제 2 교시

랑데뷰 〔풀지마세요〕 모의고사

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

랑데뷰수학 - 황보백T

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~8쪽, 선택과목 확률과 통계 9~12쪽, 미적분 13~16쪽, 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 자료실

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{3^{\sqrt{5}+2}}{3^{\sqrt{5}-2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

2. $3^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

3. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \times 4^{\frac{3}{8}}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

4. $2^{\sqrt{24}+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{6}+1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

5. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-6$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 함수 $f(x)=4x^3+ax^2+1$에 대하여 $\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=24$일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{27}x^3+5x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

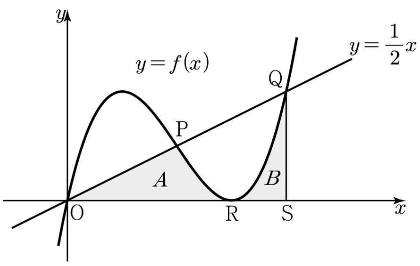
8. 함수 $f(x)=2x^3+x-2$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

9. 상수 $p\,(p>0)$에 대하여 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f(p)=f'(p)=0$$

을 만족시키고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 세 점 O, P, Q ($\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 접하는 접점을 R라 하고 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OP, OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 RS, QS로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



한편, 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값이 $A+B$인 이차함수 $g(x)$와 실수 $t\,(t>0)$가 다음 조건을 만족시킨다.

두 극한 $\lim_{x\to k}\frac{(g(x))^2-(g(k))^2}{x-k}$, $\lim_{x\to k}\frac{t\lvert x\rvert g(x)-(g(k))^2}{x-k}$의 값이 각각 존재하고 그 값이 같도록 하는 실수 k는 t, $-t$ 뿐이다.

또한, 상수 $a\,(a>0)$에 대하여 $x<a$에서 정의된 함수

$$h(x)=\begin{cases} g(t)-2^x & (x<1) \\ \log_2(a-x) & (1\le x<a)\end{cases}$$

가 최댓값을 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 m이라 하자. 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $\log_2(15a+m)x-y+t=0$이 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 -4일 때, a의 값은? [4점]

① 11　② 22　③ 33　④ 44　⑤ 55

10. 함수 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(-x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 $t=k$에서 불연속이고 실수 k의 값이 0, 2, 4뿐일 때, 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_7=g(-2)+ab$이 되도록 하는 모든 a_1의 값 중 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$
(나) 네 항 a_3, a_4, a_5, a_6 중 짝수인 항의 개수는 1이하이고 짝수인 항의 값은 $g(-2)+ab$이하이다.

실수 m에 대하여 함수

$$h(x)=-mx^2-2x+p$$

라 할 때, 함수 $h(x)$에 대하여 함수

$$k(x)=\begin{cases} \lvert h(x)\rvert+x^2 & (x\le 0) \\ q\{h(x)\}^2+qx & (x>0)\end{cases}$$

가 $x=r$ $(r<0)$에서만 미분가능하지 않는다. $p+q+r$의 값은? (단, a, b, p, q, r는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$　② $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$　③ $\frac{3-\sqrt{6}}{4}$　④ $\frac{3-\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\frac{3-\sqrt{6}}{2}$

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 p에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{p}^{x} f(t)dt$$

의 최솟값이 -4이다. 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\frac{|g(x)-g(1)|}{|x|-1}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 양수 a $(a>1)$, b에 대하여 $x>-b$에서 정의된 함수

$$k(x)=\begin{cases} \dfrac{f(p^2)}{60}\log_a(x+b)-b & (-b<x\le 0) \\ a^{\frac{60x}{f(p^2)}} & (x>0) \end{cases}$$

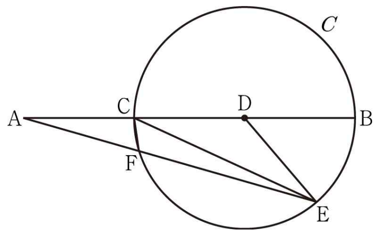
이다. 함수 $y=k(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수는 4이고 교점의 x좌표를 크기가 작은 순서대로 나열하면 x_1, x_2, x_3, x_4이다.

$$k(0)=0,\ x_1+x_3=0$$

일 때, 그림과 같이 선분 AB를 삼등분하는 점 중 점 A에 가까운 점 C와 점 B에 가까운 점 D에 대하여 점 D를 중심으로 하고 선분 BC를 지름으로 하는 원 C 위의 점 E가

$$\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{k(a+b)-p^2},\ \sin(\angle\mathrm{ACE})=\frac{1}{k(a)}$$

을 만족시킨다. 직선 AE와 원 C와 만나는 점을 F라 하자. 선분 CF의 길이는? [4점]



① $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ④ $\frac{4\sqrt{7}}{21}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{21}$

12. $a>1$, $k>\frac{a}{2}$인 두 실수 a, k에 대하여 두 곡선

$$y=a^x-k,\ y=k(a^{-x}+1)-\frac{1}{2}$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\frac{a^{x-3}}{2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다.
삼차함수 $f(x)$와 두 실수 a, k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \left(x<0,\ x>\dfrac{\log_a 2k+k}{3}\right) \\ |f(x)| & \left(0\le x\le\dfrac{\log_a 2k+k}{3}\right) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p-h)}{h}=0$을 만족시키는 실수 p의 개수는 2이고 합은 S이다.
> (나) $\lim_{x\to q}g(x)$의 값이 존재하지 않는 q가 존재한다.

x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 $2S$일 때, $g(4)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
모든 항이 정수이고 두 상수 M, m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값과 최솟값의 곱은? [4점]

> (다) $a_2+a_4=5M+4m$
> (라) 모든 자연수 n에 대하여
> $(a_{n+1}-|a_n|+2)(a_{n+1}-3a_n)=0$
> 이다.

① -25 ② -16 ③ -9 ④ -4 ⑤ -1

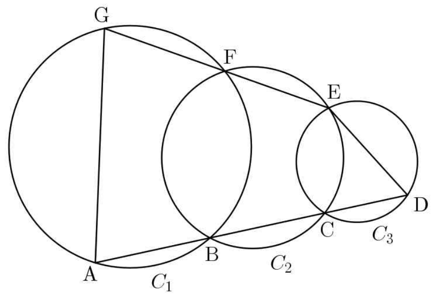
13. 모든 항이 0이 아닌 실수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_3+a_5=0$이 되도록 하는 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

(가) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1}=\frac{{a_n}^2-|a_n|\times a_n}{2}-(|a_n|+a_n)+\frac{|a_n|+a_n}{2a_n}$$
이다.
(나) $a_1\times a_2>0$

한편, 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$$\{g(x)-x\}\left\{g(x)-\frac{f(x)}{x}\right\}=0$$
을 만족시킨다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 두 상수 M, m에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(다) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=8m$
(라) $\lim_{x\to 10M}\frac{g(x)-g(10M)}{x-10M}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$g(-1)=3$일 때, $g(4)$의 최댓값을 S, $g(2)$의 최솟값을 s라 하자. 또한, 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2, r_3인 세 원 C_1, C_2, C_3가 있다. 세 원 위의 점 A, B, C, D, E, F, G에 대하여 네 점 A, B, C, D와 세 점 E, F, G가 각각 한 직선 위에 있다.
$$r_1:r_2:r_3=4:3:2,\ \overline{\text{AG}}=S,\ \overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}=\overline{\text{DE}}=s$$
일 때, 선분 CE의 길이는? (단, 두 원 C_1, C_2의 교점은 B, F이고 두 원 C_2, C_3의 교점은 C, E이다.) [4점]



① $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$
④ $\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

14. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(1)=1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수
$$g(x)=\int_1^x(|f(t)-t|-|t-1|)dt$$
가 다음 조건 (가), (나)를 만족시킨다.

(가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=\alpha$ $(\alpha>5)$에서 극값을 갖는다.

상수 $k(k>0)$에 대하여 곡선 $y=\cos\frac{\pi x}{k}$ 위의 제1사분면의 점 A와 제4사분면의 점 B가 있다. 점 A의 x좌표는 $\frac{k}{2}$보다 작은 값이고 점 B의 x좌표는 k보다 크고 $\frac{3k}{2}$보다 작은 값이다. 점 $\text{C}(-k,0)$라 할 때, 직선 AC의 기울기와 직선 OB의 기울기의 절댓값이 같고 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{k}$이다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이가 $|f(-1)|$이고 상수 k는 조건 (라)를 만족시킨다. 또한, 곡선 $y=2^x$ 위에 서로 다른 두 점 D, E가 있다. 점 D를 직선 $y=x$에 대칭이동한 점을 P라 하고 점 E를 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 두 점 D, E를 x축에 대칭이동한 점을 D′, E′라 할 때, 여섯 개의 점 D, E, D′, E′, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(다) 두 직선 DE, D′E′의 기울기 곱은 $-\frac{49}{9}$이다.
(라) (직선 EQ의 y절편)$-$(직선 DP의 x절편)$=k-2$

선분 D′E의 길이는? [4점]

① $\sqrt{86}$ ② $\sqrt{87}$ ③ $2\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{89}$ ⑤ $\sqrt{90}$

15. 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\left|1-2^{x+1}\right| & (x \le p \text{ 또는 } x \ge q)\\ \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & (p<x<q)\end{cases}$$

일 때, 두 실수 p, q $(p<q)$와 이차함수 $k(x)=-x^2+4x$ 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}k(x) & (x \ge 0)\\ (q-p)\times k(x+4)+8 & (x<0)\end{cases}$$

이다. 2보다 큰 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le g'(r)(x-r)+g(r)$$

을 만족시키는 실수 r의 범위가 $r \le -1$ 또는 $r \ge t$일 때, 삼차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $i(x)$가

$$i(x)=\begin{cases}-2h(x) & (x<0)\\ |h(x)|-\left|27-x^3\right| & (x \ge 0)\end{cases}$$

일 때, t가 아닌 양수 α에 대하여 함수 $i(x)$는 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다. α의 값은? [4점]

① $\dfrac{2+9\sqrt{5}}{22}$ ② $\dfrac{3+9\sqrt{5}}{22}$ ③ $\dfrac{4+9\sqrt{5}}{22}$

④ $\dfrac{3+10\sqrt{5}}{22}$ ⑤ $\dfrac{3+11\sqrt{5}}{22}$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x+2)=\log_3(4x-7)-1$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. $3\log_3 18+\log_{\frac{1}{9}} 64$의 값을 구하시오. [3점]

19. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$3a_1+a_9=8,\ a_3+a_4=7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

20. 세 양수 a, b, c와 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=a$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_2^x \{f(t)-f(x)\}dt$$

가 $x=0$에서 유일한 극값 a를 갖는다.
또한, 곡선 $y=2^{1-x}+b$ 위의 점 A를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 B라 할 때, 점 B는 곡선 $y=2^{1-x}+b$위의 점이다. 점 P$(1,\ -2)$에 대하여 두 삼각형 OPA, OPB의 넓이가 모두 $\frac{a}{2}$이다.
한편, $A\subset B$인 두 집합 A, B가

$$A=\left\{x\,\middle|\,\cos(c\sin x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\sin x\right)\right\},$$

$B=\{x\,|\,0\le x\le 2\pi\}$

이고 집합 A의 모든 원소의 합이 $\frac{(3a+1)\pi}{b}$일 때, $c=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점, k는 상수이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 닫힌구간 $[0, 6]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2(x-3) & (0 \le x < 3) \\ -x^2+9x-18 & (3 \le x \le 6) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 6$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합을 α라 할 때, 상수 α와 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2+1$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 $\dfrac{\alpha}{10}$이다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{\dfrac{\alpha}{4}}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\sqrt{x-1}$와 만나는 점의 개수가 2일 때의 두 점의 x좌표 중 큰 값을, 또는 만나는 점의 개수가 1일 때의 x좌표를 x_n이라 할 때, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$(x_1-x_3)k^2+4x_1k \le g(k-1)-g(k) \le k+\frac{x_2+x_4+x_6}{4}$$

를 만족시킨다. $g'\left(-\dfrac{\alpha}{20}\right)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 A_n의 x좌표가 점 B_n의 x좌표보다 작고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=-1$이고 $f(x)$의 모든 항의 계수는 정수이다.
>
> (나) 모든 실수 t에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to t}\frac{f(3x-2)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

모든 삼차함수 $f(x)$ 중 $f(3)$의 값이 최소인 함수를 $f_1(x)$, $f(3)$의 값이 최대인 함수를 $f_2(x)$라 할 때, 곡선 $y=f_1(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f_2(x)$이고 $g(g(x))=2x$이다.

$g\left(\dfrac{26}{k^3-3k^2+2k}\right)=\alpha$일 때, 사차함수 $h(x)$에 대하여 함수

$$k(x)=\begin{cases} h(x) & (x<0) \\ -x^2+\dfrac{\alpha}{3}x & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (다) 함수 $k(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (라) x에 대한 방정식 $k'(x)\times k'(x-2)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$k(\alpha-7)=-\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, α는 상수이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 『**선택과목(미적분)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{3x}$의 값은? [2점]

① e^3 ② e^6 ③ e^9 ④ e^{12} ⑤ e^{15}

24. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-6x)}{e^{3x}-1}$의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

25. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>1$, $f'(x)>0$인 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고 모든 실수 x에 대하여

$$(\ln f(x))^2-\ln f(2x)-\ln(x+e^2)=0$$

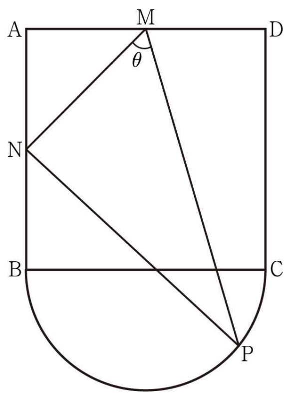
을 만족시킬 때, 그림과 같이 한 변의 길이가 $g'(f(0))$인 정사각형 ABCD가 있다. 변 AD와 변 AB의 중점을 각각 M, N이라 하고 변 BC를 지름으로 하는 반 원 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{NMP}=\theta$라 하자. 삼각형 MNP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다.

구간 $(0, (p+q)\pi)$의 두 양수 a, b에 대하여 함수

$h(x)=\cos(a\sin x+b)$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최댓값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

(가) 방정식 $h'(x)=a$의 해가 존재한다.
(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\cos x\,dx=-\frac{2}{a}$



① 6π ② $\frac{13\pi}{2}$ ③ 7π ④ $\frac{15\pi}{2}$ ⑤ 8π

26. 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{\pi}\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$$

이다. 상수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{e^{x-a}} & (x\geq a)\\ (x-a+2)^2 & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 양수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 하자.

