

/

1회 해설

/

빠른 정답

공통

1	④	2	①	3	⑤	4	②
5	③	6	①	7	④	8	③
9	⑤	10	④	11	⑤	12	②
13	②	14	①	15	③	16	8
17	22	18	27	19	60	20	17
21	32	22	4				

확률과 통계

23	⑤	24	②	25	①	26	③
27	④	28	②	29	59	30	10

미적분

23	④	24	①	25	②	26	③
27	④	28	③	29	20	30	234

01

풀이

주어진 식의 밑을 2로 통일하여 계산해 보자.

$$\begin{aligned} 4^{1+\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2\sqrt{2}} &= (2^2)^{1+\sqrt{2}} \times (2^{-1})^{1+2\sqrt{2}} \\ &= 2^{(2+2\sqrt{2})+(-1-2\sqrt{2})} \\ &= 2^1 \end{aligned}$$

따라서 정답은 2이다.

답 ④

02

풀이

주어진 식은 미분계수의 정의에 의해 $f'(3)$ 과 같다. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 의 도함수를 구하고 x 에 3을 대입하면

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(3) = 24$$

이다. 따라서 정답은 24이다.

답 ①

03

풀이

주어진 식을 정리하면

$$\sum_{k=1}^5 (2a_k - 1) = 2 \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 1$$

이다. 이때 $\sum_{k=1}^5 a_k = 5$ 이고, $\sum_{k=1}^5 1 = 5$ 이므로 정답은 $10 - 5 = 5$ 이다.

답 ⑤

04

풀이

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이어야 한다.
따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \rightarrow 2+a = 4+2-a$$

이므로 $a=2$ 임을 알 수 있다.

답 ②

05

풀이

함수 $f(x) = (x+1)(x^2+x+3)$ 의 도함수를 곱의 미분법을 이용하여 구하면

$$f'(x) = (x^2+x+3) + (x+1)(2x+1)$$

이다. $f'(x)$ 의 x 에 1을 대입해 보면 $f'(1) = 11$ 이다.

답 ③

06

풀이

주어진 식 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 각 변환을 해주면

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta$$

이므로 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ 이다. 이때 $\tan \theta < 0$ 이고 $\sin \theta > 0$ 이므로,

각 θ 는 제 2사분면의 각임을 알 수 있다.

즉, $\cos \theta < 0$ 여야 하므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

에서 $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 임을 알 수 있다.

답 ①

07

풀이

주어진 등식 $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 (x-1)f(x)dx$ 에서 $f(x) = 6x+a$ 임을 이용해 보자.

먼저 좌변을 계산하면

$$\int_0^1 (6x+a)dx = \left[3x^2+ax\right]_0^1 = a+3$$

이다. 우변을 계산하면

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x-1)(6x+a)dx &= \int_1^2 (6x^2+(a-6)x-a)dx \\ &= \left[2x^3+\frac{a-6}{2}x^2-ax\right]_1^2 \\ &= (16+2(a-6)-2a) - \left(2+\frac{a-6}{2}-a\right) \\ &= \frac{a+10}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a+3 = \frac{a+10}{2}$ 이므로 $2(a+3) = a+10$ 에서 $a=4$ 임을 알 수 있다. ¹⁾

답 ④

08

풀이

주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \log_{\sqrt{a}} 3 &= b \\ \rightarrow (\sqrt{a})^b &= 3 \\ \rightarrow a^{\frac{b}{2}} &= 3 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \log_3 a &= \frac{b}{2} \\ \rightarrow 3^{\frac{b}{2}} &= a \\ \rightarrow a^{\frac{2}{b}} &= 3 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이다. $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에서 $\frac{b}{2} = \frac{2}{b}$ 이므로 $b=2$ ($\because b>0$)임을 알 수 있다. $b=2$ 를

$\textcircled{1}$ 의 식에 대입하면 $a=3$ 임을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 $a+b$ 의 값은

$$a+b=5$$

이다.

답 ③

1) [다른 풀이]

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 (x-1)f(x)dx$$

\rightarrow

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 xf(x)dx$$

\rightarrow

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_1^2 xf(x)dx$$

로 바꿔 계산하면 계산이

훨씬 간단해진다.

09

풀이

문제에서

“곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선이 원점을 지날 때”

라는 표현은

- ① 곡선 $y = g(x)$ 가 $(2, 1)$ 을 지나고
- ② 원점과 점 $(2, 1)$ 사이의 평균변화율이 $g'(2)$ 와 같다.

는 것을 의미한다. 따라서

$$\textcircled{1} \quad g(2) = (2-1)f(2) = f(2) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{g(2)-0}{2-0} = \frac{1}{2} = g'(2)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} = f(2) + f'(2) = 1 + f'(2) \quad (\because f(2) = 1)$$

$$\therefore f'(2) = -\frac{1}{2}$$

이다. 따라서 $f'(2)$ 의 값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

답 ⑤

10

풀이

주어진 식을 정리하면

$$a_{n+1} = (a_n)^2 - 6a_n + 9 \quad \rightarrow \quad a_{n+1} = (a_n - 3)^2$$

이다. 이때, 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 를 대입하면

$$a_{n+1} = (a_n - 3)^2$$

$$\rightarrow a_2 = (5-3)^2 = 4$$

$$\rightarrow a_3 = (4-3)^2 = 1$$

$$\rightarrow a_4 = (1-3)^2 = 4$$

⋮

이므로 $a_8 = a_{10} = 4$, $a_9 = 1$ ¹⁾임을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는

$$a_8 + a_9 + a_{10}$$

의 값은 9이다.

답 ④

1) 임의의 자연수 k 에 대하여

$$a_{2k} = 4, \quad a_{2k+1} = 1$$

이 반복되는 것을 나열해 보며 알아낼 수 있다.

11

풀이

ㄱ. 시각 $t=3$ 일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

주어진 $v(t)$ 의 식을 인수분해를 하면

$$\begin{aligned} v(t) &= 3t^2 - 4t - 15 \\ &= (t-3)(3t+5) \end{aligned}$$

이므로 $t=3$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀐다. 따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 시각 $t=5$ 일 때 점 P는 원점을 다시 지난다.

시각 t 에서의 점 P의 위치 $x(t)$ 를 구하기 위해 $v(t)$ 를 적분하면

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (3t^2 - 4t - 15) dt \\ &= t^3 - 2t^2 - 15t + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이다. 시각 $t=0$ 일 때 점 P는 원점을 지나므로 $C=0$ 이다.

따라서 $t=5$ 일 때 점 P의 위치는

$$x(5) = 5^3 - 2 \times 5^2 - 75 = 0$$

이므로 $t=5$ 일 때 점 P는 원점을 다시 지나므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 시각 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는 72이다.

점 P가 $t=3$ 에서 운동 방향이 바뀌므로 시각 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 |v(t)| dt &= \int_0^3 -v(t) dt + \int_3^5 v(t) dt \\ &= \int_0^3 (-3t^2 + 4t + 15) dt + \int_3^5 (3t^2 - 4t - 15) dt \\ &= [-t^3 + 2t^2 + 15t]_0^3 + [t^3 - 2t^2 - 15t]_3^5 \\ &= 72 \end{aligned}$$

이므로 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

12

풀이

주어진 등식 $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ 에서 시그마를 직접 나열해 보면

$$(\text{좌변}) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

$$(\text{우변}) = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

이다. 이때

$$(\text{좌변}) = (\text{우변})$$

$$\rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

$$\rightarrow a_1 + a_3 + \dots = -a_1 - a_3 - \dots \quad (\because \text{짝수 항은 약분되어 사라짐})$$

$$\rightarrow a_1 + a_3 + \dots = 0$$

$$\rightarrow \text{홀수 항의 합이 } 0$$

임을 알 수 있다.

또한, 홀수 항의 합이 0이라는 것은 어떤 자연수 k 에 대하여

$$a_1 + \dots + a_{2k-1} = 0$$

이라는 것이고, $a_1 + \dots + a_{2k-1} = 0 \rightarrow a_k = 0$ (\because 등차중항) 이므로 $a_k = 0$ 인 자연수 k 에 대하여 $n = 2k - 1$ 일 때 문제에서 주어진 등식을 만족시키는 것을 알 수 있다.

또한, $n = 2k$ 일 때도 좌변과 우변에서 a_{2k} 가 약분되어 사라지므로

$$n = 2k - 1 \text{ 일 때 등식을 만족시키면 } n = 2k \text{ 일 때도 등식을 만족시킴}$$

을 알 수 있다.

