제 2 교시

수학 영역

5지선다형

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=2x^3-6x^2+F(1)$$

이고 $F(2)=\frac{3}{2}$일 때, $F(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$F(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+F(1)x+C$

$F(1)=\frac{1}{2}-2+F(1)+C$

$C=\frac{3}{2}$

$F(2)=8-16+2F(1)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$F(1)=4$

10. 수열 $\{a_n\}$과 공차가 2인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n-n\times a_1+1=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

를 만족시킨다. $a_3=b_3$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [4점]

① 240 ② 260 ③ 280 ④ 300 ⑤ 320

$a_n-n\times a_1+1=\sum_{k=1}^{n}b_k$ ⋯ ㉠

$n=1$, $b_1=1$

b_n · 공차: 2

· 초항: 1 $\Rightarrow b_n=2n-1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}b_k=n^2$

$n=3$, $a_3-3a_1+1=9$

$3a_1=a_3-8$

$3a_1=-3$ ($\because a_3=b_3=5$)

$\Rightarrow a_1=-1$

㉠에서 $a_n+n+1=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(2n-1)=n^2$

$\Rightarrow a_n=n^2-n-1$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n-1)=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}-10$

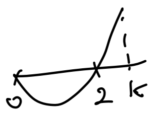
$=385-55-10=320$ ∴⑤

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=at^2-2at \quad (a>0)$$

이다. 시각 $t=0$부터 시각 $t=k\,(k>0)$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 각각 2, 3이다. 시각 $t=2k$일 때 점 P의 위치는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80



위치 변화량 $= \int_0^k v(t)dt = a\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^k$

$= ak^2\left(\frac{1}{3}k-1\right) = 2$

움직인 거리 $= \int_2^k v(t)dt - \int_0^2 v(t)dt$

$= a\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^k - a\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^2$

$= ak^2\left(\frac{1}{3}k-1\right)+a\cdot\frac{4}{3}+a\cdot\frac{4}{3} = 3$

$\Rightarrow \dfrac{k^2\left(\frac{1}{3}k-1\right)}{k^2\left(\frac{1}{3}k-1\right)+\frac{8}{3}} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow k^2\left(\frac{1}{3}k-1\right) = \alpha$ $\qquad 2\alpha+\frac{16}{3}=3\alpha$, $\alpha=\frac{16}{3}$

$\Rightarrow k^2\left(\frac{1}{3}k-1\right)=\frac{16}{3}$

$k^3-3k^2-16=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -3 & 0 & -16 \\ & & 4 & 4 & 16 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \end{array}$$

$k=4 \Rightarrow a=\frac{3}{8}$

$\left[\frac{1}{8}t^3-\frac{3}{8}t^2\right]_0^8 = 40$

12. 실수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos^2 x+4\sin x+a^2-a$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 실수 a의 값의 합은? [4점]

> $0 \leq x \leq 2\pi$일 때, 부등식 $f(x) \geq 6$을 만족시키는 실수 x의 값의 개수는 1이다.

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

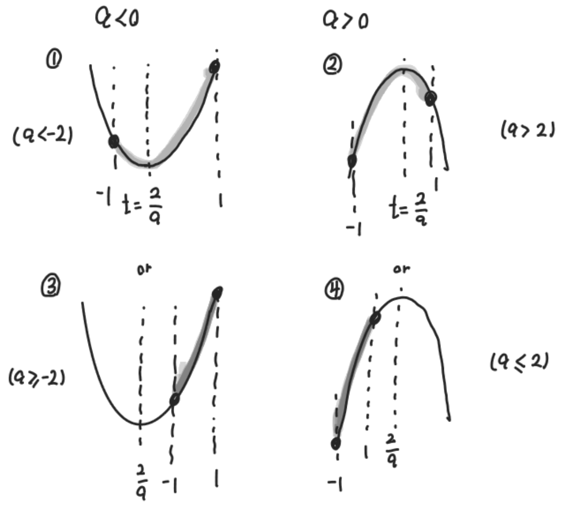
$f(x) = a(1-\sin^2 x)+4\sin x + a^2 - a$

$= -a\sin^2 x + 4\sin x + a^2$

$f(x) = -a\sin^2 x+4\sin x+a^2 \geq 6$ 을 만족하는 실수 x의 개수가 1개이다.