함수 $h(x)=\int_0^x (s+a)^2(s-a)^2 ds$와 두 상수 α, $\beta(\beta>0)$에 대하여 함수

$$k(x)=\begin{cases}h(x) & (x\geq\alpha)\\ -h(x-\beta) & (x<\alpha)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능 할 때,

$\lim_{t\to(\alpha+\beta-a)+} g(t)\times g'(f(\beta))$의 값은? [3점]

① $5e$ ② $5e^2$ ③ $5e^3$ ④ $5e^4$ ⑤ $5e^5$

27. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 할 때, 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n(n+2m)}$$

을 만족시키고 함수 $f(x)$는 $f'(1) = \frac{4}{3}a_1 - \frac{\pi}{2}$, $f(0) = 12a_2$이고 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = xf'(x^2) + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 3\int_0^1 xf'(x^2)dx + 3$$

를 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $i(x)$에 대하여 $i(0)$의 최댓값을 $h(k)$라 할 때, $h(-3) \times h(2)$의 값은? [3점]

> 모든 양의 실수 x에 대하여 $i'(x) = k - f(1)x$이고
> $i(x) \le k - f(1)x$이다.

① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

28. 두 정수 α, β $(\alpha > \beta)$에 대하여 모든 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$인 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n + b_n i = (\alpha + i\beta) \times i^{n-1}$$
> 이고, $a_1 \times a_3 \times b_5 \times b_7 = 9$이다. (단, $i = \sqrt{-1}$)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 등비수열 $\{c_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})}{\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)} = \frac{b_{4n-2}}{a_{4n}}$$

이다. c_1의 값이 최소일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} = k$이다.

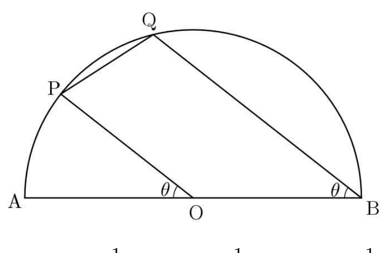
한편, 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 그림과 같이 길이가 $g(1) \times e$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $$e^{3f(x)} - ke^{2f(x)} + ke^{f(x)} + g(x) = \frac{x+1}{e^x} + 1$$
> 이다.
> (다) $f(-2)f(2) < 0$

반원의 호 AB위의 두 점 P, Q가 반원의 중심 O에 대하여

$$\angle \mathrm{POA} = \angle \mathrm{QBO} = \theta$$

일 때, 사각형 OPQB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{BQ}}^2 = \frac{56}{25}$이 되도록 하는 θ의 값을 p라 할 때, $S'(p)$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{100}$　② $\frac{1}{75}$　③ $\frac{1}{50}$　④ $\frac{1}{25}$　⑤ $\frac{1}{5}$

단답형

29. $f(0)=f''(0)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+2}$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 모든 실수 k에 대하여

$$\lim_{t\to k+}h(t)+\lim_{t\to k-}h(t)=2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값을 M이라 하자. 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2a_n+a_{2n}}{a_{n+1}+2a_n}=\frac{64}{5}$$

을 만족시킬 때, 집합 $A=\left\{n \,\middle|\, n\text{는 } a_n \text{ 중 } \frac{M+2}{2}\text{ 이하의 자연수}\right\}$의 원소의 개수가 3이상이다.

집합 A의 원소 중 최솟값을 m이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이

열린구간 $(0, m)$에서 $\cos\left(\frac{\pi}{b_n}x\right)+1=0$을 만족시키는 x의 개수는 $3n$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{M\times m}{nb_n}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다. (나) $f''(2)=2$

양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g'(2)=\alpha$일 때, 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_n)=\alpha^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}-a_n)=-2\alpha$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)\times a_{m+k}\right\}>\frac{3}{20}$$

을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 β라 할 때, 두 상수 a, b $(b>0)$에 대하여 함수 $h(x)=\cos(ax+\sin(x+b))$가

$$h(0)=\frac{\alpha}{4},\quad h(\pi)=a\pi-\frac{2\pi}{\beta}$$

을 만족시킨다. $ab=2\pi$일 때, 열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $h(x)$가 극대가 되는 모든 x값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 γ라 할 때, $\alpha\times\beta\times\gamma=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 풀지마세요 모의고사

공통과목

1	⑤	2	①	3	②	4	②	5	③
6	④	7	④	8	⑤	9	③	10	④
11	③	12	②	13	⑤	14	⑤	15	②
16	13	17	4	18	6	19	14	20	11
21	9	22	11						

미적분

23	③	24	⑤	25	②	26	③	27	①
28	③	29	96	30	67				

랑데뷰 자료실이 개설되었습니다. [강사용]

월정액 : 3~5만원

자료 파일 : 한글파일

자료 내용 : 수학 자작 문항 [출판을 제외한 자유롭게 사용가능]

배포 형태 : 매주 일요일 자료실에 일정량의 자작 문항 업로드

자료실 특징 : 카톡 비공개 오픈 방 [신분 노출 없고 대화 진행되지 않는 방]

자료 종류 :
① R-10 → [8~14번, 19,20,21번 으로 10문항 있는 모의고사 : 중상위권 대상]
② R-15 → [쉬운4점 15문제로 구성된 모의고사 : 중하위권 대상]
③ 9모 대비 모의고사 [고1/고2/고3]
④ 시중 심화 문제집 주요문항 리빌드 [공통수학1/공통수학2/대수/미적분1]
⑤ 평가원/교육청/사설 모고 주요 문항 리빌드
⑥ 내년부터 R-20, R-30, 수특변형 등 랑데뷰메인 콘텐츠 업로드 될 예정

문의 : 카톡 hbb100, 010-5673-8601(문자)

랑데뷰 공개(무료) 자료실도 오픈하였습니다.

⇨
https://open.kakao.com/o/g16IFWSh

2026년 랑데뷰수학 콘텐츠

1. 학년별 R 시리즈 (R8, R12, R16)

① 중3 R8 : 중3 과정의 중상 6문항 + 고난도 2문항

② 고1 R12 : 고1 과정의 중상 10문항 + 고난도 2문항

③ 고2 R16 : 고2 과정의 중상 14문항 + 고난도 2문항

주로 내신 심화 대비용
내신 및 모의고사 시험 범위에 맞춰서 구성됨

2. 고3 R 시리즈 및 모의고사

① 숏 모의고사 : 수능의 준킬러 문항(객관식 8~12번, 단답형 18~20번) 대비용

② R-10 : 중상위권 학생들을 위한 준킬러(8~14, 19~21번) 10문항 모의고사

③ R-15 : 중하위권 학생들을 위한 '쉬운 4점' 15문항 모의고사

④ R-20 : 공통 (3점 7개, 4점 8개) + 선택 (3점 3개, 4점 2개) 구성의 실전 모의고사

수학 영역 (정답&풀이)

Q1 :내년 콘텐츠가 여러 학년으로 제작되는데 학년별로 자료실방은 따로 운영되나요?
→ 네 학년별로 따로 운영될 수도 있지만 그건 신규 선생님들에 해당 되고 현재 선생님들과 올해 안에 유료 자료실에 합류하시는 선생님들은 모든 자료 현재 자료실에 다운 받으실 수 있습니다. 또한 자료를 나스나 네이버박스에 업로드 시켜 놓을 예정이라 자료실방에서 다운 받지 않으셔도 됩니다. 나스에 올릴 때는 파일별로 나눠서 분류해 둘 예정입니다.
월정액도 변함없습니다.

Q2 : 시즌 시작은 어떻게 되나요?
→ 2026년도 콘텐츠는 2025년 12월부터 2026년 11월까지입니다.
한 달 정도 텀을 두고 자료를 사용하시길 권장드립니다!
예를 들어 2025년 12월의 자료는 2026년 1월에 사용
한 달 동안 검토를 좀 더 면밀히 진행할 예정입니다.
물론 검토 완료된 파일을 올려서 당월에 사용하셔도 됩니다만 바쁘시지 않으면 한 달 뒤 사용하는게 안전합니다.

Q3 : 월정액을 3개월 또는 6개월 또는 9개월 또는 12개월 등 일시불로 납부가능한지 또 일시불하면 할인 되나요?
→ 일시불 가능합니다.
할인은 안되고 일시불 납부하시는 선생님들께는 고3 모고 8,19번,9번,10번 난이도로 구성된 “랑데뷰 디노버”(총4권 : 3개월 단위로 한권씩 선물) 교재 한글파일 선물로 드릴 예정입니다.
“랑데뷰 디노버“ 는 ”랑데뷰 기출 분석서“ [12~30번문항 분석]에서 제외된 평가원 기출 문항들 8&19, 9,10,11번과 그 변형문제들로 구성된 교재로 수능 준비를 시작하는 학생에게 첫 교재로 심플하고 안성맞춤이라고 생각합니다.
[올해 평가원 (6,9,수능) 문제 탑재되고 프로모션으로 판매될 예정]

Q4 : 자료실 자료를 재편집해서 교재로 만들어서 ISBN 받아서 학원생들에게 판매해도 되나요?
→ 네 가능합니다.
”출판 제외하고 마음대로 사용하셔도 된다.”의 출판은 전국 서점에 책이 배치되는 출판사를 통한 출판을 의미합니다. 그것만 아니면 상관없습니다. 저작권은 황보 백 선생에게 있는 문제입니다만 황보 백 선생이 저작권 소송을 걸지 않는 한 (구매가 아닌 공유 받아 사용하지 않는 한) 아무 문제 없습니다.
그리고 많은 프로모션의 문항들을 구매하시는 선생님들께는 교재 판매를 통한 원금회복을 넘어 수익 창조 강추합니다. (공유는 비추ㅠ)

Q5 : ISBN은 어떻게 받나요?
→ 저도 잘 모르지만 출판사 등록하면 온라인을 통해 쉽게 받을 수 있을 겁니다.
또는 교재 제본업체나 판매하는 서점에 가격만 얘기해 주시면 알아서 발급해 줄 겁니다.

랑데뷰 풀지마세요 모의고사

공통과목

〔출제자 : 황보백 송원학원
010-5673-8601〕

1) 정답 ⑤

$\dfrac{3^{\sqrt{5}+2}}{3^{\sqrt{5}-2}}=3^4=81$

2) 정답 ①

$3^{-\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}=3^{-\frac{1}{2}}\times(3^{-2})^{\frac{3}{4}}$

$=3^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{3}{2}}$

$=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

3) 정답 ②

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\times4^{\frac{3}{8}}=2^{-\frac{1}{4}}\times2^{\frac{3}{4}}$

$=2^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2}$

4) 정답 ②

$2^{\sqrt{24}+1}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{6}+1}=2^{2\sqrt{6}+1}\times2^{-2(\sqrt{6}+1)}$

$=2^{2\sqrt{6}+1-2(\sqrt{6}+1)}$

$=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

5) 정답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-4x-6$에서

$f'(x)=3x^2+4x-4$

한편, $f(2)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

따라서

$f'(2)=12+8-4=16$

6) 정답 ④

$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=\int_{-3}^{3}(4x^3+ax^2+1)\,dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{3}(ax^2+1)\,dx$

$=2\left[\dfrac{1}{3}ax^3+x\right]_0^3$

$=2\{(9a+3)-(0+0)\}$

$=24$

따라서 $18a+6=24$, $a=1$

$f(x)=4x^3+x^2+1$이므로 $f(1)=4+1+1=6$

7) 정답 ④

함수 $f(x)=\dfrac{1}{27}x^3+5x$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{1}{9}x^2+5$

이므로 구하는 값은

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=6$

8) 정답 ⑤

$f(x)=2x^3+x-2$에서

$f'(x)=6x^2+1$

따라서 $f'(1)=7$

9) 정답 ③

[그림 : 최성훈T]

[그림 : 배용제T]

$f(0)=f(p)=f'(p)=0$에서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x(x-p)^2$이다.

$\therefore$ $\mathrm{R}(p,\,0)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{OS}}=4$, $\overline{\mathrm{QS}}=2$이다.

따라서 $\mathrm{Q}(4,\,2)$

$f(4)=2$ $\to$ $f(4)=\dfrac{1}{2}\times4\times(4-p)^2=2$

$(4-p)^2=1$에서 $p=3$이다. ($\because$ $0<p<4$)

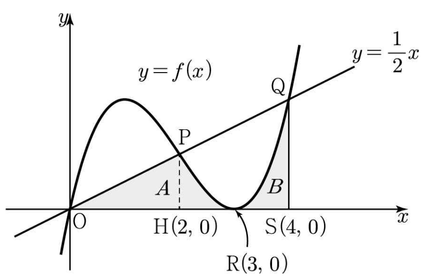
$f(x)=\dfrac{1}{2}x(x-3)^2$이고 $f(x)=\dfrac{1}{2}x$에서

$\dfrac{1}{2}x(x-3)^2=\dfrac{1}{2}x$

$(x-3)^2=1$

$x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore$ $\mathrm{P}(2,\,1)$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$A=\triangle\mathrm{OPH}+\int_{2}^{3}f(x)dx$$

$$B=\int_{3}^{4}f(x)dx$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}A+B&=\frac{1}{2}\times2\times1+\int_{2}^{4}f(x)dx\\&=1+\int_{2}^{4}\frac{1}{2}x(x-3)^2dx\\&=1+\frac{1}{2}\int_{2}^{4}(x^3-6x^2+9x)dx\\&=1+\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_2^4\\&=1+\frac{1}{2}\left(\frac{256-16}{4}-2(64-8)+\frac{9(16-4)}{2}\right)\\&=1+\frac{1}{2}(60-112+54)\\&=1+1=2\end{aligned}$$

이다.

$$\lim_{x\to k}\frac{(g(x))^2-(g(k))^2}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k}\left\{\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times(g(x)+g(k))\right\}$$

$=2g'(k)g(k)$ …… ㉠

따라서 $\lim_{x\to k}\frac{t|x|g(x)-(g(k))^2}{x-k}=2g'(k)g(k)$이다.

$x\to k$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to k}\frac{t|x|g(x)-(g(k))^2}{x-k}$ 의 (분자)에서 $x=k$일 때,

$t|k|g(k)-(g(k))^2=0$

$g(k)(t|k|-g(x))=0$

$g(x)\neq0$ ($\because g(k)\geq A+B=2$)이므로 $g(k)=t|k|$만족시키는 k의 값이 t, $-t$뿐이므로

$g(t)=t^2$, $g(t)=-t^2$ 이다.…… ㉡

또한

$$\lim_{x\to k}\frac{t|x|g(x)-(g(k))^2}{x-k}$$

에서 $l(x)=t|x|f(x)$라 하면 $x\to t$일 때, $l(x)=txf(x)$이고

$l(t)=t^2f(t)=t^4$이므로 $k=t$라 하면

$$=\lim_{x\to t}\frac{t|x|g(x)-t^4}{x-t}$$

$$=\lim_{x\to t}\frac{l(x)-l(t)}{x-t}$$

$=l'(t)$

$=tg(t)+t^2g'(t)$ ($\because l'(x)=tg(x)+txg'(x)$)

$=t^3+t^2g'(t)$

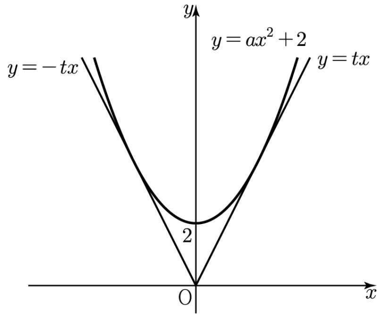
㉠에서 $2g'(k)g(k)=2g'(t)(t^2)=2t^2g'(t)$

$2t^2g'(t)=t^3+t^2g'(t)$

$g'(t)=t$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=tx$에 $x=t$에서 접하고 $y=-tx$에 $x=-t$에서 접해야 한다. …… ㉣

따라서 $g(x)$는 y축 대칭함수이다.