따라서

$$(\text{조건을 만족시키는 모든 } n \text{ 의 값의 합})$$

$$= (2k - 1) + 2k = 4k - 1 = 11$$

$$\rightarrow k = 3$$

이므로 $a_3 = 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 6$ 이고 $a_3 = 0$ 인 등차수열이므로 공차 d 에 대하여 $a_3 - a_1 = 2d = -6 \rightarrow d = -3$ 임을 알 수 있다.

$$\therefore a_7 = a_3 - 4d = -12$$

답 ②

13

풀이

주어진 조건의 식

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} + \frac{|x-1|}{x-1} \right\} = 0$$

이 모든 실수 a 에 대하여 성립해야 한다. 이때 절댓값이 씌워진 함수는

$$f(x) \text{ 와 } x-1$$

이므로 두 가지를 생각해 보아야 한다.

- ① $|f(x)| \rightarrow f(x) = 0$ 인 상황
- ② $|x-1| \rightarrow x=1$ 인 상황

먼저 $x=1$ 인 상황부터 생각해 보자. $a=1$ 일 때 주어진 극한식을 좌극한과 우극한으로 나누어 생각해 보면

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} + \frac{x-1}{x-1} \right\} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} + 1 \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|f(x)|}{f(x)} = -1 \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} + \frac{-(x-1)}{x-1} \right\} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} - 1 \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = 1 \dots \textcircled{2}$$

이다. $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에 의해서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 부호 변화가 양수에서 음수로 바뀐다.

이때 $f(x)$ 가 $x=1$ 외에 다른 지점에서 부호가 바뀐다고 가정하고
 그 지점의 x 좌표를 k 라 해보자. 가령 함수 $f(x)$ 의 부호가 음수에서 양수로
 바뀌고 $k > 1$ 이라 하면

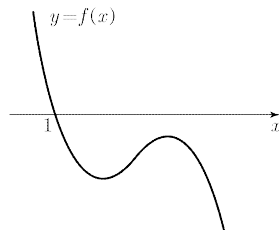
$$\lim_{x \rightarrow k} \left\{ \frac{|f(x)|}{f(x)} + \frac{|x-1|}{x-1} \right\} = 0$$

$$\textcircled{1} \ x < k \text{ 일 때} : \lim_{x \rightarrow k^-} \left\{ \frac{-f(x)}{f(x)} + 1 \right\} = 0 \rightarrow \text{성립}$$

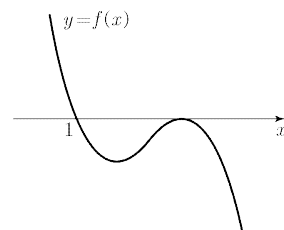
$$\textcircled{2} \ x > k \text{ 일 때} : \lim_{x \rightarrow k^+} \left\{ \frac{f(x)}{f(x)} + 1 \right\} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{모순}$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 이외의 점에서 부호 변화가 있으면 모순이고
 $x=1$ 에서 부호가 양수에서 음수로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가
 음수이다. 즉 곡선 $y=f(x)$ 는 다음과 같이 두 개의 개형이 가능하다.¹⁾

1) 원래는 더 많은 개형이
 존재할 수 있지만,
 시험장에서 모든 그래프의
 개형을 다 따져보기에는
 시간이 부족하니 본문의
 2가지 경우 정도만 다루어도
 충분하다.



(i) x 축과의 교점이 한 개일 때



(ii) x 축과의 교점이 두 개일 때

이때 문제에서 $f(3) = 0$ 이라 했으므로 (ii)의 개형이 가능하다.
 따라서 $f(x)$ 의 식을 세워보면

$$f(x) = p(x-1)(x-3)^2$$

이고 $f'(0) = -5$ 이므로 미분하면

$$f(x) = p(x-1)(x-3)^2$$

$$\rightarrow f'(x) = p(x-3)^2 + 2p(x-1)(x-3)$$

$$\rightarrow f'(0) = 9p + 6p$$

$$\rightarrow 15p = -5$$

$$\therefore p = -\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x-3)^2$ 이므로 $f(6)$ 의 값은 -15 이다.

답 ②

14

풀이

문제의 조건에서 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$ 이므로, 점 P와 Q는

선분 AB의 삼등분 점

이다.

점 A → (곡선 $y=f(x)$ 와 y 축의 교점)

점 B → (곡선 $y=g(x)$ 와 x 축의 교점)

이다. 따라서 점 A, B의 좌표는

(점 A의 좌표) → $(0, f(0)) = (0, 1+a)$

(점 B의 좌표) → $(\pi, 0)$

이다. 이때, x 좌표는 미지수가 없으므로 점 P와 Q의 x 좌표도 바로

$$\text{(점 P의 } x \text{좌표)} = \frac{1}{3}\pi, \text{(점 Q의 } x \text{좌표)} = \frac{2}{3}\pi$$

로 결정된다.

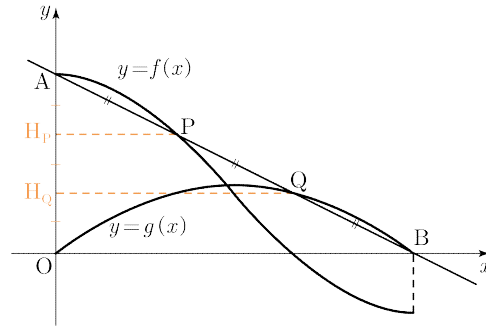
점 P는 함수 $y=f(x)$ 위의 점이고, 점 Q는 함수 $y=g(x)$ 위의 점이므로
점 P와 Q의 좌표는 각각

$$\text{(점 P의 좌표)} = \left(\frac{1}{3}\pi, f\left(\frac{1}{3}\pi\right) \right) = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}+a \right)$$

$$\text{(점 Q의 좌표)} = \left(\frac{2}{3}\pi, g\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}b \right)$$

이다.

이때, 점 P와 Q에서 y 축에 내린 수선의 발을 각각 H_P , H_Q 라고 하면, 아래 그림과 같이 $\overline{AH_P} = \overline{H_P H_Q} = \overline{H_Q O}$ 가 성립한다.



이때, 선분 AH_P 의 길이는 (점 A의 y 좌표) - (점 H_P 의 y 좌표) = $\frac{1}{2}$ 이므로,

$$(\text{점 A의 } y\text{좌표}) = 3 \times (\text{선분 } AH_P \text{의 길이}) = \frac{3}{2} = 1+a \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(\text{점 Q의 } y\text{좌표}) = (\text{선분 } AH_P \text{의 길이}) = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b \rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. 따라서 정답은 $a \times b = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

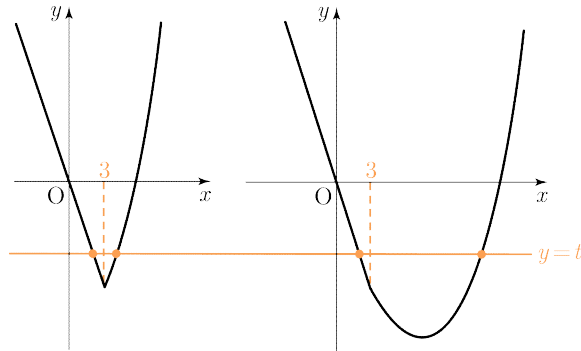
답 ①

15

풀이

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프로 가능한 개형을 그려가면서 문제의 박스 조건에 부합하지 않는 경우를 배제해 나가자.

우선, 아래 그림과 같이 함수 $g(x)$ 가 극소인 지점을 단 1개만 갖는 경우엔 박스 조건을 만족하는 실수 t 가 무한히 많이 존재하게 된다.

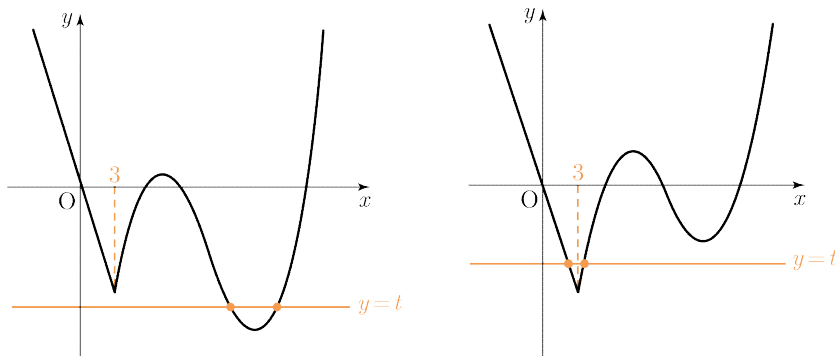


따라서, 함수 $g(x)$ 는 적어도 2개의 극소점을 가져야 한다.