$\sin x = t$ $(-1 \leq t \leq 1)$ 라 하자.

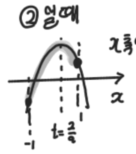
$g(t) = -at^2+4t+a^2-6 \geq 0$, a의 부호에 따라 범위를 나누면,



①일때 $g(1)=0$

$a^2-a-2=(a-2)(a+1)=0$ ··· 범위만족X.

②일때



x축이 어디에 존재하던 실근을 한 개만 갖게하는 a값 존재X.

③일때 $g(1)=0$

위①의 식에서 $a=-1$

④일때 $g(1)=0$

위①의 식에서 $a=2$

a값의 합 $= 2+(-1)=1$

∴④

13. 삼차함수 $f(x)$와 실수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le x) \\ a(x-3)(x+3)+x & (f(x)>x)\end{cases}$$

선지 수정되었습니다! ③ 13이 정답입니다.

는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다. $f(0)=0$일 때, $g(5)$의 최댓값은? [4점]

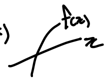
① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$f(t)=t$인 t가 존재

$g(x)$가 증가·미분 가능

⇒ (1) $f(x)\le x$일 때, $f(x)$가 증가

x가 $f(x)$를 뚫고 지나갈 때 ⇒ $f(t)=a(t^2-9)+t$

ex) 

⇒ $t=a(t^2-9)+t$

(2) $t=3$ or -3

i) $f(x)=x$ 근 1개 $f(0)=0$ ⇒ 조건충족 X (2)

ii) $f(x)=x$ 근 2개 $f(x)=x$ 0에서 중근 3or −3에서 근

$f(x)-x=kx^2(x-3)$ or $kx^2(x+3)$

$k<0$ 이면 $[*,\infty]$에서 g는 감소 ··· 항상 증가 X

⇒ $k>0$ ①  $\{kx^2(x-3)+x\}'\ge 0$

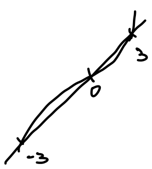
$3kx^2-6kx+1\ge 0$ ⇒ $9k^2-3k\le 0$ ⇒ $0<k\le\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to 3^+} g'(x)=6a+1=9k+1$ ⇒ $1<6a+1\le 4$ ⇒ $0<a\le\frac{1}{2}$

조건만족

② , $x>-3$ $g(x)=a(x^2-9)+x$

$a\le\frac{1}{6}$

iii) $f(x)=x$ 근 3개 

$f(x)>x$

$g(x)=a(x^2-a)+x$

$g'(x)=2ax+1$ ..

$-3<x<0$, $3<x$ $0<a\le\frac{1}{6}$

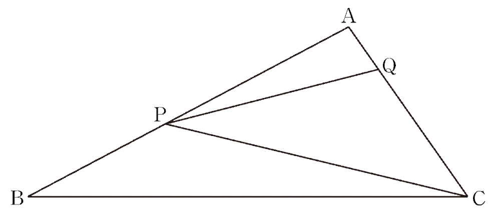
$g(5)=16a+5$ $a=\frac{1}{2}$일 때, 최대

$g(5)=13$

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q에 대하여

$$\cos(\angle \mathrm{CQP})=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \sin(\angle \mathrm{CQP})=\sqrt{2}\sin(\angle \mathrm{PCQ})$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}=4$이고 삼각형 PCQ의 외접원의 넓이와 삼각형 BPC의 외접원의 넓이의 비가 1 : 4일 때, 삼각형 BPC의 넓이는? [4점]



① $2\sqrt{7}$ ② $\frac{9}{4}\sqrt{7}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{7}$ ④ $\frac{11}{4}\sqrt{7}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

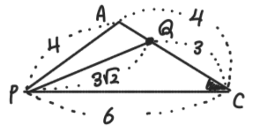
sin 법칙에 의해 $\overline{CQ}=k$, $\overline{PQ}=\sqrt{2}k$

$\cos(\angle CQP)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 $\overline{PC}^2=k^2+2k^2-2\sqrt{2}k^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$=4k^2$ ∴ $\overline{PC}=2k$

$\cos(\angle QCP)$를 구해보자.