즉, $g(x)=ax^2+2$이다.

㉣에서 $f(x)-tx=a(x-t)^2$

$g(x)=a(x-t)^2+tx=ax^2+(1-2a)tx+at^2$

$1-2a=0$, $at^2=2$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $t=2$이다.

$g(x)=\frac{1}{2}x^2+2$이므로 $g(t)=g(2)=\frac{1}{2}\times4+2=4$이다.

[랑데뷰팁]

㉡에서 이차함수 $f(x)$는 y축 대칭이므로 $f(x)=ax^2+2$라 할 수 있고 $f(x)=t|x|$를 만족시키는 x의 값의 개수가 2이므로 (t,t^2)에서 직선 $y=tx$에 접한다는 것을 알 수 있다.

따라서

$$h(x)=\begin{cases}4-2^x & (x<1)\\ \log_2(a-x) & (1\leq x<a)\end{cases}$$

$x<1$일 때, $h(x)=4-2^x$의 그래프는 점금선이 $y=4$이고 감소하는 그래프이다. $1\leq x<a$에서 $h(x)=\log_2(a-x)$의 그래프도 감수하므로 함수 $h(x)$가 최댓값을 갖기 위해서는 $h(1)=\log_2(a-1)\geq4$이어야 한다.

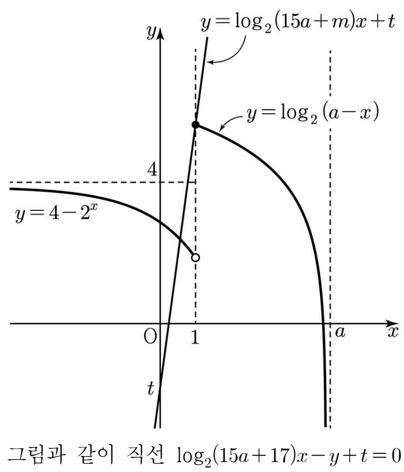
$a-1\geq16$

$\therefore\ a\geq17$

따라서 $m=17$

$\log_2(15a+17)x-y+t=0\ \rightarrow\ y=\log_2(15a+17)x+t$

직선 $\log_2(15a+17)x-y+t=0$은 기울기가 양수 $\log_2(15+17)$이고 y절편이 t이다.



그림과 같이 직선 $\log_2(15a+17)x-y+t=0$이 함수 $y=h(x)$의

그래프와 두 점에서 만나기 위해 t의 최댓값 $t=-4$는 직선 $\log_2(15a+17)x-y+t=0$이 $(1, \log_2(a-1))$을 지날 때 나타난다.

$\log_2(15a+17)-\log_2(a-1)-4=0$

$\log_2\dfrac{15a+17}{a-1}=4$

$\dfrac{15a+17}{a-1}=16$

$15a+17=16a-16$

$\therefore\ a=33$

10) 정답 ④

[그림 : 도정영T]

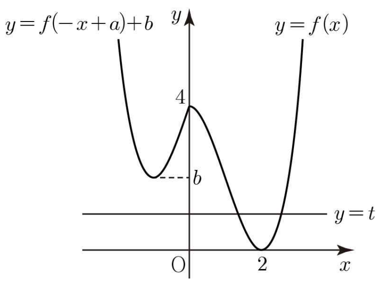
$x \geq 0$일 때, 함수 $g(x)=(x+1)(x-2)^2$는 $x=2$에서 극솟값이자 최솟값인 0을 갖는 그래프이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)\ \rightarrow\ f(a)+b=4$ …… ㉠

곡선 $y=f(-x+a)+b$는 곡선 $y=f(x)$를 y축 대칭이동한 뒤 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 곡선이다.

따라서 $x<0$에서 함수 $g(x)$도 극솟값을 가지므로 그래프 개형은 그림과 같다.



함수 $h(t)$가 $t=0$, $t=2$, $t=4$에서 불연속이므로 $x<0$에서 함수 $g(x)$의 극솟값은 2이어야 하고 극댓값은 존재하지 않아야 한다. …… ㉡

따라서 $0<a<2$이고 $b=2$이다. …… ㉢

㉠에서 $f(a)=2$

$(a+1)(a-2)^2=2$

$(a+1)(a^2-4a+4)=2$

$a^3-3a^2+2=0$

$(a-1)(a^2-2a-2)=0$

$a=1$ 또는 $a=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1$ ($\because$ ㉢)

$$g(x)=\begin{cases} f(-x+1)+2 & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $g(-2)=f(3)+2=4+2=6$이다.

[랑데뷰팁]-㉡설명

$x<0$에서 극댓값 M이 존재하면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위해서는 그래프 개형에서 $M>4$이므로 함수 $h(t)$는 $t=0$, 2, M에서 불연속이 되어 모순이다.

따라서 $a_7=g(-2)+ab=6+2=8$이다.

(나)에서 네 항 a_3, a_4, a_5, a_6 중 짝수인 항의 개수는 1이하이므로 다음과 같은 경우로 나눠서 구할 수 있다.

(i) 네 항 a_3, a_4, a_5, a_6 이 모두 홀수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	홀	홀	홀	8

a_3과 a_4이 홀수이면 $a_5=a_3+a_4$의 값은 짝수이어야 하므로 모순이다.

(ii) a_3이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
짝	홀	홀	홀	8

a_4과 a_5가 홀수이면 $a_6=a_4+a_5$의 값은 짝수이어야 하므로 모순이다.

(iii) a_4이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	짝	홀	홀	8
④ $8-3m$	① $2m$ (m은 홀수)	③ $8-m$	② m	8

④에서 a_3이 자연수이므로 가능한 홀수 m의 값은 1뿐이다.

따라서

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
② 1 10	① 4	5	2	7	1	8

그러므로 $a_1=1$ 또는 $a_1=10$

(iv) a_5이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	홀	짝	홀	8
		16		8

a_5가 $g(-2)+ab=8$보다 큰 짝수이므로 모순이다.

(v) a_6이 짝수일 때,

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
홀	홀	홀	짝	8

a_6가 짝수이면 $a_7=a_5+a_6$에서 홀수가 되어야 하는데 8로 모순이다.

(i)~(v)에서 a_1의 최솟값 $m=1$이다.

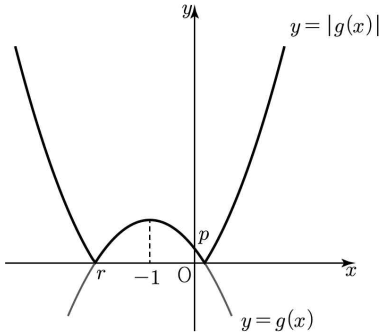
따라서 $h(x)=-x^2-2x+p$이다.

함수 $k(x)$는 함수 $|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점에서만 미분가능하지 않는다.

함수 $|h(x)|$가 미분가능하지 않는 점의 x좌표는 이차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 두 실근이다. …… ㉠

따라서 이차함수 $h(x)$는 이차항의 계수가 음수이고 축의 방정식이 $x=-1$이고 함수 $|h(x)|$가 $x=r$ $(r<0)$에서만

미분가능하지 않으므로 y절편 p는 양수이어야 한다.



$$|h(x)|=\begin{cases} x^2+2x-p & (|h(x)|<0 \cap x \le 0) \\ -x^2-2x+p & (|h(x)| \ge 0 \cap x \le 0) \end{cases}$$

에서 방정식 $h(x)=0$의 음수근이 r이므로

$$|h(x)|=\begin{cases} x^2+2x-p & (x<r) \\ -x^2-2x+p & (r \le x \le 0) \end{cases}$$

이므로

$$k(x)=\begin{cases} 2x^2+2x-p & (x<r) \\ -2x+p & (r \le x \le 0) \\ q\{h(x)\}^2+qx & (x>0) \end{cases}$$

이다.

$$k'(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<r) \\ -2 & (r<x<0) \\ 2qh(x)h'(x)+q & (x>0) \end{cases}$$

에서 함수 $k(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$h(x)=-x^2-2x+p \rightarrow h(0)=p$

$h'(x)=-2x-2 \rightarrow h'(0)=-2$

에서

$x=0$에서 연속 $\rightarrow p=q\{h(0)\}^2 \rightarrow p=q\times p^2 \rightarrow \therefore\ pq=1$

$x=0$에서 미분가능 $\rightarrow -2=2q\times p\times(-2)+q \rightarrow \therefore\ q=2$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$

$h(x)=-x^2-2x+\dfrac{1}{2}$이므로 ㉠에서 방정식 $-x^2-2x+\dfrac{1}{2}=0$의 두 실근 중 음의 실근이 r이다.

$2x^2+4x-1=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$에서 $r=-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다.

따라서

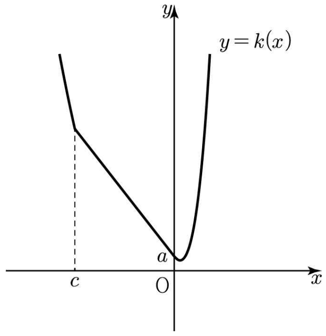
$$p+q+r=\frac{1}{2}+2-1-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

이다.

[랑데뷰팁]

$\left[\{h(x)\}^2\right]'=\{h(x)\times h(x)\}'=h'(x)h(x)+h(x)h'(x)=2h(x)h'(x)$

이고 함수 $k(x)=\begin{cases} 2x^2+2x-\dfrac{1}{2} & \left(x<-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \\ -2x+\dfrac{1}{2} & \left(-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \le x \le 0\right) \\ 2\{h(x)\}^2+2x & (x>0) \end{cases}$의 그래프는 그림과 같다.



11) 정답 ③

$g(x)=\displaystyle\int_p^x f(t)dt$에서 $g(p)=0$, $g'(x)=f(x)$이다.

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{4}$이고 최솟값이 -4인 사차함수이다.

$$h(x)=\frac{|g(x)-g(1)|}{|x|-1}=\begin{cases} \dfrac{|g(x)-g(1)|}{x-1} & (x \ge 0) \\ \dfrac{|g(x)-g(1)|}{-x-1} & (x<0) \end{cases}$$

이고 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위해서는

$\displaystyle\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$이어야 한다.

$g(x)-g(1)=(x-1)i(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1-}\frac{|g(x)-g(1)|}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)i(x)|}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|x-1||i(x)|}{x-1}=-|i(1)|$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{|g(x)-g(1)|}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)i(x)|}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|x-1||i(x)|}{x-1}=|i(i)|$$

$-|i(1)|=|i(1)|$이므로 $i(1)=0$이다.

따라서 함수 $g(x)-g(1)$은 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

(ii) 함수 $h(x)$가 $x=-1$에서 연속이기 위해서는

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}h(x)=\lim_{x\to-1+}h(x)$이어야 한다.

$g(x)-g(1)=(x+1)j(x)$라 하면

$$\lim_{x\to-1-}\frac{|g(x)-g(1)|}{-x-1}$$

$= \lim_{x\to -1-}\frac{|(x+1)j(x)|}{-x-1} = \lim_{x\to -1-}\frac{|x+1||j(x)|}{-x-1} = |(j(-1))|$

$\lim_{x\to -1+}\frac{|g(x)-g(1)|}{-x-1}$

$= \lim_{x\to -1+}\frac{|(x+1)j(x)|}{x-1} = \lim_{x\to -1+}\frac{|x+1||j(x)|}{-x-1} = -|(j(-1))|$

$|j(-1)| = -|j(-1)|$이므로 $j(-1)=0$이다.

따라서 함수 $g(x)-g(1)$은 $(x+1)^2$을 인수로 가진다.

(i), (ii)에서 $g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)^2+g(1)$이다.

함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(-1)=g(1)$이므로 $g(1)=-4$이다.

$g(x)=\frac{(x^2-1)^2}{4}-4$

$g(p)=0 \to (p^2-1)^2=16 \to p^2=5$

$g'(x)=f(x)=x^3-x$

이므로 $f(p^2)=f(5)=125-5=120$이다.

따라서

$$k(x)=\begin{cases} 2\log_a(x+b)-b & (-b<x\le 0) \\ a^{\frac{x}{2}} & (x>0) \end{cases}$$

이다.

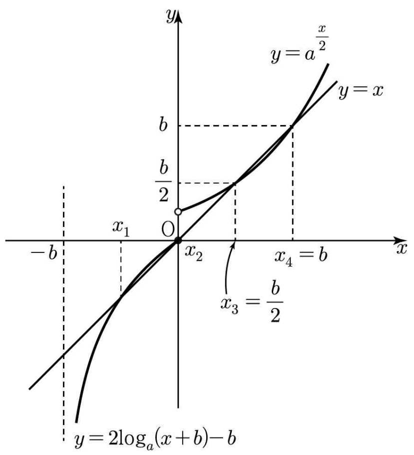
함수 $y=a^{\frac{x}{2}}$의 역함수는 $y=2\log_a x$이고 함수 $y=2\log_a x$를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하면 $y=2\log_a(x+b)-b$이다. …… ㉠

곡선 $y=a^{\frac{x}{2}}$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고 함수 $k(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수가 4이므로

곡선 $y=a^{\frac{x}{2}}$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수는 2이어야 한다.

따라서 $x>0$에서 만나는 점의 x좌표가 x_3, x_4 이고

$k(0)=0$이므로 $x_2=0$이다.



㉠에서 $x_4=b$이고 $x_1=x_3-b$이다.

$x_1+x_3=0 \to 2x_3=b \to \therefore\ x_3=\frac{b}{2}$

$(x_3, x_3) \to \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$가 $y=a^{\frac{x}{2}}$ 위에 있으므로 $\frac{b}{2}=a^{\frac{b}{4}}$ …… ㉡

$(x_4, x_4) \to (b, b)$가 $y=a^{\frac{x}{2}}$ 위에 있으므로 $b=a^{\frac{b}{2}}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$\left(\frac{b}{2}\right)^2=b \to b^2=4b \to b=4\ (\because b>0)$

$b=4$이므로 ㉢에서 $a=2$이다.

$$k(x)=\begin{cases} 2\log_2(x+4)-4 & (-4<x\le 0) \\ 2^{\frac{x}{2}} & (x>0) \end{cases}$$

$k(a)=2$, $k(a+b)=k(6)=2^3=8$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{k(a+b)-p^2}=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$이고

$\sin(\angle\mathrm{ACE})=\frac{1}{k(a)}=\frac{1}{2}$이다. $\angle\mathrm{ACE}>\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{ACE}=\frac{5}{6}\pi$이다.