삼차함수 $f(x)$ 는 하나의 극소점만을 가지기 때문에, 함수 $g(x)$ 가 2개의 극소점을 가지기 위해선 $x=3$ 인 지점에서 하나의 극소점이 더 생겨야 한다. 이로부터 해당 지점에서

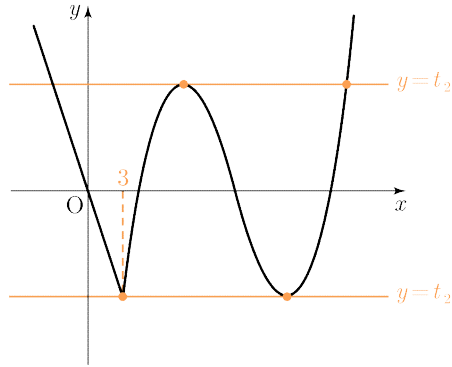
$$f'(3) > 0 \text{ 이어야 하고, 삼차함수 } f(x) \text{의 극대점과 극소점이 모두 } x \geq 3 \text{의 범위에 존재}$$

함을 알 수 있다. 또한, 아래 그림과 같이 함수 $g(x)$ 의 두 극솟값이 일치하지 않는 경우에도 박스 조건을 만족하는 실수 t 가 무한히 많이 존재하게 된다.



따라서, 함수 $f(x)$ 는 극솟값 -9 를 가짐을 알 수 있다. 또한, 함수 $f(x)$ 의 극댓값 또한 0보다 커야 함을 알 수 있다.

앞에서 구한 정보들을 기반으로 조건을 만족하는 함수 $g(x)$ 의 그래프를 그려보면 아래와 같이 그려진다.



이를 기반으로 함수 $f(x)$ 의 식을 세워보면 다음과 같다.

$$f(x) = (x-3)(x-k)^2 - 9$$

문제의 조건에서 $f(4) = 0$ 이므로, 이를 위 함수 $f(x)$ 의 식에 대입하면

$$f(4) = (4-3)(4-k)^2 - 9 = 0 \rightarrow k=1 \text{ 또는 } k=7$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 $x \geq 3$ 의 범위에서 극소를 가져야 하므로 $k=7$ 이어야 한다.

따라서 $f(x) = (x-3)(x-7)^2 - 9$ 이므로 정답은 $f(10) = 7 \times 3^2 - 9 = 54$ 이다. ¹⁾

답 ③

1) 극댓값이 실제로 0 이상인지 확인해야 한다고 생각할 수 있지만, 이미 $x=7$ 에서 극소이고 $f(4)=0$ 임을 알고 있으므로 검증이 완료된 상태이다.

16

풀이

방정식 $\log_9(x+16) = \log_9 x + \frac{1}{2}$ 을 정리하면

$$\log_9(x+16) - \log_9 x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \log_9 \frac{x+16}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{x+16}{x} = 3$$

$$\therefore x = 8$$

이다. 따라서 답은 8이다.

답 8

17

풀이

함수 $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 에 대하여

$$F(2) - F(0) = \int_0^2 f(x) dx$$

이므로

$$\begin{aligned} F(2) - F(0) &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 + 6x + 1) dx \\ &= [x^3 + 3x^2 + x]_0^2 \\ &= (2^3 + 3 \times 2^2 + 2) - 0 \\ &= 8 + 12 + 2 = 22 \end{aligned}$$

이다. 따라서 답은 22이다.

답 22

18

풀이

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = 3a_{n+1}$$

을 만족시킨다. 이는 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ 을 의미하므로, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다. 따라서

$$a_5 = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{a_1}{81}$$

이다. 이때 $a_5 = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{81} &= \frac{1}{3} \\ \rightarrow a_1 &= \frac{81}{3} = 27 \end{aligned}$$

이다. 따라서 답은 27이다.

답 27

19

풀이

함수 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 27$ 의 극솟값을 구하기 위해 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3ax^2 + 27 \\ \rightarrow f'(x) &= 6x^2 - 6ax = 6x(x-a) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = a$ 이다. 이때 $x = 0$ 에서 $f(0) = 27$ 이므로 $x = 0$ 에서 극솟값을 갖지 않는다. 따라서 함수

$$f(x) \text{는 } x = 0 \text{에서 극댓값 } 27, \quad x = a \text{에서 극솟값 } 0$$

을 가지므로

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \rightarrow 2a^3 - 3a^3 + 27 &= 0 \\ \rightarrow a^3 &= 27 \quad \therefore a = 3 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $f'(5) = 30(5-3) = 60$ 임을 알 수 있다.

답 60

20

풀이

먼저 주어진 그림에 두 점 P_1 과 P_2 를 그려보자. 원의 중심을 O 라 할 때,

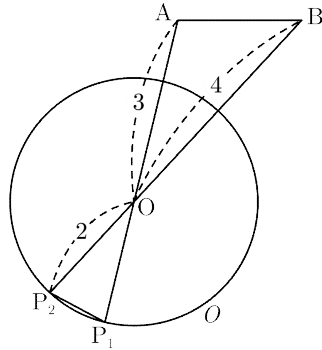
① \overline{AP} 가 최대가 되려면

: 선분 AP 가 점 O 를 지나야 하고 그때의 점 P 가 P_1 이다.

② \overline{BP} 가 최대가 되려면

: 선분 BP 가 점 O 를 지나야 하고 그때의 점 P 가 P_2 이다.

따라서 주어진 그림에 두 점 P_1 과 P_2 를 그리고 두 선분 AP_1 , BP_2 를 그려주면 다음과 같다.



이때 원의 반지름이 2이므로 $\overline{AO} = 3$ 이고 $\overline{BO} = 4$ 이다. 또한 삼각형 OP_1P_2 는 $\overline{OP_1} = 2$, $\overline{OP_2} = 2$, $\overline{P_1P_2} = 1$ 로 세 변의 길이가 정해진 결정삼각형이므로 $\angle P_1OP_2 = \theta$ 라 하고 코사인법칙을 사용하면

$$4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos \theta = 1$$

$$\rightarrow 8 - 8 \cos \theta = 1$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{7}{8}$$

이다. 따라서 삼각형 BOP_1 이 세 요소

$$\overline{OP_1} = 2, \overline{OB} = 4, \cos(\angle BOP_1) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -\frac{7}{8}$$

가 정해진 결정삼각형이므로 코사인법칙을 사용하면

$$4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \left(-\frac{7}{8}\right) = (\overline{BP_1})^2$$

$$\rightarrow 20 + 14 = 34 = (\overline{BP_1})^2$$

$$\therefore \overline{BP_1} = \sqrt{34}$$

이다.

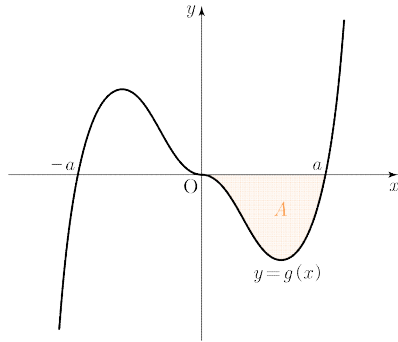
21

풀이

우선 (가) 조건을 분석해 보면, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프가 **원점에 대하여 대칭**임을 알 수 있다. 또한, (가) 조건의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0)+g(0)=2g(0)=0 \rightarrow g(0)=0$$

임을 알 수 있다. 함수 $g(x)$ 가 $x \geq 0$ 의 범위에서 x^4-ax^3+b 이므로, $x=0$ 을 대입하면 $b=0$ 이다. 따라서 함수 $g(x)$ 의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



곡선 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 위 그림의 영역 A 의 면적의 2배이다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2 \times (\text{영역 } A \text{의 면적}) &= 2 \times \left| \int_0^a (x^4 - ax^3) dx \right| \\ &= 2 \times \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a}{4}x^4 \right]_0^a \right| \\ &= \frac{1}{10}a^5 = \frac{16}{5} \rightarrow a=2 \end{aligned}$$

이제 $|f(a)|=|f(2)|$ 의 값을 구해보자. (가) 조건의 $g(x)+g(-x)=0$ 식은 모든 실수 x 에 대해 성립하므로 $x \geq 0$ 일 때도 성립한다. 이때의 $g(x)$ 의 식을 대입하면

$$x^4 - 2x^3 + f(-x) = 0 \rightarrow f(x) = -x^4 - 2x^3$$

이며, 따라서 구하는 $|f(2)|$ 의 값은

$$|f(2)| = |-2^4 - 2 \times 2^3| = 32$$

이다.