$2k^2=k^2+4k^2-2k\cdot k\cdot 2\cdot\cos(\angle QCP)$

∴ $\cos(\angle QCP)=\frac{3}{4}$ ⇒ 

$k=3$

$\angle PCQ=\angle APC=\pi-\angle BPC$ (∵ 이등변)

$\sin(\angle PCQ)=\sin(\angle BPC)$

PCQ 외접원 넓이 : BPC 외접원 넓이 = 1 : 4

⇒ 반지름 비 = 1 : 2

⇒ $\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PCQ)}:\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BPC)}=1:2$ ⇒ $\overline{BC}=2\overline{PQ}$ ⇒ $\overline{BC}=6\sqrt{2}$.

$\overline{BP}=l$ 이라 하자. $72=l^2+36-12l\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

$l^2+9l-36=(l+12)(l-3)=0$ ⇒ $\overline{BP}=3$ $(l>0)$

(APC의 넓이) $=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$,

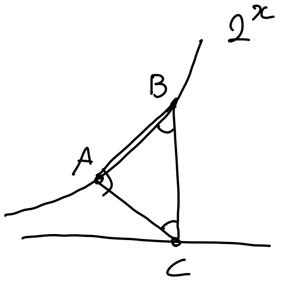
(BPC의 넓이) $=\frac{3}{4}\times$(APC의 넓이) $=\frac{9}{4}\sqrt{7}$.

∴ ②

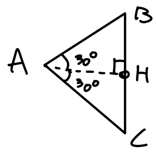
단답형

20. 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A, B와 x축 위의 점 C가 다음 조건을 만족시킬 때, 원점과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하자. 16^d의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

> (가) 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.
>
> (나) 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

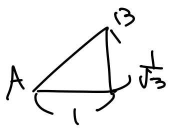


AB의 기울기 $= \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ 

C는 B와 같은 x좌표

$\frac{y_B}{y_A} = 2$ $\Rightarrow$ $x_A + 1 = x_B$ $\cdots$ $(\therefore 2^{x_A+1} = 2\cdot 2^{x_A})$



$y_B = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad x_B = \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}}$

직선 AB : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}$

$-x + \sqrt{3}y + \log_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 2 = 0$

$$\frac{\left|\log_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 2\right|}{\sqrt{4}} = d$$

$$16^d = 4^{\left(2 - \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = 12$$

21. 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2} \le f(x) \le g(x)$이다.
>
> (나) $f(k) = g(k) = k$이고 $g'(k+2) = 25$이다.

(가)에서

$g(x) - f(x) \ge 0$ $\cdots$ ㉠

$f(x) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ge 0$ $\cdots$ ㉡

(나)에서 $f(k) = g(k) = k$

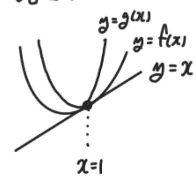
㉡에서 $f(k) \ge \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}$

$k \ge \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}$ 이므로 $k^2 - 2k + 1 \le 0 \Rightarrow k = 1$

$y = f(x)$ 와 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 교점 존재 $x=1 \Rightarrow x=1$에서 접한다.

• 상황 그리기

$f'(1) = 1$, $f(1) = 1$ 이므로 $x=1$ 에서 접선은 $y = x$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow g'(1) = 1$

$f(x) - x = a(x-1)^2$, $f(x) = a(x-1)^2 + x$

$g(x) - x = (x-1)^2(x^2 + mx + n)$,

$g(x) = (x-1)^2(x^2 + mx + n) + x$

$g'(x) = 2(x-1)(x^2 + mx + n) + (x-1)^2(2x + m) + 1$

$g'(3) = 4(3m + n + 9) + 4(6 + m) + 1 = 25$

$= 16m + 4n + 61 = 25$, $16m + 4n = -36$ $\cdots$ ㉢

(나)에서 $g(x) - f(x) \ge 0$

$(x-1)^2(x^2 + mx + n - a) \ge 0$

$m^2 - 4n + 4a \le 0$

㉢에 의해 $m^2 + 16m + 36 + 4a \le 0$

$(m+8)^2 - 28 + 4a \le 0$

부등식 성립하는 m 존재 $\Rightarrow 4a - 28 \le 0 \Rightarrow a \le 7$.