따라서 $\angle\mathrm{BCE}=\frac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{BDE}=\frac{\pi}{3}$이다.

삼각형 BDE는 정삼각형이다.

이등변삼각형 DCE에서 $\angle\mathrm{CDE}=\frac{2}{3}\pi$, $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}=x$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$3=x^2+x^2-2x^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{CD}}=x=1$

이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=1$이므로 삼각형 ACE에서

$\overline{\mathrm{AE}}^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=1+3+3=7$

따라서 $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{7}$이다.

사각형 BCFE가 원에 내접하므로

$\angle\mathrm{ACF}=\angle\mathrm{AEB}$, $\angle\mathrm{AFC}=\angle\mathrm{ABE}$

따라서 $\triangle\mathrm{ACF}\backsim\triangle\mathrm{AEB}$이고 $\overline{\mathrm{BE}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{BE}} \to 1:\overline{\mathrm{CF}}=\sqrt{7}:1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CF}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

12) 정답 ②

$a^x-k=k(a^{-x}+1)-\frac{1}{2}$

$a^x-2k+\frac{1}{2}-\frac{k}{a^x}=0$

$a^{2x}+\left(-2k+\frac{1}{2}\right)a^x-k=0$

$(a^x-2k)\left(a^x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore\ a^x=2k \to x=\log_a 2k$

A$(\log_a 2k, k)$이고 점 A는 곡선 $y=\frac{a^x}{2}$ 위의 점이기도 하다.

직선 AB의 기울기가 -1이고 곡선 $y=\frac{a^{x-3}}{2}-3$은 곡선

$y=\frac{a^x}{2}$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼

평행이동한 그래프이므로 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 3만큼,

y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{2}$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-(x-\log_a 2k)+k=-x+\log_a 2k+k$

따라서

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-\log_a 2k-k|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\log_a 2k+k}{\sqrt{2}}\ \left(\because k>\dfrac{a}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{AB}}\ \rightarrow\ \dfrac{\log_a 2k+k}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$에서 $\log_a 2k+k=6$이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0,\ x>2) \\ |f(x)| & (0\le x\le 2)\end{cases}$

삼차함수 $f(x)$가 $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이면 $g(x)=f(x)$으로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 (나)에 모순이다.

따라서 $0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)\le 0$인 x가 존재해야 한다.

즉, $f(c)=0\ (0\le c\le 2)$인 c가 존재한다. …… ㉠

(가)에서 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(p+h)-g(p-h)}{h}=g'(p-)+g'(p+)$

이므로

$g'(p-)+g'(p+)=0$

에서 함수 $g(x)$의 $x=p$에서의 좌미분계수와 우미분계수의 합이 0이기 위해서는

함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능할 때, $g'(p)=0$ …… ㉡

이거나

함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않을 때. $g(p)=0$이고 $x=p$의 좌우에서 함수 $g(x)$의 값의 부호가 다르면 된다. …… ㉢

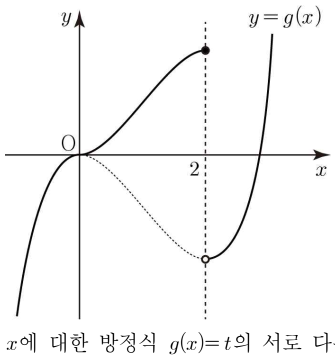
㉡ $\rightarrow$ $f'(p)=0$

㉢ $\rightarrow$ ㉠에서 $p=c$이다.

(가)에서 p의 개수가 2이기 위해서는 $c=0$ 또는 $c=2$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.

따라서 $S=2$이다.

(i) 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,



x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록하는 실수 t의 최댓값이 $2S=4$이므로 $f(2)=-4$이다.

$f(x)=\alpha x^2(x-3)\ (\alpha>0)$

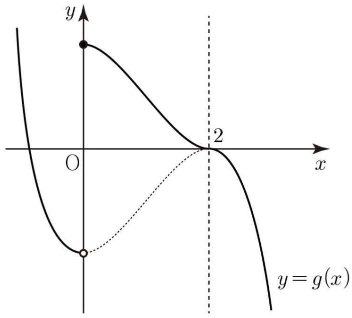
$f(2)=-4\alpha=-4$

$\therefore\ \alpha=1$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)$

$g(4)=f(4)=16$

(ii) 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때,



x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 4이므로 $f(0)=-4$이다.

$f(x)=\beta(x+1)(x-2)^2\ (\beta<0)$

$f(0)=4\beta=-4$

$\therefore\ \beta=-1$

따라서 $f(x)=-(x+1)(x-2)^2$

$g(4)=-20$

(i), (ii)에서 $g(4)$의 최댓값 $M=16$이고 최솟값 $m=-20$이다.

따라서 $5M+4m=0$

(다)에서 $a_2+a_4=5M+4m=0$

(라)에서

$a_{n+1}=|a_n|-2$ 또는 $a_{n+1}=3a_n$

이다.

$a_2=x$라 하면

a_2	a_3	a_4	$a_2+a_4=0\ \rightarrow\ a_4=-a_2$
		$\|\|x\|-2\|-2$	$\|\|x\|-2\|=-x+2$ $-x+2\ge 0\ \rightarrow\ x\le 2$ …… ㉠ 양변 제곱하면 $x^2-4\|x\|+4=x^2-4x+4$ $\|x\|=x\ \rightarrow\ x\ge 0$ …… ㉡ $0\le x\le 2$ $\therefore\ a_2=0$ 또는 1 또는 2
	$\|x\|-2$	$3\|x\|-6$	$3\|x\|-6=-x$ $x\ge 0$일 때, $3x-6=-x$ $x=\dfrac{3}{2}$ $x<0$일 때, $-3x-6=-x$ $x=-3$ $\therefore\ a_2=-3$
x			
	$3x$	$\|3x\|-2$	$\|3x\|=-x+2$ $x\ge 0$일 때, $x=\dfrac{1}{2}$ $x<0$일 때, $x=-1$ $\therefore\ a_2=-1$
		$9x$	$9x=-x\ \rightarrow\ x=0$ $\therefore\ a_2=0$

따라서 a_2의 값은 -3, -1, 0, 1, 2이 가능하다.

$a_2=|a_1|-2$ 또는 $a_2=3a_1$이다.

(i) $a_2=|a_1|-2$에서 $|a_1|=a_2+2$

a_1의 값은 ±1, ±2, ±3, ±4이 가능하다.

(ii) $a_2=3a_1$에서 $a_1=\frac{a_2}{3}$

a_1의 값은 -1, 0이 가능하다.

(i), (ii)에서 a_1의 최솟값은 -4, 최댓값은 4이다.

따라서 $-4\times4=-16$이다.

13) 정답 ⑤

(가)에서

$a_n>0$일 때, $a_{n+1}=-2a_n+1$

$a_n<0$일 때, $a_{n+1}={a_n}^2$

이다.

즉, $a_{n+1}=\begin{cases}{a_n}^2 & (a_n<0)\\ -2a_n+1 & (a_n>0)\end{cases}$ 이다.

(나)에서 $a_1\times a_2>0$이므로

$a_1>0$, $a_2>0$ 또는 $a_1<0$, $a_2<0$이다.

$a_1<0$이면 $a_2={a_1}^2>0$이므로 (나)에 모순이다.

$a_1>0$이면 $a_2=-2a_1+1>0$이다.

$\therefore\ 0<a_1<\frac{1}{2}$

$a_3=-2a_2+1=4a_1-1$

(i) $a_3>0$일 때, 즉, $\frac{1}{4}<a_1<\frac{1}{2}$

a_3	a_4	a_5
a_3	$-2a_3+1$	$(-2a_3+1)^2\ (a_4<0)\to$ ①
		$4a_3-1\ (a_4>0)\to$ ②

① $a_4=-2a_3+1<0\ \to\ a_3>\frac{1}{2}\ \to\ 4a_1-1>\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{3}{8}<a_1<\frac{1}{2}$

$a_3+a_5=$에서 $a_3+(-2a_3+1)^2=0\ \to\ 4{a_3}^2-3a_3+1=0$

$D=9-16<0$에서 실수 a_3의 값이 존재하지 않는다. (모순)

※ $a_3>3$이고 $a_4<0$이면 $a_5>0$이므로 $a_3+a_5>0$이 된다.

② $a_4=-2a_3+1>0\ \to\ a_3<\frac{1}{2}\ \to\ 4a_1-1<\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{4}<a_1<\frac{3}{8}$

$a_3+a_5=0$에서 $a_3+4a_3-1=0\ \to\ a_3=\frac{1}{5}$

$4a_1-1=\frac{1}{5}$에서 $a_1=\frac{3}{10}$

(ii) $a_3<0$일 때, 즉, $0<a_1<\frac{1}{4}$

a_3	a_4	a_5
a_3	${a_3}^2$	$-2{a_3}^2+1$

$a_3+a_5=0$에서 $a_3-2{a_3}^2+1=0\ \to\ 2{a_3}^2-a_3-1=0$

$(2a_3+1)(a_3-1)=0$

$a_3=-\frac{1}{2}\ (\because a_3<0)$

$4a_1-1=-\frac{1}{2}$

$a_1=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 a_1의 최댓값은 $\frac{3}{10}$이고 최솟값은 $\frac{1}{8}$이다.

$10M=3$, $8m=1$

따라서 (다)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1$이므로

사차함수 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로 $f(x)=x^2(ax^2+bx+1)$라 할 수 있다.

따라서 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$라 하면 $h(x)=ax^3+bx^2+x$이다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\{g(x)-x\}\{g(x)-h(x)\}=0$를 만족시키므로 함수 $g(x)$는 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=h(x)$이다.

(라)에서 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$0\le x<3$일 때, $g(x)=x$, $x\ge3$일 때, $g(x)=h(x)$

또는

$0\le x<3$일 때, $g(x)=h(x)$, $x\ge3$일 때, $g(x)=x$

이어야 한다.

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $h(3)=3$이다.

$h(3)=27a+9b+3=3$

$\therefore\ b=-3a$

$h(x)=ax^3-3ax^2+x$

$g(-1)\neq-1$이므로 $x<0$일 때, $g(x)=h(x)$이다.

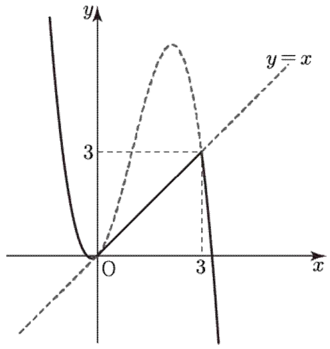
$g(-1)=h(-1)=-a-3a-1=3$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $h(x)=-x^3+3x^2+x$

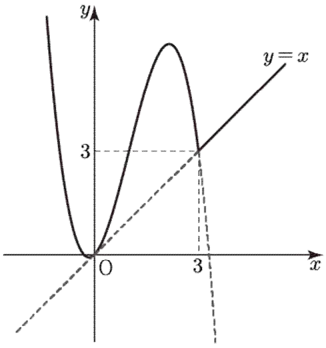
그러므로

$g(x)=\begin{cases}-x^3+3x^2+x & (x<0)\\ x & (0\le x<3)\\ -x^3+3x^2+x & (x\ge3)\end{cases}$ …… ㉠



또는

$g(x)=\begin{cases}-x^3+3x^2+x & (x<3)\\ x & (x\ge3)\end{cases}$ …… ㉡



이다.

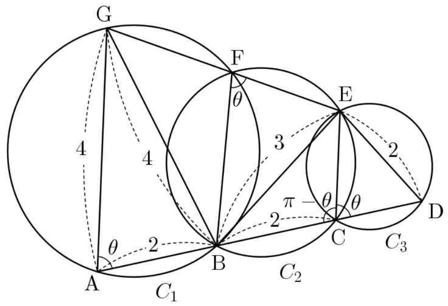
㉠, ㉡에서 $g(4)$의 최댓값은 4이고 $g(2)$의 최솟값은 2이다.

$S=4,\ s=2$

따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=2$이고 $\overline{\mathrm{AG}}=4$이다.

그림과 같이 $\angle\mathrm{DCE}=\theta$라 하면 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합이 π임을 이용하면 $\angle\mathrm{BFE}=\angle\mathrm{BAE}=\theta$이다.



$\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin(\angle\mathrm{DCE})}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2r_3$,

$\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\sin(\angle\mathrm{BCE})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\sin(\pi-\theta)}=2r_2$,

$\dfrac{\overline{\mathrm{BG}}}{\sin(\angle\mathrm{BAG})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BG}}}{\sin\theta}=2r_1$

$r_1:r_2:r_3=4:3:2$에서 $\overline{\mathrm{BE}}=3,\ \overline{\mathrm{BG}}=4$이다.

삼각형 ABG에서 $\overline{\mathrm{AG}}=4,\ \overline{\mathrm{BG}}=4,\ \overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$이다.

삼각형 BCE에서 $\overline{\mathrm{CE}}=x$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$3^2=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$9=4+x^2+x$

$x^2+x-5=0$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

14) 정답 ⑤

$h(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.

$g(x)=\displaystyle\int_0^x(|h(t)|-|t-1|)dt$라 하면

$g'(x)=|h(x)|-|x-1|$이고 $f(1)=1$이므로 $h(1)=0$이다.

따라서 $g'(1)=0$

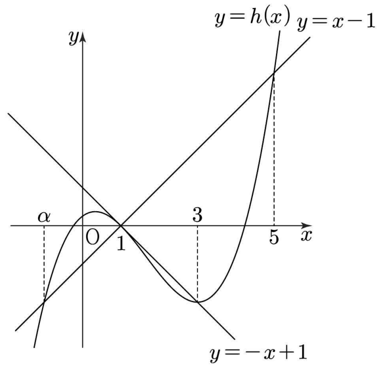
(가)에서 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 4개의 실근 중 하나가 $x=1$이다.

(나)에서 $g'(x)=0$의 실근 중 극값을 갖는 x의 값에 $x=1$이 포함되므로 방정식 $g'(x)=0$은 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

즉, 함수 $|h(x)|-|x-1|$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

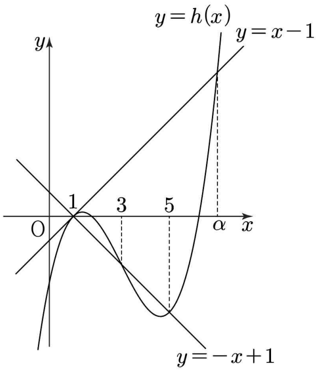
따라서 곡선 $y=h(x)$는 $x=1$에서 직선 $y=-x+1$와 접하거나 $y=x-1$에서 접한다.

(i) 곡선 $y=h(x)$는 $x=1$에서 직선 $y=-x+1$와 접할 때,



$x>1$에서 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $y=x-1,\ y=-x+1$과 만나는 점의 개수가 각각 1개이므로 (나) 조건에 모순이다.