답 32

22

풀이

1) 이와 같은 문제 상황은 여러 기출 (2025학년도 수능 20번, 2026학년도 6월 22번, 2026학년도 9월 미적분 28번 등)에서 접해본 바 있다.

우선, 문제에서 정의된 점 A와 B는 다항함수와 지수함수, 로그함수의 교점이므로 일반적인 방법으로는 좌표를 구할 수 없다. 이럴 때는 두 점 사이의 관계식을 구하여 문제를 해결한다. ¹⁾

점 A의 좌표를 (p, q) 라고 정의하자. 이때 점 A는 직선 $y = 2x + 5$ 위의 점이므로 다음 식이 성립한다.

$$q = 2p + 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

이제 점 A를 x 축 방향으로 m , y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점을 점 B라고 하자. 그러면, 점 B의 좌표는

$$(\text{점 B의 좌표}) = (p + m, q + n)$$

이고, 점 B는 직선 $y = 2x - 5$ 위의 점이므로 다음 식이 성립한다.

$$q + n = 2(p + m) - 5 \quad \cdots \text{㉡}$$

따라서 두 식 ㉠, ㉡를 연립하면 다음 관계식을 하나 얻을 수 있다.

$$2m - n = 10 \quad \cdots \text{㉢}$$

또한, $\overline{AB} = 5$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 25 \quad \cdots \text{㉣}$$

이다. 두 식 ㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $m = 3, n = -4$ 이거나 $m = 5, n = 0$ 이고 문제의 조건으로부터 직선 AB의 기울기가 음수이므로, $m = 3, n = -4$ 이다.

이제 k 의 값을 구하자. 점 A의 좌표를 $(p, 2p + 5)$ 라고 두면 점 B의 좌표는 $(p + 3, 2p + 1)$ 이다.

이를 각각 곡선 $y = -\log_2 x$ 의 식과 $y = k \times 4^{-x} + 1$ 의 식에 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$2p + 5 = -\log_2 p$$

$$k \times 4^{-p-3} + 1 = 2p + 1 \rightarrow k \times 2^{-2p-6} = 2p$$

$$\rightarrow k \times 2^{(-2p-5)-1} = 2p$$

$$\rightarrow k \times p \times \frac{1}{2} = 2p$$

따라서 $k = 4$ 이다.

23

풀이

다항식 $(x^2+2)^6$ 의 전개식에서 x^8 의 계수를 구하면

$$\begin{aligned} & {}_6C_4(x^2)^4 \times (2)^2 \\ &= 60x^8 \end{aligned}$$

이므로 답은 60이다.

답 ⑤

24

풀이

조건부확률의 정의에 의해

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

이므로 문제의 $P(A|B) = P(B)$ 는

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(B) \\ \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= P(B) \\ \rightarrow P(A \cap B) &= \{P(B)\}^2 \end{aligned}$$

이다. 이때 $P(B) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \{P(B)\}^2 = \frac{1}{4}$$

임을 알 수 있다. $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ 는 확률의 덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \rightarrow \frac{2}{3} &= P(A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ \rightarrow P(A) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

이다. 따라서 답은 ②이다.

답 ②

25

풀이

문제의 조건에 의해 1학년 학생의 양 옆에 모두 같은 학년의 학생이 앉아야 한다. 이때 어떤 학년의 학생이 앉는지에 따라 경우를 나눌 수 있다.

(i) 1학년 학생의 양 옆에 2학년 학생 2명이 앉는 경우

1학년 학생과 2학년 학생 2명을 하나의 묶음으로 생각하면, 묶음 내부에서 1학년 학생은 가운데에 고정되고, 2학년 학생 2명의 자리를 바꾸면 경우의 수는

$$2! = 2$$

이다. 이때 이 묶음과 나머지 3학년 학생 3명을 원탁에 배열하는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$ 이다. 따라서 이 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

이다.

(ii) 1학년 학생의 양 옆에 3학년 학생 2명이 앉는 경우

3학년 학생 3명 중 2명을 선택하여 1학년 학생의 양 옆에 앉히는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

이다. 이 묶음과 나머지 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명을 원탁에 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이므로 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 이다.

(i)과 (ii)에서 구하고자 하는 경우의 수는

$$12 + 36 = 48$$

이므로 답은 48 이다.

답 ①

26

풀이

주어진 신뢰구간

$$\bar{x} + c \leq m \leq \bar{x} + 2c + 2.94$$

에서

① 신뢰구간의 양 끝의 합은 $2\bar{x}$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} (\bar{x} + c) + (\bar{x} + 2c + 2.94) &= 2\bar{x} \\ \rightarrow 2\bar{x} + 3c + 2.94 &= 2\bar{x} \\ \rightarrow 3c &= -2.94 \\ \therefore c &= -0.98 \end{aligned}$$

이다.

② 신뢰구간의 길이가 $2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$$\begin{aligned} |2c| &= 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \rightarrow 0.98 &= 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

이다. 이때 $\sigma = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} 0.98 &= 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \\ \rightarrow \sqrt{n} &= \frac{1.96 \times 5}{0.98} = 2 \times 5 = 10 \\ \therefore n &= 100 \end{aligned}$$

이다. 따라서 답은 100이다.

답 ③

27

풀이

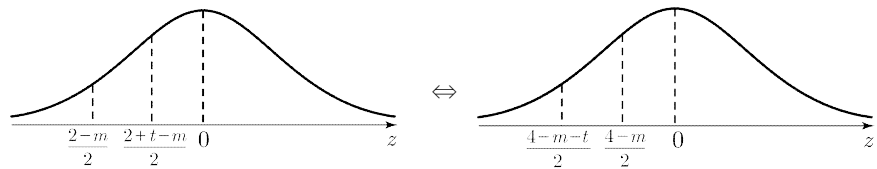
먼저 주어진 식 $P(2 \leq X \leq 2+t) = P(7-t \leq Y \leq 7)$ 을 표준화하면

$$P(2 \leq X \leq 2+t) = P(4-t \leq Y \leq 4)$$

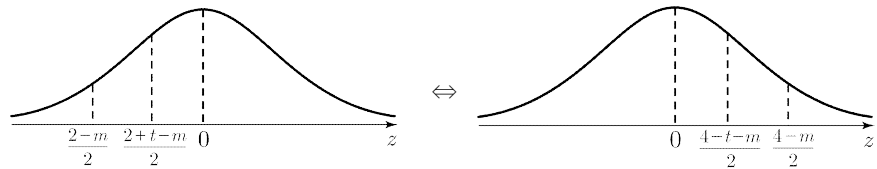
$$\rightarrow P\left(\frac{2-m}{2} \leq Z \leq \frac{2+t-m}{2}\right) = P\left(\frac{4-t-m}{2} \leq Z \leq \frac{4-m}{2}\right)$$

이다. 이때 좌변과 우변이 같은 경우는 다음 두 가지 경우가 가능하다.

① 구간의 양 끝이 같다.



② 좌변의 구간의 양 끝 값과 우변의 양 끝 값이 평균을 기준으로 대칭이다.



각각의 경우를 조사해 보자.

① 구간의 양 끝이 같은 경우

구간의 왼쪽 끝이 같은 경우를 조사하면

$$\frac{2-m}{2} = \frac{4-t-m}{2}$$

$$\rightarrow 2-m = 4-t-m$$

$$\therefore t=2$$

이다. 따라서 $t=2$ 일 때만 성립하므로 모순이다.

② 평균을 기준으로 대칭

좌변의 왼쪽 끝과 우변의 오른쪽 끝이 평균을 기준으로 대칭이어야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{2-m}{2} &= -\left(\frac{4-m}{2}\right) \\ \rightarrow 2-m &= m-4 \\ \therefore m &= 3 \end{aligned}$$

이다. 따라서 확률변수 X 의 평균은 3이고 확률변수 Y 의 평균은 6이다. 이제 구하고자 하는 식 $P(Y \geq 4) - P(X \geq 4)$ 을 표준화하면

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) - P(X \geq 4) \\ \rightarrow P(Z \geq -1) - P\left(Z \geq \frac{1}{2}\right) \\ \rightarrow 0.8413 - 0.3085 = 0.5328 \end{aligned}$$

이므로 답은 0.5328이다.