$f(4) = 9a + 4$

$f(4) \le 67$ $\quad \therefore 67$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

28. 흰 공 5개와 검은 공 13개를 세 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 학생은 흰 공과 검은 공을 각각 1개 이상 받는다.
> (나) 각 학생이 받는 검은 공의 개수는 7 이하이다.
> (다) 홀수 개의 흰 공을 받은 학생은 홀수 개의 검은 공을 받는다.

① 64　② 72　③ 80　④ 88　⑤ 96 ✓

A, B, C 에게 흰 공은 1개, 2개, 2개 또는
1개, 1개, 3개 묶음으로 나뉘진다.

흰공을 배부하고 (다)를 참고하면

i)

	A	B	C
흰공	1	2	2

검은공 홀수 + (　　) = 13

	A	B	C
흰공	2	1	2

검은공 홀수 + (　　) = 13

	A	B	C
흰공	2	2	1

검은공 홀수 + (　　) = 13

홀수 + (　　) = 13

홀수 + X + Y = 13　$(X = X'+1,\ Y = Y'+1)$

1　$(X+Y) = 12 \to X'+Y' = 10$

(X', Y') (0,10) (1,9) (2,8) (3,7)
(10,0) (9,1) (8,2) (7,3) 제외　$_2H_{10} - 8 = 3$

3　$(X+Y) = 10 \to X'+Y' = 8$

(X', Y') (0,8) (1,7)
(8,0) (7,1) 제외　$_2H_8 - 4 = 5$

5　$(X+Y) = 8 \to X'+Y' = 6$

$_2H_6 = 7$

7　$(X+Y) = 6 \to X'+Y' = 4$

$_2H_4 = 5$

$(5+5+7+3) \times 3 = 60$

ii)

	A	B	C
흰공	1	1	3

검은공 홀수 + 홀수 + 홀수 = 13

	A	B	C
흰공	1	3	1

검은공 홀수 + 홀수 + 홀수 = 13

	A	B	C
흰공	3	1	1

검은공 홀수 + 홀수 + 홀수 = 13

홀수 + 홀수 + 홀수 = 13

$2a'+1+2b'+1+2c'+1 = 13$

$a'+b'+c' = 5$

$(a' \le 3,\ b' \le 3,\ c' \le 3)$

(a', b', c') 중

(5,0,0) (0,5,0) (0,0,5)
(4,1,0) (4,0,1) (1,4,0)
(0,4,1) (1,0,4) (0,1,4)
제외

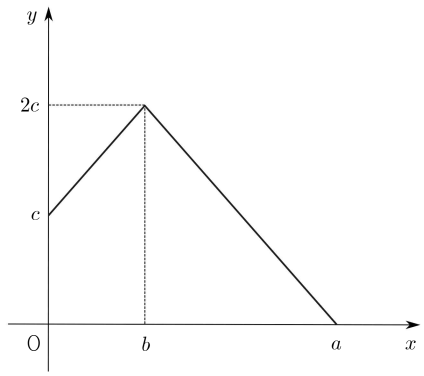
$_3H_5 - 9 = {}_7C_5 - 9 = 21 - 9 = 12$

$12 \times 3 = 36$

$\therefore 60 + 36 = 96$　∴ ⑤

단답형

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



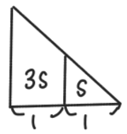
$\mathrm{P}(X \le b) = \dfrac{3}{7}$, $\mathrm{P}(X \ge 1) = \dfrac{1}{7}$ 일 때, $14 \times (a+b+c)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]　∴ 36

$P(X \le b) = \frac{3}{2}bc = \frac{3}{7}$ … ㉠

$P(0 \le X \le a) = 1$

$\therefore P(b \le X \le a) = \frac{4}{7} = c(a-b)$ … ㉡

삼각형에서 1:1 닮음이면
그림과 같은 넓이 관계가 성립한다.