(ii) 곡선 $y=h(x)$는 $x=1$에서 직선 $y=x-1$와 접할 때,



$h(x)-(x-1)=a(x-1)^2(x-\alpha)$

$h(x)=a(x-1)^2(x-\alpha)+x-1$

(나)에서

$g'(3)=0\ \rightarrow\ |h(3)|=2\ \rightarrow\ h(3)=-2$ …… ㉠

$g'(5)=0\ \rightarrow\ |h(5)|=4\ \rightarrow\ h(5)=-4$ …… ㉡

㉠에서 $h(3)=4a(3-\alpha)+2=-2$

$a(3-\alpha)=-1$ …… ㉢

㉡에서 $h(5)=16a(5-\alpha)+4=-4$

$a(5-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\dfrac{3-\alpha}{5-\alpha}=2\ \rightarrow\ 3-\alpha=10-2\alpha$

$\therefore\ \alpha=7$

㉢에 $\alpha=7$을 대입하면 $a=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $h(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)^2(x-7)+x-1$

$f(x)-x=\dfrac{1}{4}(x-1)^2(x-7)+x-1$

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)^2(x-7)+2x-1$

그러므로 $f(-1)=\dfrac{1}{4}\times4\times(-8)-3=-11$

따라서 $|f(-1)|=11$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는 11이다.

점 A와 점 C$(-k,0)$을 지나는 직선의 기울기를 $t(t>0)$라 하면 직선 AC의 방정식은

$y=t(x+k)$

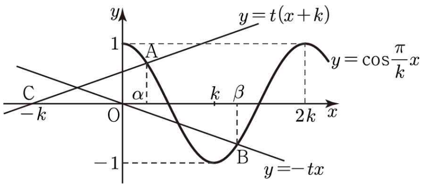
이고 직선 OB의 방정식은 $y=-tx$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$0<\alpha<\dfrac{k}{2}$인 α에 대하여 점 A$(\alpha, t(\alpha+k))$

$k<\beta<\dfrac{3k}{2}$인 β에 대하여 점 B$(\beta, -t\beta)$

이다.



$\cos\dfrac{\pi\alpha}{k}=t(\alpha+k)$ …… ㉤

$\cos\dfrac{\pi\beta}{k}=-t\beta$ …… ㉥

이다.

㉤에서 $\gamma=\alpha+k$라 하면 $k<\gamma<\dfrac{3k}{2}$이고

$\cos\dfrac{\pi(\gamma-k)}{k}=t\gamma \to \cos\left(-\pi+\dfrac{\pi\gamma}{k}\right)=t\gamma \to -\cos\dfrac{\pi\gamma}{k}=t\gamma$

$\to \cos\dfrac{\pi\gamma}{k}=-t\gamma$ …… ㉦

이다.

㉥, ㉦에서 $\beta=\gamma\ \left(\because k<\gamma<\dfrac{3k}{2}\right)$

따라서 $\alpha=\beta-k$

A$(\beta-k, t\beta)$, B$(\beta, -t\beta)$

직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{1}{2k}$이므로

$\dfrac{2t\beta}{-k}=-\dfrac{1}{k} \to t\beta=\dfrac{1}{2}$

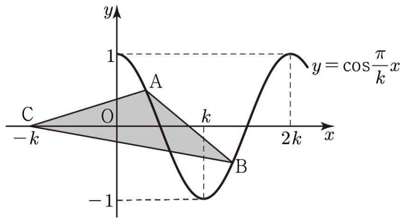
따라서 A$\left(\beta-k, \dfrac{1}{2}\right)$, B$\left(\beta, -\dfrac{1}{2}\right)$

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$에서

두 점 A, B가 함수 $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{k}$의 그래프 위의 점이므로

$\alpha=\dfrac{k}{3}$, $\beta=\dfrac{4k}{3}$이다.

$\therefore$ A$\left(\dfrac{k}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$, B$\left(\dfrac{4k}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$



선분 AB의 중점은 M$\left(\dfrac{5k}{6}, 0\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle$ACM$+\triangle$BCM$=2\triangle$ACM

$=2\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{5k}{6}+k\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{11k}{12}=11$

따라서 $k=12$이다.

두 점 D, E의 x좌표를 각각 a, b라 하면

D$(a, 2^a)$, E$(b, 2^b)$

이고 두 점을 x축에 대칭이동한 점은

D′$(a, -2^a)$, E′$(b, -2^b)$

이므로

직선 DE의 기울기는 $\dfrac{2^b-2^a}{b-a}$이고 직선 D′E′의 기울기는

$\dfrac{-2^b+2^a}{b-a}=-\dfrac{2^b-2^a}{b-a}$이다.

(다)에서 $-\left(\dfrac{2^b-2^a}{b-a}\right)^2=-\dfrac{49}{9}$이다.

따라서 $\left|\dfrac{2^b-2^a}{b-a}\right|=\dfrac{7}{3}$이다. …… ◎

두 직선 DP와 EQ의 기울기는 모두 -1이므로 두 직선의 방정식은 각각 $y=-x+a+2^a$, $y=-x+b+2^b$이다.

직선 EQ의 y절편은 $b+2^b$이고 직선 DP의 x절편은 $a+2^a$이다.

$k=12$이므로

(라)에서 $(b+2^b)-(a+2^a)=k-2=10$

$\therefore\ (b-a)+(2^b-2^a)=10$ …… ㉧

따라서 $b+2^b>a+2^a$이므로 $\dfrac{2^b-2^a}{b-a}>0$이므로 ◎에서

$\dfrac{2^b-2^a}{b-a}=\dfrac{7}{3}$이다. …… ㉨

따라서 ㉧의 양변을 $b-a$로 나누면

$1+\dfrac{7}{3}=\dfrac{10}{b-a}$

$b-a=3$

$\therefore\ b=a+3$

㉨에 대입하면 $2^{a+3}-2^a=7$이다.

$7\times2^a=7$

$2^a=1$

$\therefore\ a=0$, $b=3$

$\therefore$ D′$(0, -1)$, E$(3, 8)$

$\overline{\text{D′E}}=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}$

15) 정답 ②

곡선 $y=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$은 주기가 2이므로 점근선 $x=-1$, $x=1$을 갖고 곡선 $y=\left|1-2^{x+1}\right|$은 $(-1, 0)$, $(0, 1)$을 지난다.

함수 $y=\left|1-2^{x+1}\right|$의 치역은 $\{y\,|\,y \geq 0\}$이고 함수 $y=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$의 치역은 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일이기 위해서는 함수 $f(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이어야 한다.

따라서 $p \leq -1$ …… ㉠

$p<x<q$에서 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일이기 위해서는 함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이어야 한다.

따라서 $p \geq -1$ …… ㉡

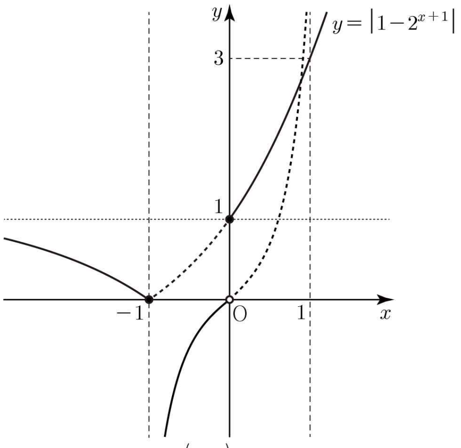
㉠, ㉡에서 $p=-1$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} \left|1-2^{x+1}\right| & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq q) \\ \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) & (-1<x<q) \end{cases}$$

$x<-1$일 때, $f(x)<1$이므로 $x \geq q$일 때, $f(x) \geq 1$이어야 한다.

곡선 $y=\left|1-2^{x+1}\right|$이 $(0, 1)$을 지나고 증가하므로 $q=0$이다.



$y=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

따라서 $q-p=1$이다.

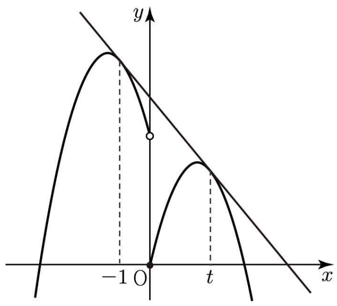
$$\therefore\ g(x)=\begin{cases} -x^2+4x & (x \geq 0) \\ k(x+4)+8 & (x<0) \end{cases}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $(r, g(r))$에서의 접선의 방정식이 $y=g'(r)(x-r)+g(r)$이므로

부등식 $g(x) \leq g'(r)(x-r)+g(r)$을 만족시키는 x범위는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 접선 $y=g'(r)(x-r)+g(r)$의 그래프보다 아래쪽에 위치하는 범위다.

따라서

모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq g'(r)(x-r)+g(r)$을 만족시키는 실수 r의 범위가 $r \leq -1$ 또는 $r \geq t$이려면 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$위의 두 점 $(t, g(t))$, $(-1, g(-1))$에서의 접선이 일치해야 한다.



(i) $x \geq 0$에서

곡선 $y=-x^2+4x$ 위의 점 $(t, -t^2+4t)$에서 접선의 방정식은

$y'=-2x+4 \rightarrow y'=-2t+4$

$y=(-2t+4)(x-t)+(-t^2+4t)=(-2t+4)x+t^2$ …… ㉢

(ii) $x<0$에서

$g(x)=-(x+4)^2+4(x+4)+8$

$=-x^2-4x+8$

$g(-1)=11$

$g'(x)=-2x-4 \rightarrow g'(-1)=-2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, 11)$에서 접선의 방정식은

$y=-2(x+1)+3+8=-2x+9$ …… ㉣

㉢=㉣에서

$t=3$

이다.

따라서 함수 $i(x)=\begin{cases} -2h(x) & (x<0) \\ |h(x)|-\left|27-x^3\right| & (x \geq 0) \end{cases}$는 $x=3$이 아닌 양수 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않는다.

(i) 함수 $i(x)$가 $x=\alpha$ $(0<\alpha<3,\ \alpha>3)$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $i(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$\lim_{x \to 0-} i(x)=-2h(0)$

$\lim_{x \to 0+} i(x)=|h(0)|-27$

$-2h(0)=|h(0)|-27$

$h(0)<0$라면 $-2h(0)=-h(0)-27 \rightarrow h(0)=27$ (모순)

$h(0) \geq 0$라면 $-2h(0)=h(0)-27 \rightarrow \therefore\ h(0)=9$

따라서

$\lim_{s \to 0-} \frac{i(0+s)-i(0)}{s}$

$=\lim_{s \to 0-} \frac{-2h(0+s)+2h(0)}{s}$

$=-2\lim_{s \to 0-} \frac{h(0+s)-h(0)}{s}$

$=-2h'(0)$

$\lim_{s \to 0+} \frac{i(0+s)-i(0)}{s}$

$=\lim_{s \to 0+} \frac{|h(0+s)|-27+s^3-|h(0)|+27}{s}$

$=\lim_{s \to 0+} \frac{h(0+s)-h(0)}{s}+\lim_{s \to 0+} s^2$

$=h'(0)$

$-2h'(0)=h'(0) \rightarrow \therefore\ h'(0)=0$

따라서

$h(0)=9$, $h'(0)=0$ → $h(x)=x^2(ax+b)+9$라 할 수 있다. …… ㉤

(ii) 함수 $i(x)$가 $x=\alpha$ $(0<\alpha<3,\ \alpha>3)$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $i(x)$는 $x=3$에서 미분가능하다.

$\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{i(3+h)-i(3)}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{|h(3+s)|-|27-(3+s)^3|-|h(3)|}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{\{27-(3+s)^3\}}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{-27s-9s^2}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}+27$

$\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{i(3+s)-i(3)}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{|h(3+s)|-|27-(3+s)^3|-|h(3)|}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{-\{27-(3+s)^3\}}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{27s+9s^2}{s}$

$=\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-27$

에서

$\lim\limits_{s\to 0-}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}+27=\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{|h(3+s)|-|h(3)|}{s}-27$

이기 위해서는 함수 $|h(x)|$가 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

∴ $h(3)=0$

$-|h'(3)|+27=|h'(3)|-27$ → $|h'(3)|=27$

∴ $h(3)=0$, $h'(3)=27$ 또는 $h(3)=0$, $h'(3)=-27$ …… ㉥

㉤에서 $h(x)=x^2(ax+b)+9$, $h'(x)=2x(ax+b)+ax^2$이므로

㉥에서

$h(3)=9(3a+b)+9=0$, $3a+b=-1$

$h'(3)=6(3a+b)+9a=-27$, $27a+6b=-27$, $9a+2b=-9$

$h'(3)=6(3a+b)+9a=27$, $27a+6b=27$, $9a+2b=9$

① $3a+b=-1$, $9a+2b=-9$ 에서 $a=-\dfrac{7}{3}$, $b=6$

$h(x)=x^2\left(-\dfrac{7}{3}x+6\right)+9$

$=-\dfrac{7}{3}x^3+6x^2+9$

$=-\dfrac{1}{3}(7x^3-18x^2-27)$

$=-\dfrac{1}{3}(x-3)(7x^2+3x+9)$

$7x^2+3x+9=0$의 $D<0$이므로 실근이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $i(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모순이다.

② $3a+b=-1$, $9a+2b=9$에서 $a=\dfrac{11}{3}$, $b=-12$

$h(x)=x^2\left(\dfrac{11}{3}x-12\right)+9$

$=\dfrac{11}{3}x^3-12x^2+9$

$=\dfrac{1}{3}(11x^3-36x^2+27)$

$=\dfrac{1}{3}(x-3)(11x^2-3x-9)$

$11x^2-3x-9=0$에서 $x=\dfrac{3\pm 9\sqrt{5}}{22}$

$0<\alpha<3$, $\alpha>3$이므로 함수 $i(x)$는 $x=\dfrac{3+9\sqrt{5}}{22}$에서 미분가능하지 않다.

∴ $\alpha=\dfrac{3+9\sqrt{5}}{22}$

16) 정답 13

$\log_3(x+2)=\log_3(4x-7)-\log_3 3$

$=\log_3\dfrac{4x-7}{3}$

이므로

$x+2=\dfrac{4x-7}{3}$

$3x+6=4x-7$

$x=13$

17) 정답 4

$f(2)-f(1)=\displaystyle\int_1^2 f'(x)dx$

→ $f(2)=\displaystyle\int_1^2(3x^2-4x)dx+3$ ($\because$ $f(1)=3$)

$=\left[x^3-2x^2\right]_1^2+3$

$=4$

18) 정답 6

$3\log_3 18+\log_{\frac{1}{9}}64=3\log_3(2\times 3^2)+\log_{3^{-2}}2^6$

$=3\log_3 2+6\log_3 3-3\log_3 2$

$=6$

19) 정답 14

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $3a_1+a_9=8$에서

$2a_1+(a_1+a_9)=8$

$2a_1+2a_5=8$

$4a_3=8$

이므로 $a_3=2$

이때 문제에서 $a_3+a_4=7$이라 하였으므로

$a_4=7-2=5$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_4-a_3=5-2$

$=3$

이므로 구하는 값은

$a_7 = a_4 + 3 \times 3$
$= 5 + 3 \times 3 = 14$

20) 정답 11

$g(x) = \int_2^x \{f(t) - f(x)\}dt$

$= \int_2^x f(t)dt - f(x)\int_2^x 1dt$

$= \int_2^x f(t)dt - f(x)(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 관하여 미분하면

$g'(x) = f(x) - f'(x)(x-2) - f(x)$

$= -f'(x)(x-2)$

이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로

$g'(0)=0 \to f'(0)=0$

또한 함수 $g(x)$가 극값의 개수가 1이므로

$g'(x)=0$을 만족시키는 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호 변화가 없어야 한다.