답 ④

28

풀이

먼저 조건을 해석해 보자. (가) 조건과 (나) 조건에 모두 검은색 카드가 들어 있으므로 학생들이 받는 검은색 카드의 개수를 순서쌍 (a, b, c, d) 로 표현하고 그 순서쌍에 따라 경우를 나누어 보자.

(i) 네 명의 학생이 받는 검은색 카드가 $(4, 0, 0, 0)$ 인 경우

먼저 검은색 카드 4개를 받을 학생 1명을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

이다. 이 학생을 A라 하면, 학생 B, C, D는 검은색 카드를 받지 못한다. 따라서 조건 (가)에 의해 B, C, D는 빨간색 카드도 받을 수 없으므로, A가 빨간색 카드 2장을 모두 가져야 한다. 이때 B, C, D는 카드를 하나도 받지 못한 상태이므로, 남은 파란색 카드 2개를 B, C, D가 각각 1장 이상씩 나누어 가져야 한다. 이때 파란색 카드는 2장이므로 세 명에게 나누어 줄 수 없다. ∴ 모순

(ii) 네 명의 학생이 받는 검은 색 카드가 (3, 1, 0, 0) 인 경우

검은색 카드 3장을 받을 학생과 1장을 받을 학생을 정하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

이다. 카드 3장을 받은 학생을 A, 1장을 받은 학생을 B, 받지 못한 학생을 C, D라 하자. 조건 (가)에 의해 학생 C, D는 빨간색 카드를 받을 수 없으므로, 빨간색 카드 2장은 A와 B에게 나누어 주어야 한다. 이 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

이다. 이때 조건 (나)에 의해 학생 B는 파란색 카드를 받을 수 없으므로, 파란색 카드 2장은 학생 A, C, D에게 나누어 주어야 한다. 이때 C와 D는 현재 카드가 없으므로 반드시 1장 이상의 카드를 받아야 한다. 따라서 학생 C와 D가 파란색 카드를 1장씩 받고 학생 A는 받지 않는 경우만 가능하다. 이 경우의 수는 1이므로 총 경우의 수는

$$12 \times 3 \times 1 = 36$$

이다.

(iii) 네 명의 학생이 받는 검은 색 카드가 (2, 2, 0, 0) 인 경우

검은색 카드 2장을 받을 학생 2명을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

이다. 카드 2장을 받은 학생을 A, B, 받지 못한 학생을 C, D라 하자. 조건 (가)에 의해 학생 C, D는 빨간색 카드를 받을 수 없으므로, 빨간색 카드 2장은 학생 A와 B에게 나누어 주어야 한다. 이 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

이다. 이때 파란색 카드 2장은 모든 학생에게 나누어 줄 수 있고 학생 C와 D는 현재 카드가 없으므로 반드시 1장 이상의 카드를 받아야 한다. 따라서 학생 C와 D가 파란색 카드를 1장씩 받고 A, B는 받지 않는 경우만 가능하다. 이 경우의 수는 1이므로 모든 경우의 수는

$$6 \times 3 \times 1 = 18$$

이다.

(iv) 네 명의 학생이 받는 검은 색 카드가 (2, 1, 1, 0) 인 경우

검은색 카드 2장을 받을 학생 1명, 받지 못할 학생 1명을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$$

이다. 카드 2장을 받은 학생을 A, 1장씩 받은 학생을 B, C, 받지 못한 학생을 D 라 하자. 조건 (가)에 의해 학생 D는 빨간색 카드를 받을 수 없으므로, 빨간색 카드 2장은 학생 A, B, C에게 나누어 주어야 한다. 이 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

이다. 이때 조건 (나)에 의해 학생 B, C는 파란색 카드를 받을 수 없으므로, 파란색 카드 2장은 학생 A와 D에게 나누어 주어야 한다. 이때 학생 D는 현재 카드가 없으므로 반드시 1장 이상의 카드를 받아야 한다. 따라서 학생 D가 1장 또는 2장을 갖는 경우가 가능하다. 이 경우의 수는

$${}_2H_2 - 1 = {}_3C_2 - 1 = 2$$

이므로 모든 경우의 수는 $12 \times 6 \times 2 = 144$ 이다.

(v) 네 명의 학생이 받는 검은 색 카드가 (1, 1, 1, 1) 인 경우

모든 학생이 검은색 카드를 1장씩 받으면 조건 (나)에 의해 모든 학생은 파란색 카드를 받을 수 없다. ∴ **모순**

따라서 (i), ... , (v)에 의해 구하는 모든 경우의 수는 $36 + 18 + 144 = 198$ 이다.

답 ②

29

풀이

먼저 두 개의 주사위를 던져 나온 두 눈의 곱이 짝수인 사건을 A, 홀수인 사건을 B라 하고 두 사건의 확률을 구해보자. 두 눈의 곱이 홀수이려면 두 눈이 모두 홀수이어야 하므로 사건 B가 일어날 확률은

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

이다. 이때 사건 A는 사건 B의 여사건이므로, 사건 A가 일어날 확률은

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

이다. 이제 3번의 시행 후 점 P의 좌표를 식으로 나타내보자.

시행을 3번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X 라 하면 사건 B가 일어나는 횟수는 $3-X$ 번이다. 이때 점 P는 사건 A가 일어나면 양의 방향으로 1만큼, 사건 B가 일어나면 음의 방향으로 2만큼 움직이므로 원점에서 출발한 점 P의 3번의 시행 후 좌표는

$$1 \times X + (-2) \times (3 - X) = X - 6 + 2X \\ = 3X - 6$$

이다. 따라서 문제에서 구하고자 하는 점 P의 좌표가 0이상일 확률은

$$P(3X - 6 \geq 0) = P(X \geq 2)$$

이므로 3번의 시행 중 사건 A가 2번 또는 3번 일어나야 함을 알 수 있다. 이때 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행은 독립시행이므로 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 사건 A가 2번 일어날 확률 ($X=2$)

확률을 구하면

$${}_3C_2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

이다.

(ii) 사건 A가 3번 일어날 확률 ($X=3$)

확률을 구하면

$${}_3C_3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{27}{64} \times 1 = \frac{27}{64}$$

이다.

따라서 (i)과 (ii)에서 점 P의 좌표가 0이상일 확률은

$$\frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$$

이므로 $p+q=32+27=59$ 이다.

30

풀이

먼저 확률변수 X 를 해석해 보자. 상자 B에 있는 공에 적힌 수의 합이 처음으로 짝수가 되려면

- 상자 B에 들어 있는 공의 합이 홀수인 상황에서
- A에서 홀수가 있는 공을 뽑아서
- 상자 B에 “뽑은 홀수가 적힌 공”을 넣어야

한다. 이때 상자 A에 있는 홀수가 적힌 공은 3이 적힌 공뿐이므로 시행 횟수 X 는 3을 처음으로 뽑을 때까지의 시행 횟수이다. 즉, 확률변수 X 는

상자 A에서 숫자 2만 뽑다가 처음으로 3을 뽑을 때까지의 시행 횟수

이다. 또한 조건에서

$$P(X \leq 4) = 1$$

이므로 확률변수 X 의 최댓값은 4이다. 이는 곧 상자 A에 존재하는 모든 2가 적힌 공을 뽑고 처음으로 3이 적힌 공을 뽑으려면 총 4번 뽑아야 한다는 것이다. 따라서

상자 A에는 숫자 2가 적힌 공이 3개, 숫자 3이 적힌 공이 최소 1개 있음

을 알 수 있다. 이때

$$P(X = 4) = \frac{1}{10}$$

이므로 계산하면

$$\begin{aligned}
 P(X = 4) &= \frac{1}{10} \\
 \rightarrow \frac{3}{3+n} \times \frac{2}{2+n} \times \frac{1}{1+n} \times \frac{n}{n} &= \frac{1}{10} \\
 \rightarrow \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{10} \\
 \therefore n &= 2
 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 P(X = 1) &= \frac{2}{5} \\
 P(X = 2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \\
 P(X = 3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포표를 작성해보면

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

이다. 문제에서 구하고자 하는 $(m+n) \times E(X)$ 의 값을 구하기 위해 $E(X)$ 를 구해보면

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^4 kP(X=k) \\
 &= 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

이다. 따라서 구하고자 하는 $(m+n) \times E(X)$ 의 값은

$$(3+2) \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

이므로 답은 10이다.

답 10

23

풀이

주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{x}{e^x - 1} \times 2 \\ &\rightarrow 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

이므로 정답은 2이다.