$P(b \le X) : P(1 \le X) = 4 : 1$
이므로
$\frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해

$bc = \frac{2}{7}$, $ac - bc = \frac{4}{7}$, $a+b = 2$

$ac - bc + 2bc = ac + bc = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$

$\Rightarrow (a+b)c = 2c = \frac{8}{7}$　$\therefore c = \frac{4}{7}$, $a+b = 2$　$\Rightarrow 14\left(2 + \frac{4}{7}\right) = 36$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

28. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=e^{x}f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $|g(x)+2x|+|g(x)+3x|=|x|$는 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고, $|\alpha-\beta|\le 2\ln 2$이다.
> (나) 함수 $|g(x)|$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

양수 a의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M\times m$의 값은? [4점]

②

① $8e$ ② $16e$ ③ $24e$ ④ $32e$ ⑤ $40e$

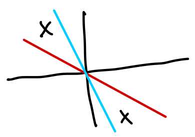
$-3x < g(x) < -2x$ $(x\ge0)$ $\Rightarrow |g(x)+2x|+|g(x)+3x|=x$

(가) $x=|x|$ $(x\ge0)$

$-2x < g(x) < -3x$ $(x<0)$ $\Rightarrow |g(x)+2x|+|g(x)+3x|=x$

(가) $-x=|x|$ $(x\le0)$

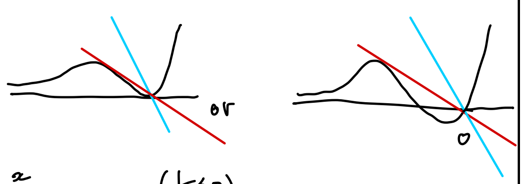
$\Rightarrow$ $g(x)$는 직선 사이에 존재X, 경계에서 근을 갖음



$g(x)$ 근X $\Rightarrow$

무조건 두 직선 내부로 들어간다.

$g(x)$ 근 존재 $\Rightarrow$, (나) 만족



$g(x)=ax(x-k)e^{x}$ $(k\le0)$

$g'(t)=-2$, $g(t)=-2t$ $(t\ne0)$

$at(t^2+(2-k)t-k)e^{t}=at(t-k)e^{t}$

$\Rightarrow t^2+(1-k)t=0$, $t=k-1$

$-2\ln 2\le t=k-1$

$1-2\ln 2\le k$

$g(t)=g(k-1)=-2(k-1)=a(k-1)(-1)e^{k-1}$

$a=2e^{1-k}$ $(1-2\ln 2\le k\le 0)$

$2e\le a\le 8$

단답형

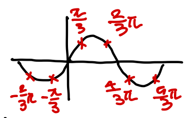
29. 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=2a_n+|a_n|$이라 하자.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}b_k\right)=\frac{3}{4}$$

인 자연수 k는 p, $q\,(p<q)$뿐이고, $b_p\times b_q=-50$이다. $10<a_1<20$일 때, $8\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

$b_n \begin{cases} a_n & (a_n<0) \\ 3a_n & (a_n\ge0) \end{cases}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}b_k\right)=\pm\frac{\sqrt3}{2}$



$\Rightarrow$ b_k는 3의 배수가 아닌 정수

b_p, b_q는 부호 반대

$(a_k>0)$ $b_k=3a_k$가 조건을 만족하려면 $(k=p \text{ or } q)$

$a_k=\dfrac{\text{3의 배수가 아닌 자연수}}{3}$

$\Rightarrow$ a_n의 공비가 $-\frac{2}{3}$이기 때문에 위 조건을 만족하는

k번째 이후 b_n은 존재X $\Rightarrow k=q$

$b_{k-1}=\frac{-3}{2}a_k$, $b_{k-3}=\frac{-27}{8}a_k$, 조건을 만족시키는 b_n이 단 2개려면 $p=k-1$

$b_p\times b_q=a_p\times\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 3a_p=-50$

$a_p=-5$

$a_{p-1}=\frac{15}{2}$, $a_{p-3}=\frac{135}{8}$, $a_{p-5}=\frac{405}{16}$

$10<a_1<20$ $p=4$

$8\times\left(\dfrac{\frac{135}{8}}{1+\frac{2}{3}}\right)=8\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5\cdot27}{8}=\boxed{81}$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.