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이므로

$f'(x) = 3x(x-2)$

이다.

$f(0)=a$이므로

$f(x) = \int(3x^2-6x)dx = x^3-3x^2+a$이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극값 a을 가지므로

$g(0) = \int_2^0 \{f(t)-f(x)\}dt = a$이다.

㉠에서

$a = \int_2^0 f(t)dt + 2a$

$a = -\int_2^0 f(t)dt = \int_0^2 (t^3-3t^2+a)dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 - t^3 + at\right]_0^2$

$= 4 - 8 + 2a$

$\therefore a = 4$

두 삼각형 OPA, OPB가 한 변 OP를 공유하고 넓이가 $\frac{a}{2}=2$로 같으므로 직선 OP와 직선 AB는 평행하다.

직선 OP의 기울기가 -2이므로 상수 k의 값은 -2이다.

점 A의 x좌표를 t라 하면

$\mathrm{A}(t, 2^{1-t}+b)$, $\mathrm{B}(t+1, 2^{1-t}+b-2)$이다.

점 B가 곡선 $y=2^{1-x}+b$위에 있으므로

$2^{-t}+b = 2^{1-t}+b-2$

$\frac{1}{2^t} - \frac{2}{2^t} = -2$

$2^t = \frac{1}{2}$

$\therefore t=-1$이다.

따라서 $\mathrm{A}(-1, 4+b)$

삼각형 OPA의 넓이는 $\frac{a}{2}=2$

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & (4+b) & 0 \end{vmatrix} = 2$

$4+b-2=4$

$\therefore b=2$

집합 A에서

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\sin x\right) = \sin(c\sin x)$이므로

$\cos(c\sin x) = \sin(c\sin x)$

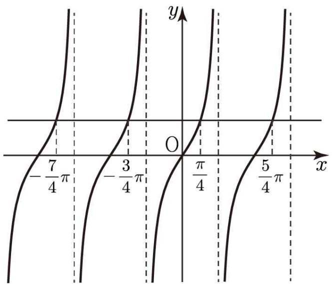
$c\sin x = t$라 하면 $\cos t = \sin t$이다.

$\tan t = 1$ $(-c \le t \le c)$인 t에 대하여 …… ㉡

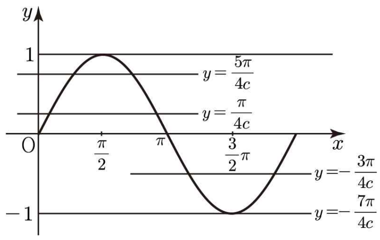
$\sin x = \frac{t}{c}$ $(0 \le x \le 2\pi)$인 x의 합이 $\frac{13\pi}{2}$이다. …… ㉢

㉡을 만족시키는 t의 값을 절댓값이 작은 순서로 나열하면

$t = \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \cdots$이다.



㉢에서



(i) 곡선 $y=\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$와 직선 $y=\frac{\pi}{4c}$가 두 점에서 만나면 교점의 x좌표의 합은 π이다.

(ii) 곡선 $y=\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$와 직선 $y=-\frac{3\pi}{4c}$가 두 점에서 만나면 교점의 x좌표의 합은 3π이다.

(iii) 곡선 $y=\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$와 직선 $y=\frac{5\pi}{4c}$가 두 점에서 만나면 교점의 x좌표의 합은 π이다.

(i), (ii), (iii)에서 x의 합이 5π이므로

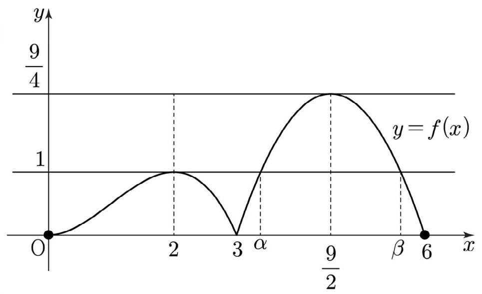
곡선 $y=\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$와 직선 $y=-\frac{7\pi}{4c}$의 한 점 $x=\frac{3\pi}{2}$에서만 만나야 ㉢을 만족시킬 수 있다.

즉, $-\frac{7\pi}{4c} = -1$

$\therefore c = \frac{7\pi}{4}$이다.

$p=4$, $q=7$이므로 $p+q=11$이다.

21) 정답 9
[그림 : 서태욱T]
$0 \le x < 3$에서 함수 $f(x) = -\frac{1}{4}x^2(x-3)$은 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=1$을 가진다.
$3 \le x \le 6$에서 함수 $f(x) = -x^2+9x-18 = -(x-3)(x-6)$으로 축의 방정식이 $x=\frac{9}{2}$인 그래프이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이기 위해서는 $f(t)$의 값이 0 또는 1일 때다.
(i) $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은
$t=0$, $t=3$, $t=6$이므로 모든 t의 합은 9이다.
(ii) $f(t)=1$을 만족시키는 t의 값은
$t=2$, $t=\alpha$, $t=\beta$이고 $\alpha+\beta=9$이므로 모든 t의 값의 합은 11이다.
(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 20이다.
$\alpha=20$이므로 조건 (가), (나)에서 직선 A_nB_n의 기울기는
$\frac{\alpha}{10}=2$, $\overline{A_nB_n} = n \times \sqrt{\frac{\alpha}{4}} = n \times \sqrt{5}$이다.
따라서 두 점 A_n, B_n의 x좌표의 차이가 n임을 알 수 있다.
그러므로 $A_n(a, a^2+1)$, $B_n(a+n, (a+n)^2+1)$라 할 수 있다.
두 점을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{\{(a+n)^2+1\}-(a^2+1)}{n}=2$$

$$2an+n^2=2n$$

$$a=1-\frac{n}{2}$$

두 함수 $y=x^2+1 (x \ge 0)$와 $y=\sqrt{x-1}$는 역함수 관계이므로 중심이 직선 $y=x$위에 있는 원과 곡선 $y=x^2+1$가 만나는 점을 $y=x$에 대칭이동한 점이 곡선 $y=\sqrt{x-1}$위에 있다.
따라서 x_n은 점 B_n의 y좌표이다. (단, 점 A_n의 x좌표가 음수일 때 $y=x$에 대칭이동한 점은 $y=\sqrt{x-1}$위에 있지 않는다.)

$$\therefore\ x_n=(a+n)^2+1=\left(1+\frac{n}{2}\right)^2+1$$

$$=\frac{n^2}{4}+n+2$$

따라서
$x_1=\frac{13}{4}$, $x_3=\frac{29}{4}$이므로 $x_1-x_3=-4$이다.

$x_2=5$, $x_4=10$, $x_6=17$이므로 $\frac{x_2+x_4+x_6}{4}=8$이다.
그러므로

$$(x_1-x_3)k^2+4x_1k \le g(k-1)-g(k) \le k+\frac{x_2+x_4+x_6}{4}$$

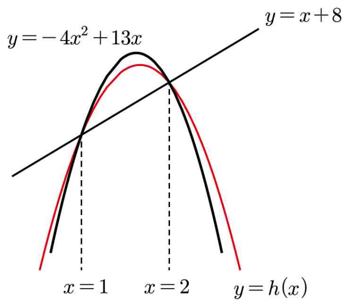
$\rightarrow -4k^2+13k \le g(k-1)-g(k) \le k+8$
가 모든 정수 k에 대하여 성립해야 한다.
$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

$$g(x-1)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a+3)x+(a-b+c-1)$$

$g(x-1)-g(x)=-3x^2+(3-2a)x+(a-b-1)$ …… ㉠
$h(x)=g(x-1)-g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이다.
한편,

$$-4k^2+13k=k+8$$
$$4k^2-12k+8=0$$
$$4(k-1)(k-2)=0$$

$k=1$ 또는 $k=2$
따라서 세 함수 $y=-4x^2+13x$, $y=h(x)$, $y=x+8$의 관계는 다음 그림과 같다.



그러므로 $h(x)=-3(x-1)(x-2)+x+8$이다.
$g(x-1)-g(x)=-3x^2+10x+2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서

$3-2a=10 \rightarrow a=-\frac{7}{2}$

$a-b-1=2 \rightarrow b=-\frac{13}{2}$

$g(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{13}{2}x+c$ 이므로

$$g'(x)=3x^2-7x-\frac{13}{2}$$

$$g'\left(-\frac{\alpha}{20}\right)=g'(-1)=3+7-\frac{13}{2}=\frac{7}{2}$$

$p=2$, $q=7$이므로 $p+q=9$이다.

22) 정답 11
조건(나)에서 삼차방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 존재한다.
모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x \to t}\frac{f(3x-2)}{f(x)}$의 값이 존재하므로
$f(\alpha)=0$인 α에 대하여

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=0$이고, $\lim_{x\to\alpha} f(3x-2)=0$
함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(3\alpha-2)=0$
즉, $3\alpha-2$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
마찬가지 방법으로 $3\alpha-2$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면
$3(3\alpha-2)-2=9\alpha-8$도 방정식 $f(x)=0$의 근이고
$3(9\alpha-8)-2=27\alpha-26$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
만약 $\alpha\neq 3\alpha-2$ 즉 $\alpha\neq 1$이면 α, $3\alpha-2$, $9\alpha-8$, $27\alpha-26$이 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 근이 되어 모순이다.
따라서 $\alpha=1$이어야 한다.
즉, 삼차방정식 $f(x)=0$은 $x=1$만 실근으로 갖는다.
조건(가)에서 따라서 $f(x)=(x-1)^3$ 또는 $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$
(a, b는 정수이고 $a^2<4b$)이다.
$f(0)=-1 \to b=1$
$f(x)=(x-1)^3$ 또는 $f(x)=(x-1)(x^2+ax+1)$ $(a=-1,\ 0,\ 1)$
(i) $f(x)=(x-1)^3$일 때, $f(3)=8$
(ii) $f(x)=(x-1)(x^2-x+1)$일 때, $f(3)=2\times 7=14$
(iii) $f(x)=(x-1)(x^2+1)$일 때, $f(3)=2\times 10=20$
(iv) $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$일 때, $f(3)=2\times 13=26$
따라서
$f_1(x)=(x-1)^3$, $f_2(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$
곡선 $y=f_1(x)=(x-1)^3$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표가 k이므로 $(k-1)^3=k$이다.
$y=(x-1)^3$과 $y=x$의 그래프에서 $2<k<3$이다.
$k^3-3k^2+3k-1=k$
$k^3-3k^2+2k=1$
따라서 $g\left(\frac{26}{k^3-3k^2+2k}\right)=g(26)$이고
$x>k$일 때, $g(g(x))=2x \to g(x^3-1)=2x \to x=3$을 대입하면
$g(26)=6$
$\therefore\ \alpha=6$
따라서 사차함수 $h(x)$에 대하여
$k(x)=\begin{cases} h(x) & (x<0) \\ -x^2+2x & (x\geq 0)\end{cases}$, $k'(x)=\begin{cases} h'(x) & (x<0) \\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고 함수
$k(x)$가 조건(다)에서 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$h(0)=0$, $h'(0)=2$이다.
$x>0$일 때, $k'(x)=-2x+2$이고 방정식 $k'(x)=0$의 실근이 $x=1$이다.
따라서 조건(라)에서 방정식 $k'(x)\times k'(x-2)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이기 위해서는
$x<0$일 때, 방정식 $k'(x)=0$의 실근이 $x=-1$, $x=-3$, $x=-5$이어야 한다.
즉, $h'(-5)=h'(-3)=h'(-1)=0$이다.
$h'(x)=a(x+5)(x+3)(x+1) \to h'(0)=15a=2 \to a=\frac{2}{15}$

$h'(x)=\frac{2}{15}(x^3+9x^2+23x+15)$

$=\frac{1}{30}(4x^3+36x^2+92x+60)$

$h(x)=\frac{1}{30}(x^4+12x^3+46x^2+60x)+C$

이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$
따라서 $h(x)=\frac{1}{30}(x^4+12x^3+46x^2+60x)$이다.

$k(x)=\begin{cases} \frac{x^4+12x^3+46x^2+60x}{30} & (x<0) \\ -x^2+2x & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고

$k(\alpha-7)=h(-1)=\frac{1-12+46-60}{30}=\frac{-25}{30}=-\frac{5}{6}$
$p=6$, $q=5$이므로 $p+q=11$이다.

23) 정답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\times 9}=e^9$$

24) 정답 ⑤

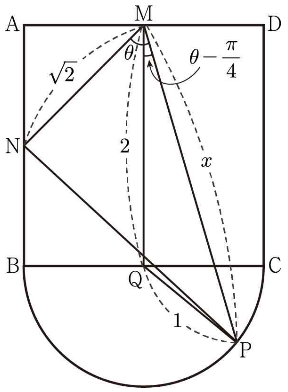
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-6x)}{e^{3x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-6x)}{-6x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\left(-\frac{6}{3}\right)$$
$$=-2$$

25) 정답 ②

$(\ln f(x))^2-\ln f(2x)-\ln(x+e^2)=0$에 $x=0$을 대입하면
$(\ln f(0))^2-\ln f(0)-2=0$
$\{\ln f(0)-2\}\{\ln f(0)+1\}=0$
모든 실수 x에 대하여 $f(x)>1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $\ln f(x)>0$이다.
따라서 $\ln f(0)=2$이고 $f(0)=e^2$이다.
이다.
$(\ln f(x))^2-\ln f(2x)-\ln(x+e^2)=0$을 미분하면
$2\ln f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{2f'(2x)}{f(2x)}-\frac{1}{x+e^2}=0$
$x=0$을 대입하면
$\frac{4f'(0)}{e^2}-\frac{2f'(0)}{e^2}-\frac{1}{e^2}=0$
$2f'(0)=1$
$f'(0)=\frac{1}{2}$
$f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이다.
$x=e^2$을 대입하면
$f'(g(e^2))g'(e^2)=1 \to f'(0)g'(f(0))=1$
$\therefore\ g'(f(0))=\frac{1}{f'(0)}=2$

직각이등변삼각형 AMN에서 $\overline{MN}=\sqrt{2}$이다.
$\overline{MP}=x$라 하자.
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times x\times\sin\theta$ …… ㉠
선분 BC의 중점을 Q라 하면 $\angle NMQ=\frac{\pi}{4}$이고 $\overline{MQ}=2$,

$\overline{PQ}=1$이다.



