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, a+2)$ $(-2 \le a \le 0)$ 라 하면 점 Q의 좌표는

$Q(a+2, a)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \ge -2$에서

$(2, 0) \cdot (a, a+2) = 2a \ge -2$

이므로

$a \ge -1$ ⋯ ㉥

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \ge 0$에서

$(0, 2) \cdot (a, a+2) = 2(a+2) \ge 0$

이므로

$a \ge -2$ ⋯ ㉦

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \ge -2$에서

$(2, 0) \cdot (a+2, a) = 2(a+2) \ge -2$

이므로

$a \ge -3$ ⋯ ㉧

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \le 0$에서

$(0, 2) \cdot (a+2, a) = 2a \le 0$

이므로

$a \le 0$ ⋯ ㉨

㉥, ㉦, ㉧, ㉨에서

$-1 \le a \le 0$ ⋯ ㉩

한편, 점 R(4, 4)에 대하여

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$

$= (a, a+2) - (4, 4)$

$= (a-4, a-2)$

$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$

$= (a+2, a) - (4, 4)$

$= (a-2, a-4)$

이므로

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$= (a-4, a-2) \cdot (a-2, a-4)$

$= 2(a-4)(a-2)$

$= 2(a^2 - 6a + 8)$

$= 2(a-3)^2 - 2$

㉩에서

$16 \le \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \le 30$

(i), (ii)에서

$16 \le \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \le 32$

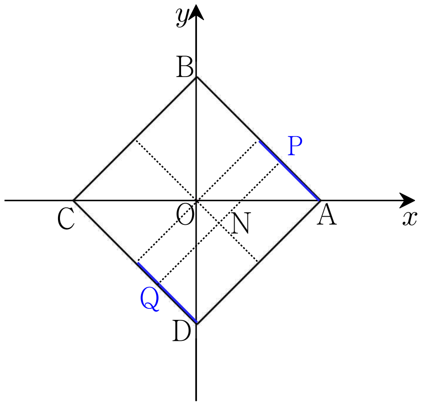
따라서 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값은 $M=32$, 최솟값은 $m=16$이므로

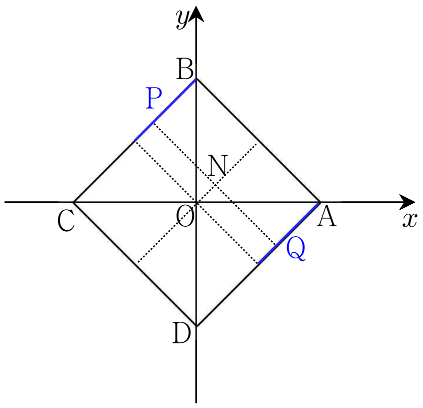
$M+m=48$

정답 48

[다른 풀이]

위의 풀이에서 두 점 P, Q가 지나는 영역은 다음 그림의 굵은 선분 위이다.





선분 PQ의 중점을 N이라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{NQ}=0$,

$\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}=|\overrightarrow{NP}||\overrightarrow{NQ}|\cos\pi=-\overline{NP}^2$

이므로

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$=(\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}) \cdot (\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NQ})$

$=\overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{RN}+\overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$

$=|\overrightarrow{RN}|^2+\overrightarrow{RN} \cdot (\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{NP})+\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$

$=\overline{RN}^2+0-\overline{NP}^2$

이때 항상 $\overline{PQ}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{NP}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{2}$

따라서

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}=\overline{RN}^2-2$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값과 최솟값은 $\overline{RN}$의 최댓값과 최솟값에 의하여 결정된다.

$\overline{RN}$이 최대일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,0)$, $(0,-2)$이므로

$N(1,-1)$

따라서

$\overline{RN}=\sqrt{(4-1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{34}$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값은

$M=(\sqrt{34})^2-2=32$

$\overline{RN}$이 최소일 때의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(0,2)$, $(2,0)$이므로

$N(1,1)$

따라서

$\overline{RN}=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최솟값은

$m=(\sqrt{18})^2-2=16$

이상에서

$M+m=32+16=48$