2026학년도 9월 미적분 변형 문제 (정답 및 해설)

Contents

1 미적분 23번 유형: 미분계수의 정의

질문: 다항함수와 지수함수가 결합된 함수 $f(x) = (x^2 + 1)e^x$가 주어졌습니다. 미분계수의 정의를 극한 계산에 적용하는 종합 문제로서, 다음의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$$

① 0

② 1

③ e

④ 2

⑤ 2e

정답: ②

설명:

1. 먼저 $x = 0$에서의 함수값 $f(0)$을 계산합니다. $f(0) = (0^2 + 1)e^0 = 1 \times 1 = 1$ 입니다.
2. 주어진 극한식의 1을 $f(0)$으로 대체하면, 식은 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$의 형태가 됩니다.
3. 이 식은 미분계수의 정의에 따라 함수 $f(x)$의 $x = 0$에서의 미분계수 $f'(0)$과 같습니다.
4. 곱의 미분법을 사용하여 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구합니다.

$$f'(x) = (x^2 + 1)'e^x + (x^2 + 1)(e^x)' = (2x)e^x + (x^2 + 1)e^x$$

5. $f'(x)$에 $x = 0$을 대입하여 $f'(0)$의 값을 구합니다.

$$f'(0) = (2 \times 0)e^0 + (0^2 + 1)e^0 = 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$$

6. 따라서, 주어진 극한값은 1입니다.

2 미적분 24번 유형: 정적분으로 정의된 함수

질문: 함수 $f(x) = \displaystyle\int_1^x (t^2 + at + b)\,dt$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하는 정적분의 계산 문제이다.

(가) $f'(1) = 3$

(나) $f(2) = 10/3$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

정답: ④

설명:

1. **미적분학의 기본정리**에 따라, $f(x) = \int_1^x (t^2 + at + b)\,dt$의 양변을 x에 대해 미분하면 $f'(x) = x^2 + ax + b$ 입니다.
2. **조건 (가) $f'(1) = 3$을 이용**: $f'(1) = 1^2 + a(1) + b = 1 + a + b = 3$. 따라서, $a + b = 2$ — (1)
3. **조건 (나) $f(2) = 10/3$을 이용**: $f(2) = \int_1^2 (t^2 + at + b)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_1^2$ $f(2) = \left(\frac{8}{3} + 2a + 2b\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b\right) = \frac{7}{3} + \frac{3a}{2} + b$. $\frac{7}{3} + \frac{3a}{2} + b = \frac{10}{3} \implies \frac{3a}{2} + b = 1$ — (2)
4. **연립방정식 풀이**: (1)에서 $b = 2 - a$를 (2)에 대입합니다. $\frac{3a}{2} + (2 - a) = 1 \implies \frac{a}{2} = -1 \implies a = -2$. $a = -2$를 (1)에 대입하면, $b = 4$.
5. **$f'(2)$ 계산**: $f'(x) = x^2 - 2x + 4$ 이므로, $f'(2) = 2^2 - 2(2) + 4 = 4$.

3 미적분 25번 유형: 수열의 극한

질문: 두 실수 a, b에 대하여, 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^b}{\sqrt{n^6+n^3}-\sqrt{n^6-n^3}} = \dfrac{1}{2}$ 이 성립한다. 이 등식을 만족시키는 두 실수 a, b의 합 a+b의 값은?

① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

정답: ①

설명:

1. 주어진 극한 식의 분모는 $\infty - \infty$ 꼴의 부정형이므로, 분모를 유리화합니다.

   $$\text{분모} = (\sqrt{n^6+n^3}-\sqrt{n^6-n^3}) \times \frac{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^3}}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^3}} = \frac{(n^6+n^3)-(n^6-n^3)}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^3}} = \frac{2}{\sqrt{n^6+n^3}}$$

2. 원래 식은 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^b(\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^3})}{2n^3} = \dfrac{1}{2}$ 이 됩니다.
3. 분모와 분자의 최고차항을 비교합니다. 분모는 $2n^3$이고, 분자에서 $\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^3}$의 최고차항은 $n^3+n^3=2n^3$과 같습니다.
4. 따라서 극한 식은 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^b \cdot (2n^3)}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} an^b = \dfrac{1}{2}$ 와 같습니다.
5. 극한값이 0이 아닌 상수로 수렴하려면, n의 지수가 0이어야 하므로 $b=0$입니다.
6. $b=0$일 때, 극한값은 a가 되므로 $a=\dfrac{1}{2}$입니다.
7. 최종적으로 $a+b=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$ 입니다.

4 미적분 26번 유형: 정적분과 넓이

질문: 곡선 $y = \dfrac{4}{x+1}$ $(x > 0)$이 두 직선 $y = 1, y = 2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y = \dfrac{4}{x+1}$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $3 - 2\ln 2$

② $4 - 4\ln 2$

③ $3 - 4\ln 2$

④ $3 + 4\ln 2$

⑤ $4 + 2\ln 2$

정답: ③

설명:

1. **교점 좌표 구하기**:
   - 점 A (y=1): $1 = \frac{4}{x+1} \implies x + 1 = 4 \implies x = 3$. 따라서 $A(3, 1)$.
   - 점 B (y=2): $2 = \frac{4}{x+1} \implies 2(x + 1) = 4 \implies x = 1$. 따라서 $B(1, 2)$.
2. **직선 AB의 방정식 구하기**: 기울기 $m = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2}$. $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
3. **넓이 계산**: 구하고자 하는 넓이는 $x \in [1, 3]$ 구간에서 (직선의 넓이) - (곡선의 넓이) 입니다.