삼각형 MQP에서 $\angle PMQ=\theta-\frac{\pi}{4}$이므로 코사인법칙을 적용하면

$1=2^2+x^2-2\times2\times x\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$x^2-4x\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+3=0$ …… ㉡

㉡에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때,

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=3$ ($\because x>2$)

㉡의 양변을 θ에 관하여 미분하면

$2x\frac{dx}{d\theta}-4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dx}{d\theta}-4x\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$6\frac{dx}{d\theta}-4\frac{dx}{d\theta}=0$

$\therefore \frac{dx}{d\theta}=0$

㉠의 양변을 θ에 관하여 미분하면

$S'(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\frac{dx}{d\theta}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$

$p=2$, $q=3$이므로 $p+q=5$이다.

(가)에서

$h(x)=\cos(a\sin x+b)$

$h'(x)=-\sin(a\sin x+b)\times a\cos x=a$

$\rightarrow \sin(a\sin x+b)\cos x=-1$

$-1\le\sin(a\sin x+b)\le1$, $-1\le\cos x\le1$

이므로

$\begin{cases}\sin(a\sin x+b)=-1,\ \cos x=1\\ \sin(a\sin x+b)=1,\ \cos x=-1\end{cases}$

이다.

$\cos\alpha=1$ 또는 $\cos\alpha=-1$인 α에 대하여 $\sin\alpha=0$이므로

$\sin b=-1$ 또는 $\sin b=1$이다.

(나)에서

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)\cos x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(a\sin x+b)\cos x\}dx$

$\sin x=t$라 하면

$\cos x dx=dt$이고 $x:0\rightarrow\frac{\pi}{2}$ 일 때, $t:0\rightarrow1$이므로

$=\int_0^1(\cos at+b)dt$

$=\left[\frac{\sin(at+b)}{a}\right]_0^1$

$=\frac{\sin(a+b)}{a}-\frac{\sin b}{a}$

(i) $\sin b=-1$일 때,

$\frac{\sin(a+b)}{a}+\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}$

$\sin(a+b)=-3$

으로 모순이다.

(ii) $\sin b=1$일 때,

$\frac{\sin(a+b)}{a}-\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}$

$\sin(a+b)=-1$

$\sin a\cos b+\cos a\sin b=-1$

$\cos b=0$이므로 $\cos a=-1$이다.

$p+q=5$이므로 (i), (ii)에서

$0<a<5\pi$, $0<b<5\pi$

$\cos a=-1 \rightarrow a=\pi$, $a=3\pi$

$\sin b=1 \rightarrow b=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{5\pi}{2}$, $b=\frac{9\pi}{2}$

$a+b$의 최댓값은 $3\pi+\frac{9\pi}{2}=\frac{15\pi}{2}$

26) 정답 ③

[그림 : 강민구T]

곡선 $y=\tan x$의 점근선의 방정식은 $x=\frac{2n-1}{2}\pi$ (n은 정수)이고

$x=a_n$에 가장 가까운 점근선은 $x=\frac{2n-3}{2}\pi$이다. ($\because a_1=0$)

$b_n=a_n-\frac{2n-3}{2}\pi$라 하면 $n\rightarrow\infty$일 때, $b_n\rightarrow0$이다.

따라서 $\lim_{n\rightarrow\infty}\left(a_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)=0$이다.

$\lim_{n\rightarrow\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(b_{n+1}+\frac{2n-1}{2}\pi-b_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)$

$=\lim_{n\rightarrow\infty}(b_{n+1}-b_n+\pi)$

$=0-0+\pi=\pi$ 이므로

$\therefore \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{\pi}=-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}+\frac{2n-1}{2}\pi}{b_n+\frac{2n-3}{2}\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{n}+\frac{2n-1}{2n}\pi}{\frac{b_n}{n}+\frac{2n-3}{2n}\pi}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{\pi}\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=(-1)\times1=-1$이다.

$\therefore\ a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{e^{x+1}} & (x\ \geq\ -1)\\ (x+3)^2 & (x<\ -1)\end{cases}$이고

$x\ \geq\ -1$일 때, $f(x)=\frac{(x-1)^2}{e^{x+1}}$

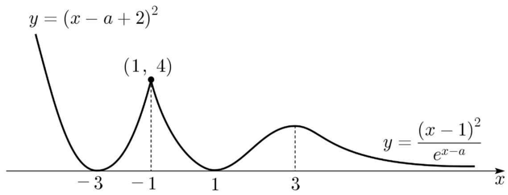
$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(x-1)^2}{e^{x+1}}$$

$$=\frac{(x-1)(3-x)}{e^{x-a}}$$

$f'(x)=0\ \rightarrow\ x=1,\ x=3$이고

함수 $f(x)$의 증감에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0,

$x=3$에서 극댓값 $\frac{4}{e^4}$을 갖는다.



양수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최댓값이 $g(t)$이므로

위의 그래프에서 함수 $g(t)$는 $t=4$와 $t=\frac{4}{e^4}$에서 불연속이다.

또한,

$h(x)=\int_0^x(s+a)^2(s-a)^2ds$에서 $a=-1$이므로

$h(x)=\int_0^x(s-1)^2(s+1)^2ds$에서 $h(0)=0$이고

$$h'(x)=(x+1)^2(x-1)^2$$

$$=\left(x^2-1\right)^2$$

$$=x^4-2x^2+1$$

따라서

$h(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x$이고 $h'(x)\ \geq\ 0$이다.

함수 $k(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$k'(x)=\begin{cases}h'(x) & (x>\alpha)\\ -h'(x-\beta) & (x<\alpha)\end{cases}$$

$\lim_{x\to\alpha+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha-}h'(x)\ \rightarrow\ h'(\alpha)=-h'(\alpha-\beta)$

$h'(\alpha)+h'(\alpha-\beta)=0$

$f'(\alpha)\ \geq\ 0,\ f'(\alpha-\beta)\ \geq\ 0$이므로 $f'(\alpha)=0,\ f'(\alpha-\beta)=0$이어야 한다.

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1,\ x=1$뿐이다.

$\beta>0$이므로 $\alpha=1,\ \beta=2$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{e^{x+1}} & (x\ \geq\ -1)\\ (x+3)^2 & (x<\ -1)\end{cases},\ f'(x)=\begin{cases}-\frac{(x-1)(x-3)}{e^{x+1}} & (x\ >\ -1)\\ 2(x+3) & (x<-1)\end{cases}$$

에서

$f(\beta)=f(2)=\frac{1}{e^3}$이고 $f\left(g\left(\frac{1}{e^3}\right)\right)=\frac{1}{e^3}$에서 $g\left(\frac{1}{e^3}\right)=2$이다.

$f(g(t))=t$에서 양변을 t에 관하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$이므로 $g'(t)=\frac{1}{f'(g(t))}$이므로

$$g'(f(\beta))$$

$$=g'(f(2))$$

$$=g'\left(\frac{1}{e^3}\right)$$

$$=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{e^3}\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{f'(2)}$$

$$=-e^3$$

$x<-1$일 때, $f(x)=(x+3)^2$이고 $\alpha+\beta-a=4$이므로 $t=4$일 때, $g(t)=-1$이다.

이차함수의 축이 $x=-3$이므로 $\lim_{t\to(\alpha+\beta-a)+}g(t)=\lim_{t\to4+}g(t)=-5$이다.

따라서 $\lim_{t\to(\alpha+\beta-a)+}g(t)\times g'(f(\beta))=5e^3$이다.

27) 정답 ①

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{n(n+2m)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2m}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$

$S_{m-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m-2}\right)$ $(m\ \geq\ 2)$

$a_m=S_m-S_{m-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}\right)=\frac{4m-1}{4m(2m-1)}$,

$a_1=S_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

따라서 $a_n=\frac{4n-1}{4n(2n-1)}$

$a_1=\frac{3}{4}$이므로 $f'(1)=\frac{4}{3}a_1-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$

$a_2=\frac{7}{24}$이므로 $f(0)=12a_2=\frac{7}{2}$

$g(x)=xf'(x^2)+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$에서 $g(0)=0,\ g(1)=1$이다.

Young's의 법칙에서

$$\int_0^1g(x)dx+\int_{g(0)}^{g(1)}g^{-1}(x)dx$$

$= \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^{-1}(x)dx$

$= 1$

따라서 $\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 g(x)dx$ …… ㉠

$xf'(x^2) = g(x) - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$이므로

$$\int_0^1 xf'(x^2)dx = \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}xdx$$

$$= \int_0^1 g(x)dx + \left[\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= \int_0^1 g(x)dx - 1$$

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 3\left(\int_0^1 g(x)dx - 1\right) + 3$$

$$= 3\int_0^1 g(x)dx \text{ …… ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{4}$이다.

$\int_0^1 xf'(x^2)dx = \int_0^1 g(x)dx - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$x^2 = t$라 하면 $xdx = \frac{1}{2}dt$이고

$x = 0$일 때, $t = 0$

$x = 1$일 때, $t = 1$이므로

$\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt = -\frac{3}{4}$

따라서 $\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{3}{2}$

$\left[f(x)\right]_0^1 = -\frac{3}{2}$

$f(1) - f(0) = -\frac{3}{2}$

$f(0) = 12a_2 = \frac{7}{2}$이므로 $f(1) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2$

따라서 $i'(x) = k - f(1)x = k - 2x$에서

$i(x) = -x^2 + kx + C$

$i(0) = C$이다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $i(x) \le k - 2x$이므로

$-x^2 + kx + C \le k - 2x$

$x^2 - (k+2)x + k - C \ge 0$

$p(x) = x^2 - (k+2)x + k - C$라 하면 함수 $p(x)$의 축의 방정식은

$x = \frac{k+2}{2}$이다.

(i) $\frac{k+2}{2} < 0$, 즉, $k < -2$일 때, $p(0) \ge 0$이어야 한다.

따라서 $k - C \ge 0$

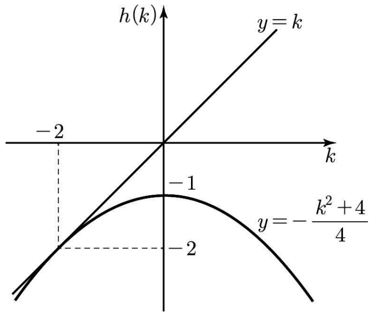
$\therefore\ C = h(k) \le k$

(ii) $\frac{k+2}{2} \ge 0$, 즉, $k \ge -2$일 때, 이차방정식 $p(x) = 0$의 실근의 개수가 1이하이므로 $D \le 0$이어야 한다.

따라서 $D = (k+2)^2 - 4k + 4C \le 0$

$k^2 + 4 + 4C \le 0$

$\therefore\ C = h(k) \le -\frac{k^2+4}{4}$



(i), (ii)에서 $h(k) = \begin{cases} k & (k < -2) \\ -\frac{k^2+4}{4} & (k \ge -2) \end{cases}$ …… ㉠

$h(-3) \times h(2) = (-3) \times (-2) = 6$

28) 정답 ③

(가)에서 복소수의 실수부분이 a_n이고 허수부분이 b_n이므로 다음 표와 같다.

n	i^{n-1}	$(\alpha+\beta i)i^{n-1}$	a_n	b_n
1	1	$\alpha+\beta i$	α	β
2	i	$-\beta++\alpha i$	$-\beta$	α
3	-1	$-\alpha-\beta i$	$-\alpha$	$-\beta$
4	$-i$	$\beta-\alpha i$	β	$-\alpha$
5	1	$\alpha+\beta i$	α	β
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$a_{n+4} = a_n$, $b_{n+4} = b_n$이므로

$a_1 = \alpha$, $a_3 = -\alpha$, $b_5 = b_1 = \beta$, $b_7 = b_3 = -\beta$이다.

$a_1 \times a_3 \times b_5 \times b_7 = 9 \rightarrow \alpha^2\beta^2 = 9$이다.

$\alpha > \beta$이므로 순서쌍 (α, β)는 다음과 같다.

$(3, 1)$, $(3, -1)$, $(1, -3)$, $(-1, -3)$ …… ㉠

$\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})}{\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)} = \dfrac{b_{4n-2}}{a_{4n}}$에서 $a_{4n-1} = -\alpha$, $b_{4n-3} = \beta$, $a_{4n} = \beta$,

$b_{4n-2} = \alpha$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{c_n\}$의 공비를 r이라 하면 $-1 < r < 1$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})$

$= -\alpha\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}$

$= -\alpha \times \frac{c_2}{1-r^2}$

$= -\alpha \times \frac{c_1 r}{1-r^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)$

$=\beta\times\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\beta\times\dfrac{c_1}{1-r}$

이므로

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-1}c_{2n})}{\sum_{n=1}^{\infty}(b_{4n-3}c_n)}=\frac{\alpha}{\beta}\rightarrow\frac{-\alpha\times\dfrac{c_1r}{(1-r)(1+r)}}{\beta\times\dfrac{c_1}{1-r}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$\rightarrow -\dfrac{r}{1+r}=1\rightarrow r=-\dfrac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\dfrac{\alpha}{\beta}\rightarrow\dfrac{c_1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

$c_1=\dfrac{\alpha}{\beta}\times\dfrac{3}{2}$

㉠에서 $\alpha=3$, $\beta=-1$일 때, $c_1=-\dfrac{9}{2}$로 최소이다.

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}=\frac{c_2}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{-\dfrac{9}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{3}{4}}=3$$

이다.

$\therefore\ k=3$

(나)에서

$e^{3f(x)}-3e^{2f(x)}+3e^{f(x)}-1+ax+b=\dfrac{x+1}{e^x}$

$\left(e^{f(x)}-1\right)^3=\dfrac{x+1}{e^x}-(ax+b)$

이다.

(다)에서

사이값 정리에 의해 $f(\alpha)=0$인 $-2<\alpha<2$의 α가 존재한다.

$h(x)=\left(e^{f(x)}-1\right)^3$라 하면 $h(x)=\dfrac{x+1}{e^x}-(ax+b)$이다.

$h(\alpha)=\left(e^{f(\alpha)}-1\right)^3=\left(e^0-1\right)^3=0$

이므로 $h(\alpha)=\dfrac{\alpha+1}{e^\alpha}-(a\alpha+b)=0$ …… ㉡

$h'(x)=3\left(e^{f(x)}-1\right)^2e^{f(x)}f'(x)$에서

$h'(\alpha)=3\left(e^0-1\right)^2e^0f'(0)=0$

$h'(\alpha)=0$이므로

$h'(x)=\dfrac{-x}{e^x}-a$에서 $h'(\alpha)=\dfrac{-\alpha}{e^\alpha}-a=0$ …… ㉢

이다.

$h''(x)=6\left(e^{f(x)}-1\right)e^{2f(x)}(f'(x))^2+3\left(e^{f(x)}-1\right)\left(e^{f(x)}f'(x)\right)'$에서

$h''(\alpha)=0+0=0$이므로

$h''(x)=\dfrac{-1+x}{e^x}$에서 $h''(\alpha)=\dfrac{-1+\alpha}{e^\alpha}=0$이므로 $\alpha=1$이다.

