제 2 교시

수학 영역

수열의 극한

1. 자연수 k에 대하여

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} k a_k$의 값을 구하시오. [4점]

2. $a_1 = 3$, $a_2 = -4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k} = \frac{6}{n+1}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값은? [3점]

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24 ④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

4. 두 실수 a, b $(a>1, b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

6. 두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n} - \sqrt{n^4+n}} = 6$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

급수

7. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 하자. 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

8. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 b_2 = 1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n \right) = 2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

9. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\left|a_n\right|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

10. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|+a_n\right)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|-a_n\right)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

11. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

12. 두 정수 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$ 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

13. 첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n+1|-a_n-1)=26$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

14. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_2<10$
(나) 수열 $\{a_n\}$ 의 정수인 항의 개수는 3이고, 이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답]

1	33	2	①	3	⑤	4	18	5	③
6	②	7	24	8	⑤	9	12	10	25
11	④	12	105	13	16	14	91		

제 2 교시

수학 영역

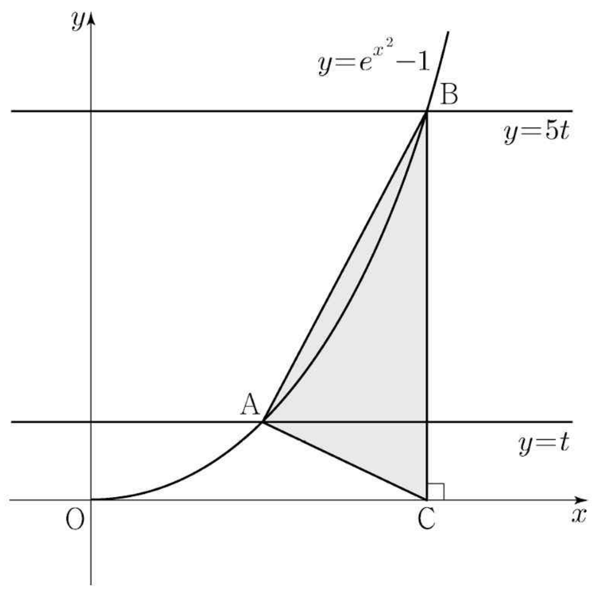
초월함수의 미분

1. $\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x\ge0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$
④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



3. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$ 이다.

$x>0$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

4. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$ 의 그래프와 함수 $y=\tan x$ 의 그래프가 만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

5. 실수 $t\ (0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

6. 두 상수 $a\ (a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=a\sin x-\cos x,\quad g(x)=e^{2x-b}-1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은? [4점]

(가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

(나) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{4}$이다.

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

미분법 (1)

7. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

8. 상수 $a\ (a>1)$과 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f\left(e^x\right)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 함수 $f\left(x^3+x\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

미분법 (2)

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x)\le \frac{1}{3}$이다.
(나) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

13. $x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차하의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

15. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

> 1 이상의 모든 실수 x에 대하여
> $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

16. 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

> (가) $-\dfrac{\pi}{2} < k < \dfrac{3\pi}{2}$
> (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

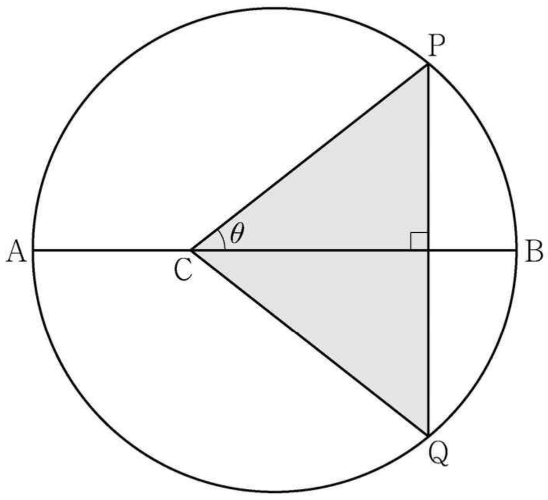
17. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

18. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M\times m^3|=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

19. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle\mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



20. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

21. 두 상수 a $(1 \le a \le 2)$, b에 대하여 함수
$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
> (나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면,

$n\alpha_1 - ab = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
> (나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\dfrac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답]

1	①	2	②	3	107	4	25	5	③
6	②	7	①	8	②	9	②	10	①
11	①	12	①	13	216	14	④	15	④
16	④	17	64	18	43	19	32	20	55
21	17	22	25						

제 2 교시

수학 영역

속함수 자취

1. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$

이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

2. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

3. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times\left(g(0)\right)^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$
(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

x좌표 함수 - 미분

4. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$　③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$　④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

