20.

[정답] 4

[출제 의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\left|f(x)\times\left(f(x)-1\right)\right|$$

이고, 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않기 위해선

$f(k)=0$인데 $x=k$가 방정식 $f(x)=0$의 중근이 아니거나,

$f(k)=1$인데 $x=k$가 방정식 $f(x)=1$의 중근이 아니어야 한다.

함수 $f(x)$의 최솟값을 p라 하자. p의 범위에 따라 경우를 나누자.

(i) $p\ge 1$

이 경우 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$을 만족시키면서 중근을 가지지 않는 실수 x가 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0\le p<1$

이 경우 $f(x)=1$를 만족시키는 실수 x에 대해 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않다.

방정식 $f(x)=1$의 두 실근을 α, β라 하면, (가)에 의해 $\alpha+\beta=4$이므로 곡선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-2)^2+p$와 같이 나타낼 수 있다.

한편 $f(2)=p$이고 $0\leqq p<1$이므로 $x=2$ 근방에서

$$g(x)=-\left(f(x)\right)^2+f(x)$$

이고,

$$g'(2)=-2f(2)\times f'(2)+f'(2)$$

이다. 이때 $f(x)=(x-2)^2+p$이므로 $f'(2)=0$이어서 $g'(2)=0$이다. 따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $p<0$

이 경우 $f(k)=0$ 또는 $f(k)=1$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 $x=k$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않다.

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β라 하고,

방정식 $f(x)=1$의 두 실근을 γ, δ라 하면,

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta,\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=4$$

$$\Rightarrow\ \alpha+\beta=\gamma+\delta=2$$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)^2+p$와 같이 나타낼 수 있다.

한편 $|g'(2)|$를

$$|g'(2)|=|2f(2)\times f'(2)-f'(2)|$$

으로 나타낼 수 있고, 이때 $f(2)=p+1$, $f'(2)=2$이다. 따라서

$$|g'(2)|=|2\times(p+1)\times 2-2|=|4p+2|=6$$

이므로, $|4p+2|=6$에서 $p=1$ 또는 $p=-2$이다.

이때 $p<0$이므로, $p=-2$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2-2$이다.

이때 $x=2$에서 $f(2)=-1$이고 $g(2)=|1+1|=2$이므로,

$$\begin{aligned}g'(2)&=2f(2)\times f'(2)-f'(2)\\&=2\times(-1)\times 2-2=-6\end{aligned}$$

이 되어 조건을 만족시킨다.

$f(3)=2^2-2=2$, $g(3)=\left|2^2-2\right|=2$이므로

구하는 값은 $f(3)+g(3)=2+2=4$이다.