답 ④

24

풀이

먼저 곡선 $e^{xy} + y = 3$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기를 구해보자. 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

이다. 이때 점 $(0, 2)$ 를 대입하면

$$e^{0 \times 2} \left(2 + 0 \times \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow 1 \times (2) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -2$$

이므로 접선의 기울기는 -2 이다. 이제 접선의 방정식을 구해보면

$$y - 2 = -2(x - 0)$$

$$\rightarrow y = -2x + 2$$

이고 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = -2x + 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

이므로 정답은 1이다.

답 ①

25

풀이

먼저 주어진 식에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{3n+1} \right) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n+1} = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 3$$

이므로 구하려는 극한값을 정리하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1}-n)a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n^2+1}+n} \end{aligned}$$

이다. 이때 분모와 분자를 n 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n^2+1}+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 극한값은

$$\frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}$$

이므로 정답은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ②

26

풀이

곡선 $y = (x-1)e^{x-2}$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해야 하므로 먼저 두 점 A, B의 x 좌표를 구해야 한다. 따라서 곡선 $y = (x-1)e^{x-2}$ 와 직선 $y = x-1$ 을 연립하면

$$(x-1)e^{x-2} = x-1 \rightarrow (x-1)(e^{x-2}-1) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이다. 따라서 곡선 $y = (x-1)e^{x-2}$ 와 직선 $y = x-1$ 은 $x=1$ 과 $x=2$ 에서 만난다. 구간 $[1, 2]$ 에서 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S = \int_1^2 |(x-1)e^{x-2} - (x-1)| dx$$

$$= \int_1^2 |(x-1)(e^{x-2}-1)| dx$$

$$= \int_1^2 (x-1 - (x-1)e^{x-2}) dx$$

이다. 각각 연산하면

$$\int_1^2 (x-1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 = (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

이고 $\int_1^2 (x-1)e^{x-2} dx$ 를 구하기 위해 부분적분법을 이용하면

$$\int_1^2 (x-1)e^{x-2} dx = [(x-1)e^{x-2}]_1^2 - \int_1^2 e^{x-2} dx$$

$$= (1 \times e^0 - 0 \times e^{-1}) - [e^{x-2}]_1^2$$

$$= 1 - (e^0 - e^{-1}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e}$$

이다. 따라서 구하는 넓이는

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

이므로 정답은 $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ 이다.

답 ③

27

풀이

먼저 문제에서 주어진 조건 $f(0) = 3$ 을 이용하자. 방정식

$$f(x)f(\pi-x) = \sin x$$

에 $x=0$ 을 대입해 보면,

$$f(0)f(\pi) = 0 \rightarrow 3f(\pi) = 0 \quad (\because f(0) = 3)$$

이다. 따라서 $f(\pi) = 0$ 을 이용하여, $f'(\pi)$ 의 값을 구하기 위해 양변을 x 에 대하여 미분해 보면,

$$f'(x)f(\pi-x) - f(x)f'(\pi-x) = \cos x$$

이고, x 에 0을 대입하면

$$f'(0)f(\pi) - f(0)f'(\pi) = 1 \rightarrow -3f'(\pi) = 1$$

이다. 따라서 $f'(\pi) = -\frac{1}{3}$ 이다.

답 ④

28

풀이

함수 $h(x)$ 의 불연속 후보는 $x=0$ 뿐이므로 $x=0$ 일 때 연속이 되려면

$$f(g(0)) = g(f(0)) \rightarrow f(g(0)) = g(0) \quad (\because f(0) = 0)$$

이어야 한다. 즉, $g(0)$ 은 방정식 $f(x) = x$ 의 실근이므로 $g(0)$ 의 후보로 가능한 값을 찾기 위해 방정식 $f(x) = x$ 을 정리해 보면

$$x^2 e^{-\frac{2x}{e}} = x \rightarrow x \left(x e^{-\frac{2x}{e}} - 1 \right) = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

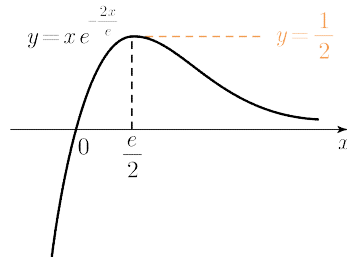
이다. 이제 방정식 $x e^{-\frac{2x}{e}} = 1$ 의 실근을 찾아보자. 해당 방정식은 다항식과 지수식이 섞여 있는 구조이므로 직접 실근을 찾는 것은 어렵다. 대신

$y = x e^{-\frac{2x}{e}}$ 와 직선 $y = 1$ 의 교점을 찾아보자. 먼저 함수 $y = x e^{-\frac{2x}{e}}$ 를 미분해 보면 도함수인 y' 은

$$y' = e^{-\frac{2x}{e}} \left(-\frac{2x}{e} + 1 \right)$$

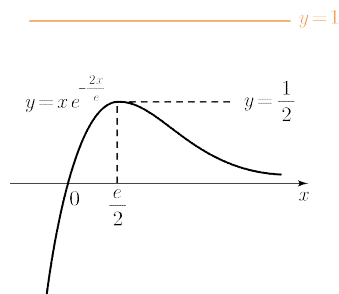
이다. 이때 $e^{-\frac{2x}{e}} > 0$ 이므로 도함수의 부호는 함수 $y = -\frac{2x}{e} + 1$ 의 부호와 같고,

이를 바탕으로 함수 $y = x e^{-\frac{2x}{e}}$ 의 그래프를 그려주면 아래 그림과 같이 $x = \frac{e}{2}$ 에서 극대를 갖는 형태가 된다.



이때 함수 $y = x e^{-\frac{2x}{e}}$ 의 극댓값은 $\left(\frac{e}{2}\right) \times e^{-\frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2}} = \frac{1}{2}$ 이므로 아래 그림과 같이

곡선 $y = x e^{-\frac{2x}{e}}$ 과 직선 $y = 1$ 은 교점을 갖지 않는다.



따라서 앞 장의 식 ㉠을 다시 보면 방정식

$$x\left(xe^{-\frac{2x}{e}} - 1\right) = 0$$

의 실근은 $x=0$ 만 가능하며, $g(0)=0$ 임을 알 수 있다. 이제 박스 안의 조건을 보자.

(가) 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 실수 k 의 개수가 3이다. → 함수 $h(x)$ 의 극점은 3개이다.

(나) 함수 $h(x)$ 는 최댓값 4를 갖는다.

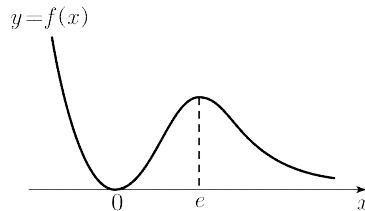
물론, 두 조건 모두 당장 해석하기에는 부담스럽지만, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 바탕으로 해석해야 하는 조건들이므로 먼저 이미 알고 있는 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려보자.

함수 $f(x) = x^2e^{-\frac{2x}{e}}$ 를 미분하면 도함수 $f'(x)$ 는

$$f'(x) = e^{-\frac{2x}{e}} \left(-\frac{2}{e}x^2 + 2x \right)$$

이다. 이때 $e^{-\frac{2x}{e}} > 0$ 이므로 도함수의 부호는 함수 $y = -\frac{2}{e}x^2 + 2x$ 의 부호와

같다. 이를 바탕으로 함수 $y = x^2e^{-\frac{2x}{e}}$ 의 그래프를 그려주면 아래 그림과 같이 $x=0$ 에서 극소, $x=e$ 에서 극대를 갖는 형태로 그려진다.

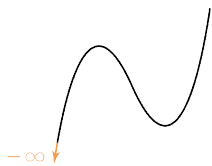


이때 (나) 조건을 보면 함수 $h(x)$ 는 최댓값을 가져야 한다. 함수 $h(x)$ 의 식을 보면

$$h(x) = \begin{cases} f(g(x)) & (x < 0) \\ g(f(x)) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$x < 0$ 일 때 $h(x) = f(g(x))$ 이다. 따라서 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수라면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ 이기 때문에 ¹⁾ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = \infty$ 이 되어 발산하게 된다. 즉, 함수 $h(x)$ 가 최댓값이 존재하지 않게 되므로 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수임을 알 수 있다.