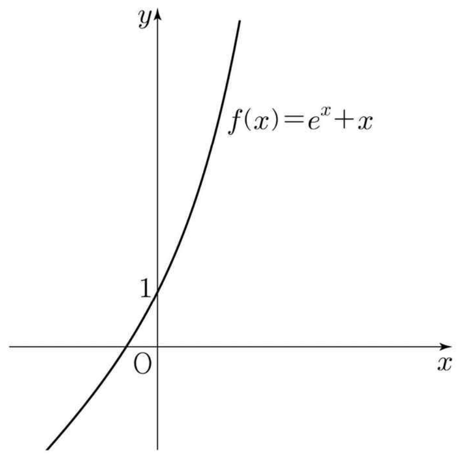
6. $0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{79}{12}$　② $\dfrac{85}{12}$　③ $\dfrac{91}{12}$　④ $\dfrac{97}{12}$　⑤ $\dfrac{103}{12}$

7. $0<t<1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $f(x)=\sin x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 그은 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$의 값은? [4점]

① -28 ② -24 ③ -20 ④ -16 ⑤ -12

8. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



9. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x \geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x < a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

x 좌표 함수 - 적분

10. 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}\,ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자.
미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\displaystyle\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}\,dt$의 값을 구하시오. [4점]

11. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x < 0$일 때, $f(x) = -4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx = e^4 - 1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

[정답]

1	②	2	①	3	②	4	17	5	②
6	④	7	②	8	3	9	④	10	12
11	②								

제 2 교시

수학 영역

적분법

1. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x),\quad b=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$ 의 값을 구하시오. [4점]

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$ 일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$ 이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$ 이다.

$\int_0^6 f(x)\,dx=\dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

3. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$
④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

4. 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx=2,\quad \int_0^1 |f(x)|\,dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt\ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

5. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x+1)-g(x)=-\pi(e+1)e^x\sin(\pi x)$
> (나) $\displaystyle g(x+1)=\int_0^x \{f(t+1)e^t-f(t)e^t+g(t)\}\,dt$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{10}{9}e+4$일 때, $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

7. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \ (x \geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$k^2 < a_6 < (k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

8. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi \times f(x))}{x}=0$
>
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \leq x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)\,dx=\dfrac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

9. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

10. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$
>
> (나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx=\frac{47}{2}$, $\int_0^1 f(x)\,dx=2$일 때,
$\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

11. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
> (나) $x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)\,dx = pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

12. 실수 $a\ (0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x \ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)\,dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

13. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

14. 상수 $a\ (0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln\left(e^{|t|}-a\right)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.

(나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오.

[4점]

15. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

16. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

17. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}\,dt$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $h(x)$가
모든 실수 x에 대하여

$$h(g(x)+2)=2x^3+6f(1)x^2+1$$

을 만족시킨다. $\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}\,dx=k\times\{f(1)\}^2$일 때, 실수 k의 값을 구하시오. [4점]

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는
모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1)=4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx=34,\quad \int_1^2 xg(x)\,dx=53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

정적분의 활용

19. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=1$
(나) $\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 의 값은? [4점]

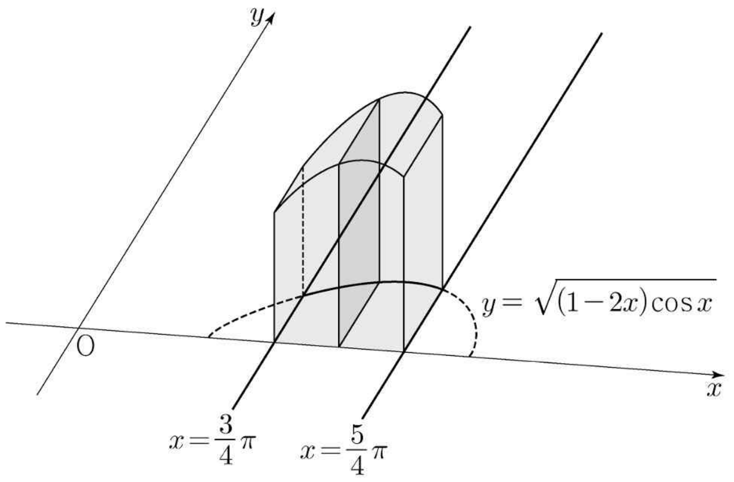
① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

20. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\,0)$, $(t,\,f(t))$, $(t+1,\,f(t+1))$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$이다.
(다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx=2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \ge \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}\pi-1$　③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}\pi-1$　⑤ $2\sqrt{2}\pi$

22. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$　④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

23. 함수 $y=\dfrac{2\pi}{x}$의 그래프와 함수 $y=\cos x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, m번째 수를 a_m이라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{n\times\cos^2(a_{n+k})\right\}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

24. 곡선 $y=\dfrac{3}{x-1}\ (x>1)$이 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\dfrac{3}{x-1}\ (x>1)$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-3\ln 3$ ② $3-3\ln 2$ ③ $4-2\ln 3$
④ $3+3\ln 2$ ⑤ $3+3\ln 3$

[정답]

1	51	2	35	3	②	4	④	5	16
6	26	7	①	8	115	9	143	10	①
11	12	12	②	13	125	14	144	15	③
16	25	17	72	18	31	19	⑤	20	127
21	③	22	②	23	②	24	①		