㉢에서 $\dfrac{-1}{e^1}-a=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{e}$

㉡에서 $h(\alpha)=\dfrac{\alpha+1}{e^\alpha}-(a\alpha+b)=0$

$\dfrac{2}{e}-\left(-\dfrac{1}{e}+b\right)=0\rightarrow b=\dfrac{3}{e}$

따라서 $g(x)=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{3}{e}$이다.

$\therefore\ g(1)=\dfrac{2}{e}$

따라서 선분 AB의 길이는 $g(1)\times e=2$이다.

삼각형 OBQ에 대하여 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로

$\angle\mathrm{OBQ}=\angle\mathrm{OQB}=\theta$

이다.

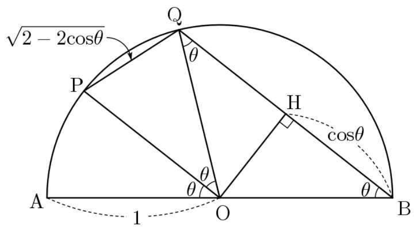
따라서 $\angle\mathrm{QOA}=2\theta$

$\therefore\ \angle\mathrm{POQ}=\theta$

그러므로 사각형 OPQB의 넓이는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta}{2}$ …… ㉣



삼각형 OPQ에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=1+1-2\cos\theta=2-2\cos\theta$

점 O에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=\cos\theta$

따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\cos\theta$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2=\dfrac{56}{25}$

$2-2\cos\theta+4\cos^2\theta=\dfrac{56}{25}$

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-\dfrac{6}{25}=0$

$50\cos^2\theta-25\cos\theta-3=0$

$(5\cos\theta-3)(10\cos\theta+1)=0$

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}\ \left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2=\dfrac{56}{25}$을 만족시키는 θ의 값이 p이므로

$\cos p=\dfrac{3}{5}$, $\sin p=\dfrac{4}{5}$이다.

㉣에서 $S'(\theta)=\dfrac{\cos\theta+2\cos2\theta}{2}$이므로

$S'(p)=\dfrac{\cos p+2\cos2p}{2}$

$=\dfrac{\dfrac{3}{5}+2\left(\dfrac{9}{25}-\dfrac{16}{25}\right)}{2}=\dfrac{1}{50}$

29) 정답 96

① $|x|>1$일 때, $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{f(x)}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{2}{x^n}}=x$

② $|x|<1$일 때, $g(x)=\dfrac{f(x)}{2}$

③ $x=1$일 때, $g(1)=\dfrac{1-1+f(1)}{1+1+2}=\dfrac{f(1)}{4}$

④ $x=-1$일 때, $g(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1-(-1)^n+f(-1)}{1+(-1)^n+2}$에서 $g(-1)$의 값이 존재하기 위해서는 $f(-1)=-2$이어야 하고 $g(-1)=-1$이다.

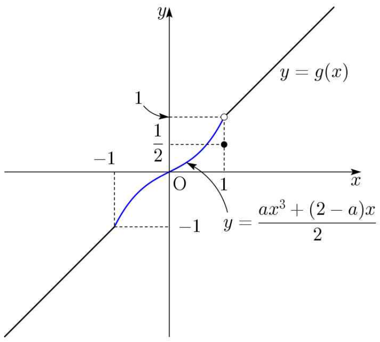
$f(0)=f''(0)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 홀수차 함수이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이므로 $f(1)=2$, $f(0)=0$이다.

따라서 $f(x)=ax^3+(2-a)x$라 할 수 있다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ \dfrac{ax^3+(2-a)x}{2} & (|x|<1) \\ \dfrac{1}{2} & (x=1) \\ -1 & (x=-1) \end{cases}$$

이때, 함수 $h(t)$가 모든 실수 k에 대하여 $\lim\limits_{t\to k+}h(t)+\lim\limits_{t\to k-}h(t)=2$를 만족시키기 위해서는 그림과 같이 $g(x)=\dfrac{ax^3+(2-a)x}{2}$가 $-1<x<1$에서 극값을 가지지 않고 증가해야 한다.



$g(x)=\dfrac{ax^3+(2-a)x}{2}$

$g'(x)=\dfrac{3a}{2}x^2+1-\dfrac{a}{2}$

$a>0$이므로

$1-\dfrac{a}{2}\ \ge\ 0$이거나

$g'(x)=0$을 만족시키는 x가 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$일 때, 즉 $x^2\ge 1$이면 된다.

㉠ $1-\dfrac{a}{2}\ge 0 \to a\le 2$

㉡ $\dfrac{3a}{2}x^2=\dfrac{a}{2}-1 \to x^2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3a}\ge 1 \to a-2\ge 3a \to a\le -1$

(모순)

㉠, ㉡에서 $0<a\le 2$이다.

$f(x)=ax^3+(2-a)x$에서 $0<a\le 2$이므로

$f(2)=8a+4-2a=6a+4\le 16$이다.

$f(2)$의 최댓값은 16이다.

$\therefore\ M=16$

따라서 $\dfrac{M+16}{2}=9$이므로 $A=\{n\,|\,n$는 a_n 중 9이하의 자연수$\}$이다.

등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 집합 A의 값이 다른 것이 존재하므로 $-1<r<1$이다.

한편,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_2a_n+a_{2n}}{a_{n+1}+2a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1{}^2r^n+a_1r^{2n-1}}{a_1r^n+2a_1r^{n-1}}$

$=\dfrac{a_1r}{r+2}=\dfrac{64}{5}$ …… ㉢

이고

집합 A의 원소의 개수가 3일 때, 3개의 자연수를 a, b, c $(a>b>c)$라 하고 원소의 개수가 4일 때, 4개의 자연수를 a, b, c, d $(a>b>c>d)$, $\cdots$

라 하자.

$a=9$일 때, $r=\dfrac{1}{3}$ 또는 $r=\dfrac{2}{3}$이면 집합 A의 원소가 3으로 만족시킨다.

$r=\dfrac{1}{3}$일 때, $(a,\,b,\,c)=(9,\,3,\,1)$

$r=\dfrac{2}{3}$일 때, $(a,\,b,\,c)=(9,\,6,\,4)$

$c=8$일 때, $r=\dfrac{1}{2}$이면 집합 A의 원소가 4로 만족시킨다.

$(a,\,b,\,c,\,d)=(8,\,4,\,2,\,1)$

$c=4$일 때, $r=\dfrac{1}{2}$이면 집합 A의 원소가 3으로 만족시킨다.

$(a,\,b,\,c)=(4,\,2,\,1)$

따라서 ㉢에서

(i) $r=\dfrac{1}{3}$일 때,

$\dfrac{a_1\times\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}+2}=\dfrac{a_1}{7}=\dfrac{64}{5}$

$a_1=\dfrac{7\times 2^6}{5}$

$a_n=\dfrac{7\times 2^6}{5}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{7\times 2^6}{5\times 3^{n-1}}$으로 항의 값이 자연수가 존재하지 않으므로 조건에 모순이다.

(ii) $r=\dfrac{2}{3}$일 때,

$$\frac{a_1 \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2} = \frac{a_1}{4} = \frac{2^6}{5}$$

$a_1 = \frac{2^8}{5}$

$a_n = \frac{2^6}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n+5}}{5 \times 3^{n-1}}$ 으로 항의 값이 자연수가 존재하지 않으므로 조건에 모순이다.

(iii) $r = \frac{1}{2}$일 때,

$$\frac{a_1 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2} = \frac{a_1}{5} = \frac{2^6}{5}$$

$a_1 = 2^6$

$a_n = 2^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_3 = 16,\ a_4 = 8,\ a_5 = 4,\ a_6 = 2,\ a_7 = 1,\ a_8 = \frac{1}{2},\ \cdots$

이므로 $A = \{4, 5, 6, 7\}$이다.

따라서 집합 A의 원소 중 최솟값은 4이다.

$\therefore\ m = 4$

따라서

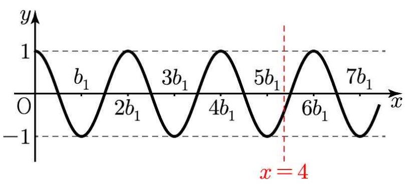
$0 < x < 4$에서 곡선 $y = \cos\left(\frac{\pi}{b_n}x\right)$와 직선 $y = -1$이 만나는 점의 개수가 $3n$이어야 한다.

곡선 $y = \cos\left(\frac{\pi}{b_n}x\right)$는 주기가 $2b_n$인 그래프이고 자연수 k에 대하여 $((2k-1)b_n,\ -1)$을 지난다.

(i) $b_1 = 3$이기 위해서는

$k = 3$일 때, $5b_1 < 4$이어야 하고

$k = 4$일 때, $7b_1 \geq 4$이어 한다.

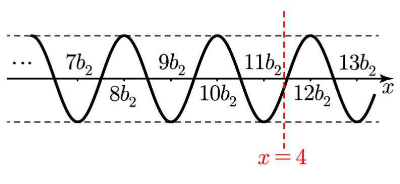


$\therefore\ \frac{4}{7} \leq b_1 < \frac{4}{5}$

(ii) $b_2 = 6$이기 위해서는

$k = 6$일 때, $11b_2 < 4$이어야 하고

$k = 7$일 때, $13b_2 \geq 4$이어 한다.



$\therefore\ \frac{4}{13} \leq b_2 < \frac{4}{11}$

같은 방법으로 생각해 보면

$\frac{4}{6n+1} \leq b_n < \frac{4}{6n-1}$

따라서

$\frac{4n}{6n+1} \leq nb_n < \frac{4n}{6n-1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty} nb_n = \frac{2}{3}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M \times m}{nb_n} = \frac{16 \times 4}{\frac{2}{3}} = 64 \times \frac{3}{2} = 96\text{이다.}$$

30) 정답 67

(가)에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록한 그래프 개형을 가지므로 양수 t에 대하여 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y = f(x)\ (x > 0)$의 교점은 점 $(t,\ f(t))$ 하나이고, 접선은 곡선의 아래쪽에 위치한다.

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$이다.

$$g(t) = \int_0^t \{f(x) - f'(t)(x-t) - f(t)\}dx$$

$$= \int_0^t f(x)dx - f'(t)\int_0^t x\,dx + \int_0^t \{tf'(t) - f(t)\}dx$$

$$= \int_0^t f(x)dx - \frac{t^2 f'(t)}{2} + t^2 f'(t) - tf(t)$$

$$= \int_0^t f(x)dx + \frac{t^2 f'(t)}{2} - tf(t)$$

따라서

$$g'(t) = f(t) + tf'(t) + \frac{t^2 f''(t)}{2} - f(t) - tf'(t)$$

$$= \frac{t^2 f''(t)}{2}$$

그러므로 $\alpha = g'(2) = \frac{4 \times f''(2)}{2} = 4$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n} + a_n) = \alpha^2 = 16,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n} - a_n) = -2\alpha = -8$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r라 하자.

준식을 변변 빼면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12 \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 12$

$a_1 = 12 - 12r,\ -1 < r < 1$ …… ㉠

준식을 변변 더하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} = 4 \rightarrow \frac{a_1 r^2}{1-r^3} = 4$

$12(1-r)r^2 = 4(1-r)(1+r+r^2)$

$3r^2 = 1 + r + r^2$

$2r^2 - r - 1 = 0$

$(2r+1)(r-1) = 0$

$\therefore\ r = -\frac{1}{2}$

㉠에서 $a_1 = 18$

따라서 $a_n = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

한편, $b_k = \sum_{i=1}^{k} \sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)$라 하면

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=0,\ b_4=0,\ b_5=1,\ b_6=1,\ \cdots$

이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)\times a_{m+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\{b_k\times a_{m+k}\}$$

$$=a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+5}+a_{m+6}+\cdots$$

$$=(a_{m+1}+a_{m+5}+a_{m+9}+\cdots)+(a_{m+2}+a_{m+6}+a_{m+10}+\cdots)$$

$$=\frac{a_{m+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4}+\frac{a_{m+2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4}$$

$$=\frac{16}{15}(a_{m+1}+a_{m+2})$$

$$=\frac{16}{15}\left(18\left(-\frac{1}{2}\right)^m+18\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right)$$

$$=\frac{96}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{48}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{3}{20}$$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{64}\ \to\ m=2,\ m=4$

따라서 m의 최댓값 $\beta=4$이다.

$h(0)=\frac{\alpha}{4}=1,\ h(\pi)=a\pi-\frac{2\pi}{\beta}=a\pi-\frac{\pi}{2}$

$h(0)=\cos(\sin b)=1\ \to\ \sin b=0\ (\because\ -1\le\sin b\le 1)\ \to\ b=\pi.\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \cdots$

$h(\pi)=\cos(a\pi)=a\pi-\frac{\pi}{2}\ \to\ \cos x=x-\frac{\pi}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$뿐 →

$a=\frac{1}{2}$

$ab=2\pi$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=4\pi$이다. →

$h(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\sin(x+4\pi)\right)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)$

$h'(x)=-\sin\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)\ \to\ h'(x)=0$의 해는

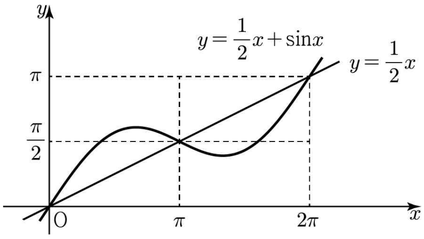
$\frac{1}{2}x+\sin x=n\pi$ (n은 정수) 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$h''(x)=-\cos\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2+\sin\left(\frac{1}{2}x+\sin x\right)\sin x$

(i) $k(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$라 할 때, $k(x)=n\pi$의 해를 c라 하면

$h''(c)=-\cos n\pi\left(\frac{1}{2}+\cos c\right)^2$ → 함수 $h(x)$는 n이 홀수이면
$h''(c)>0$이므로 $x=c$에서 극솟값을 갖고, n이 짝수이면
$h''(c)<0$이므로 $x=c$에서 극댓값을 갖는다.

다음 그림에서 $\frac{1}{2}x+\sin x=n\pi$의 해는 $x=2n\pi$이다.



따라서

함수 $h(x)$는 $x=2\pi,\ 6\pi,\ 10\pi,\ \cdots$에서 극솟값을 갖고,
$x=4\pi,\ 8\pi,\ 12\pi,\ \cdots$에서 극댓값을 갖는다.

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2}\ \to\ x=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \cdots$

$h''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $0<\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}<\pi$이므로

$h''\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{2\pi}{3}$에서 극솟값을 갖고,

$h''\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고 $0<\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}<\pi$이므로

$f''\left(\frac{4\pi}{3}\right)<0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{4\pi}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$가 극대가 되는 x값의 집합 A에서 가장 작은 원소 $\gamma=\frac{4\pi}{3}$이다.

그러므로

$\alpha\times\beta\times\gamma=4\times4\times\frac{4\pi}{3}=\frac{64\pi}{3}$

$p=3.\ q=64$이므로 $p+q=67$이다.