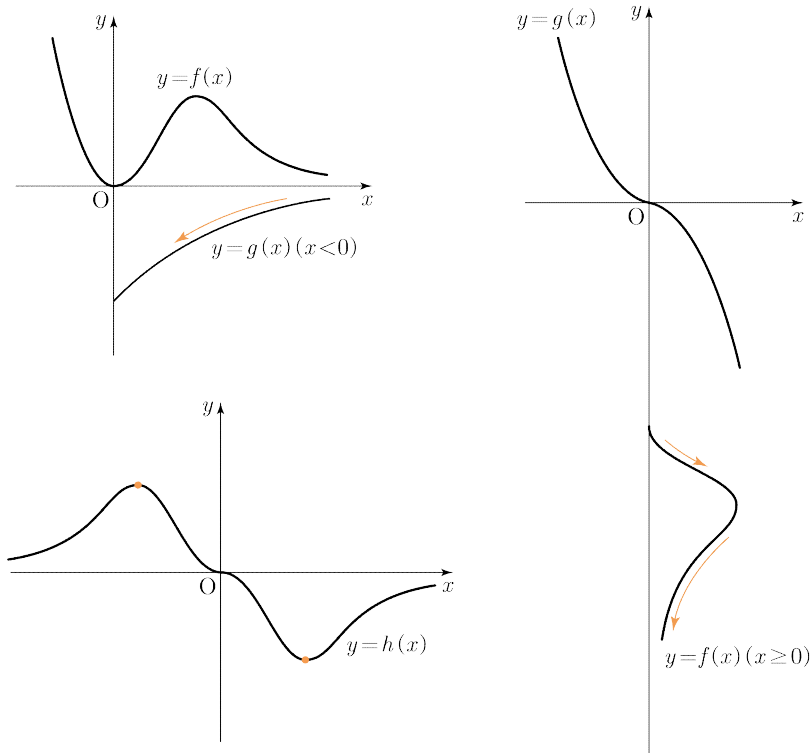
1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ 라는 것이 이해가 가지 않는다면, 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프를 잠깐 떠올려보자.



이제 (가)와 (나)조건을 동시에 고려해서 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 찾아보자.

함수 $f(x)$ 의 그래프는 알지만, $g(x)$ 의 그래프는 알지 못하기 때문에 여러 개형을 시도해 보며 추론해 보아야 한다. 앞에서 $g(0)=0$ 이고 최고차항의 계수가 음수라는 정보를 찾았으니 이를 기반으로 경우를 나누어보자.

먼저 삼차함수 $g(x)$ 가 극점을 가지지 않는 경우를 고려해 보자. 이때, 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 기반으로 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형을 그려보면 아래 그림과 같다.

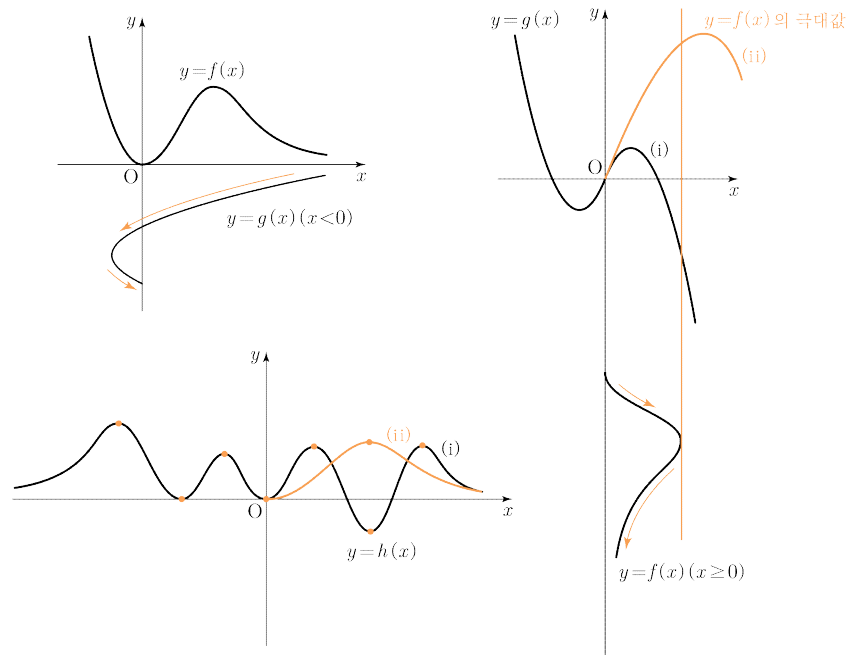


(가) 조건에서 함수 $h(x)$ 는 극점을 3개 가진다고 하였으므로 위 상황은 (가) 조건에 위배됨을 알 수 있다. 따라서 삼차함수 $g(x)$ 가 극대점과 극소점을 가짐을 알 수 있다.

두 번째로 고려해 볼 경우는 삼차함수 $g(x)$ 가 극점을 가지며, 두 극점이 각각 $x < 0$ 인 범위와 $x > 0$ 인 범위 양쪽에 하나씩 위치하는 경우이다. 이때 함수 $h(x)$ 의 그래프는

- (i) 함수 $g(x)$ 의 극대점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 작을지
- (ii) 함수 $g(x)$ 의 극대점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 같거나 클지

에 따라 두 가지 개형을 가지며, 각각의 경우 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.

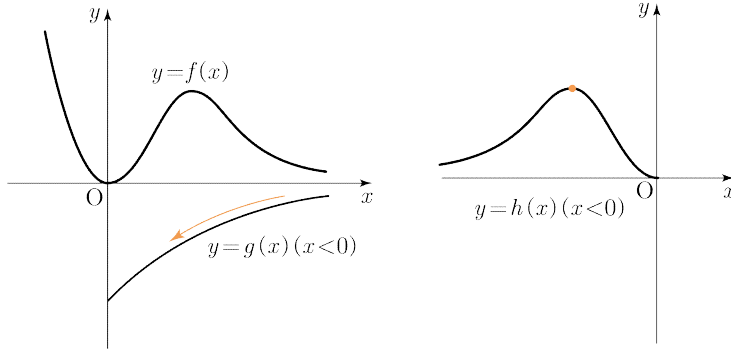


위 그림으로부터 두 경우 모두 극점의 개수가 각각 7개, 5개로 (가) 조건을 만족하지 않음을 알 수 있다.

세 번째로 고려해 볼 경우는 삼차함수 $g(x)$ 의 극점이 $x=0$ 을 기준으로 한쪽에 몰려 있는 경우이다. 이때, 두 극점이 모두 $x < 0$ 인 범위에 몰려있을 경우 함수 $h(x)$ 가 $x < 0$ 인 범위에서 최소 5개의 극점을 가진다는 것을 확인할 수 있으며, 따라서 해당 경우는 (가) 조건을 만족하지 않는다.

따라서 삼차함수 $g(x)$ 의 두 극점이 모두 $x \geq 0$ 인 범위에 몰려있는 경우만 확인해보자.

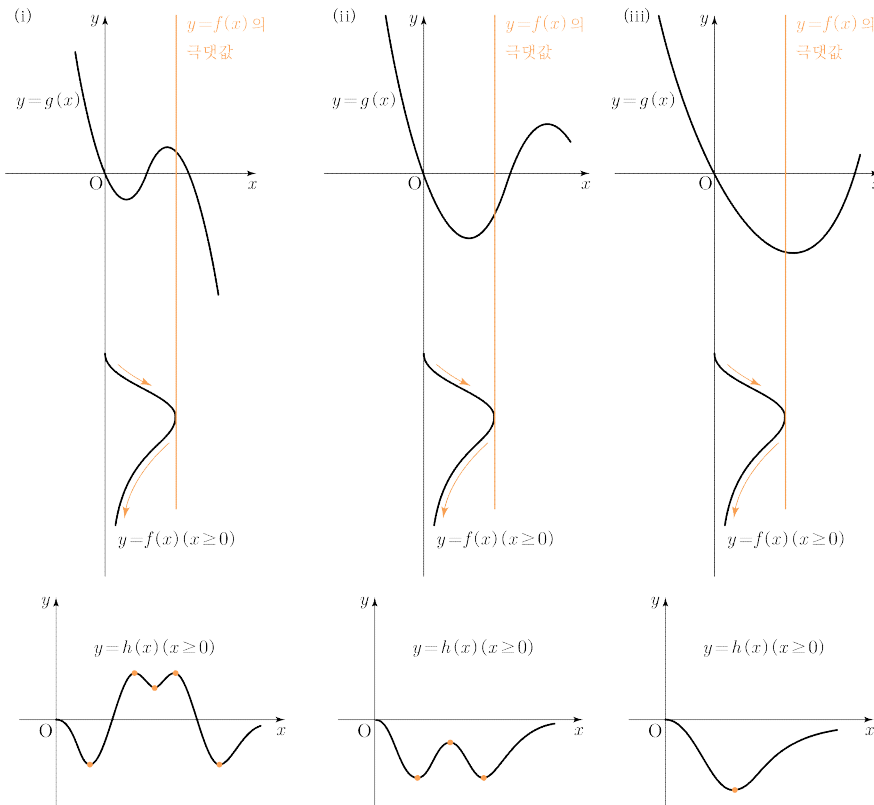
이때, $x < 0$ 인 부분의 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형은 결정되며, 아래 그림과 같다.



이제 $x \geq 0$ 인 범위에서 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형을 그려보자. 이때 함수 $h(x)$ 의 그래프는

- (i) $g(x)$ 의 극대, 극소점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 작은지
- (ii) $g(x)$ 의 극소점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 작은지
- (iii) $g(x)$ 의 극소점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 큰지

에 따라 세 가지 개형을 가지며, 각각의 경우 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.

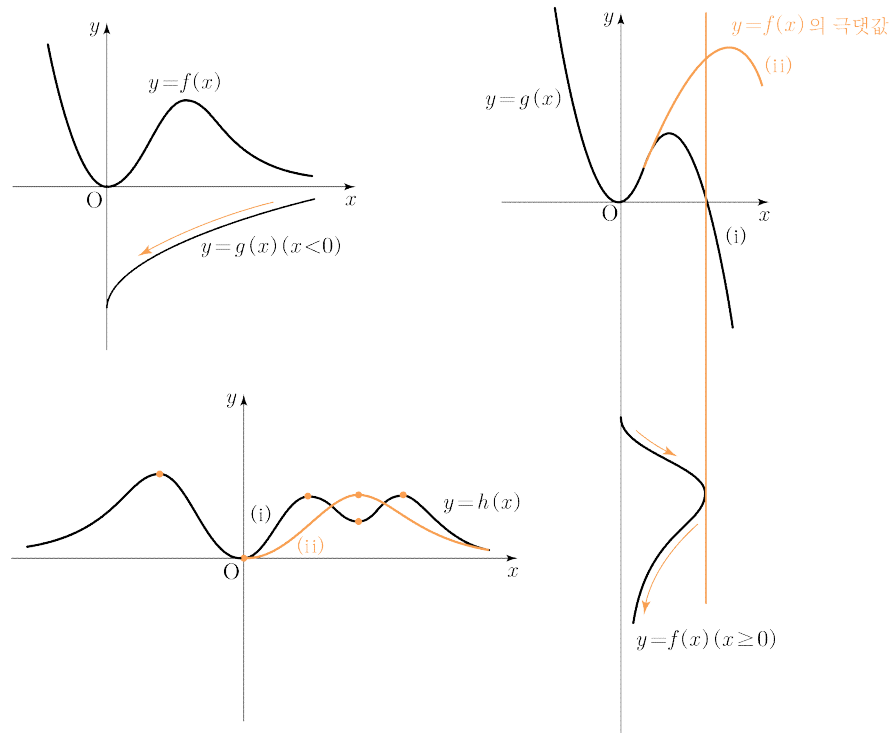


위 그림으로부터 세 경우 모두 극점의 개수가 각각 6개, 4개, 2개로 (가) 조건을 만족하지 않음을 알 수 있다.

이로부터 남는 경우는 $g(0) = 0$ 이 함수 $g(x)$ 의 극소점이 되는 경우 하나뿐이다. 해당 경우에도 함수 $h(x)$ 의 그래프는

- (i) 함수 $g(x)$ 의 극대점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 작을지
- (ii) 함수 $g(x)$ 의 극대점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 같거나 큰지

에 따라 두 가지 개형을 가지며, 각각의 경우 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



위 그림으로부터 함수 $g(x)$ 의 극대점의 x 좌표가 함수 $f(x)$ 의 극댓값보다 같거나 클 때 극점의 개수가 3개가 되고, (가) 조건을 만족함을 알 수 있다.

위 그래프의 개형으로부터 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 함수 $h(x)$ 의 두 극댓값 중 하나임을 알 수 있다. 이때, $x < 0$ 범위에 존재하는 $h(x)$ 의 극댓값은 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 같으므로, 계산해 보면

$$f(e) = 1 < 4$$

이다.

따라서, $x \geq 0$ 범위에 존재하는 $h(x)$ 의 극댓값이 4임을 알 수 있다. 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수를 a ($a < 0$), 극대점의 x 좌표를 k 라고 정의하면, $g(x)$ 의 식은 다음과 같다.

$$g(x) = ax^2\left(x - \frac{3}{2}k\right) \quad (\text{단, } k \geq 1)$$

이때, 함수 $h(x)$ 의 극대는 함수 $f(x)$ 의 극댓값일 때이므로 계산하면

$$g(1) = a\left(1 - \frac{3}{2}k\right) = 4 \rightarrow a = \frac{8}{2-3k}$$

이다. 따라서, $g(-1)$ 의 값은

$$g(-1) = a\left(-1 - \frac{3}{2}k\right) = \frac{4(3k+2)}{3k-2} = 4 + \frac{16}{3k-2}$$

이다. 이때, 해당 식은 분모가 가장 작아질 때 값이 가장 커지므로 $g(-1)$ 의 최솟값은 $k=1$ 일 때인 $g(-1)=20$ 이다.

따라서 정답은 ③이다.

답 ③

29

풀이

우선 다음과 같이 주어진 두 수열의 합 조건을 분석해 보자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_k &\leq \sum_{k=1}^4 |a_k| \quad (\because \text{모든 자연수 } k \text{에 대해 } a_k \leq |a_k|) \\ &\leq \sum_{k=1}^4 |a_k| + \sum_{k=5}^{\infty} |a_k| \quad (\because \text{모든 자연수 } k \text{에 대해 } 0 \leq |a_k|) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \end{aligned}$$

이때, 문제 조건에서 $\sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = 4$ 이므로 다음 두 정보를 알 수 있다.

- (i) $\sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{k=1}^4 |a_k|$ (a_1, a_2, a_3, a_4 는 모두 0이상의 정수이다.)
- (ii) $\sum_{k=5}^{\infty} |a_k| = 0$ (a_5, a_6, \dots 은 모두 0이다.)

이때, 모든 자연수 k 에 대해 급수 $b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k}\right)^n$ 가 수렴해야 하므로 $a_k < k$ 여야 한다. 또한, 문제의 조건에서 $b_2 \times b_3 \times b_4 \neq 0$ 라고 했으므로 a_2, a_3, a_4 는 모두 0보다 큰 양의 정수이다.

따라서, 위 조건을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 으로 가능한 경우는 아래의 2가지 경우이다.

- (i) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{0, 1, 1, 2\}$
- (ii) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{0, 1, 2, 1\}$

각각의 경우 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 의 값은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_2}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_3}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_4}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_2}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_3}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_4}{4}\right)^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 의 최댓값 M 은 $M = \frac{10}{3}$ 이므로 $6M = 20$ 이다.

답 20

30

풀이

주어진 방정식 $\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = 0$ 을 계산하여 정리해 보면 아래와 같다.

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = 0$$

따라서, $h(t)$ 는 방정식 $xg'(x) - g(x) = 0$ 의 근이고, 이로부터 아래의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} h(t)g'(h(t)) - g(h(t)) &= 0 \\ \rightarrow h(t) &= \frac{g(h(t))}{g'(h(t))} \\ \rightarrow h(t) &= g(h(t)) \times f'(g(h(t))) \end{aligned}$$

위 식에서 $g(h(t))$ 의 구조가 반복적으로 등장하므로, 이를 u 라고 치환하자. 그러면, $h(t) = f(g(h(t))) = f(u)$ 이므로, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} h(t) &= g(h(t)) \times f'(g(h(t))) \\ \rightarrow f(u) &= u \times f'(u) \\ \rightarrow u^3 + 2u + t &= u \times (3u^2 + 2) \\ \rightarrow t &= 2u^3 \end{aligned}$$

이제 구하고자 하는 식의 형태를 정리해 보자. 구하는 식 $\int_2^{16} h(t)dt$ 는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_2^{16} h(t)dt &= \int_2^{16} f(u)dt \\ &= \int_1^2 f(u) \times 6u^2 du \\ &= \int_1^2 (3u^3 + 2u) \times 6u^2 du \\ &= \left[3u^6 + 3u^4 \right]_1^2 \\ &= 234 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 234이다.

답 234