$$S = \int_1^3 \left(\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) - \frac{4}{x+1}\right) dx$$

$$S = \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 4\ln|x+1|\right]_1^3$$

$$S = \left(-\frac{9}{4} + \frac{15}{2} - 4\ln 4\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 4\ln 2\right)$$

$$S = \left(\frac{21}{4} - 8\ln 2\right) - \left(\frac{9}{4} - 4\ln 2\right) = \frac{12}{4} - 4\ln 2 = 3 - 4\ln 2$$

5 미적분 27번 유형: 역함수 미분법

질문: 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(x) > 0$을 만족시킨다. 함수 $g(x) = (f(x))^3 + f(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $f(1) = 1$이고 $f'(1) = 2h'(2) - \dfrac{1}{2}$이다. $h(2) + h'(2)$의 값은?

① $\dfrac{5}{4}$

② $\dfrac{3}{2}$

③ $\dfrac{7}{4}$

④ 2

⑤ 3

정답: ②

설명:

1. $h(2)$**의 값 구하기**: $h(2) = a$라 하면, 역함수의 정의에 의해 $g(a) = 2$입니다. $g(a) = (f(a))^3 + f(a) = 2$. $y = f(a)$라 하면 $y^3 + y - 2 = 0$. $(y-1)(y^2+y+2) = 0$에서 실근은 $y = 1$뿐입니다. 따라서 $f(a) = 1$이고, 주어진 조건 $f(1) = 1$에 의해 $a = 1$입니다. 즉, $h(2) = 1$.
2. $h'(2)$**의 값 구하기**: 역함수 미분법에 의해 $h'(2) = \frac{1}{g'(h(2))} = \frac{1}{g'(1)}$. $g'(x) = 3(f(x))^2 f'(x) + f'(x) = f'(x)(3(f(x))^2 + 1)$. $g'(1) = f'(1)(3(f(1))^2 + 1) = 4f'(1)$. 따라서 $h'(2) = \frac{1}{4f'(1)}$.
3. $f'(1)$**의 값 구하기**: 주어진 조건 $f'(1) = 2h'(2) - \frac{1}{2}$에 위 식을 대입합니다. $f'(1) = 2\left(\frac{1}{4f'(1)}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2f'(1)} - \frac{1}{2}$. $2(f'(1))^2 + f'(1) - 1 = 0 \implies (2f'(1) - 1)(f'(1) + 1) = 0$. $f'(x) > 0$ 조건에 의해 $f'(1) = 1/2$입니다.
4. **최종 값 계산**: $h'(2) = \frac{1}{4(1/2)} = \frac{1}{2}$. $h(2) + h'(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

6 미적분 28번 유형: 미분가능한 함수 추론

질문: 이차함수 f(x)와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 g(x)가 모든 실수 x에 대하여 다음 관계식을 만족시킨다.

$$f(x) = g(x) + e^{-g(x)}$$

주어진 조건들을 만족시키는 함수 f(x)와 g(x)에 대하여 g'(0)의 값은?

(가)	이차함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 최솟값을 갖는다.
(나)	$g'(2) \neq 0, \quad g(0) = \ln 3$

(단, 함수 $h(y) = y + e^{-y}$는 y=0에서 최솟값 1을 갖는다.)

① $1 - \ln 3$

② $\frac{2}{3} - \ln 3$

③ $1 - \frac{3}{2}\ln 3$

④ $\frac{3}{2}\ln 3 - 1$

⑤ $\ln 3 - \frac{2}{3}$

정답: ③

설명:

1. 양변을 미분: $f'(x) = g'(x) - e^{-g(x)}g'(x) = g'(x)(1 - e^{-g(x)})$.
2. (가) 조건에서 $f(x)$는 $x = 2$에서 최솟값을 가지므로 $f'(2) = 0$입니다. $f'(2) = g'(2)(1 - e^{-g(2)}) = 0$. (나) 조건에서 $g'(2) \neq 0$이므로, $1 - e^{-g(2)} = 0 \implies e^{-g(2)} = 1 \implies g(2) = 0$.
3. 함수 $h(y) = y + e^{-y}$는 $y = g(x)$에서의 $f(x)$ 값입니다. $h(y)$의 최솟값은 $y = 0$일 때 1입니다. $f(x)$의 최솟값은 $g(x) = 0$일 때 발생하며 그 값은 1입니다. $g(2) = 0$이므로 $f(x)$는 $x = 2$에서 최솟값 $f(2) = 1$을 갖습니다.
4. $f(x) = A(x - 2)^2 + 1$ $(A > 0)$로 놓을 수 있습니다.
5. (나) 조건 $g(0) = \ln 3$을 이용합니다. $f(0) = g(0) + e^{-g(0)} = \ln 3 + e^{-\ln 3} = \ln 3 + 1/3$. 또한 $f(0) = A(0 - 2)^2 + 1 = 4A + 1$. $4A + 1 = \ln 3 + 1/3 \implies 4A = \ln 3 - 2/3 \implies A = \frac{1}{4}(\ln 3 - 2/3)$.
6. $f'(x) = 2A(x - 2)$이므로, $f'(0) = 2A(-2) = -4A = -(\ln 3 - 2/3) = 2/3 - \ln 3$.
7. $f'(0) = g'(0)(1 - e^{-g(0)}) = g'(0)(1 - e^{-\ln 3}) = g'(0)(1 - 1/3) = \frac{2}{3}g'(0)$.
8. $\frac{2}{3}g'(0) = \frac{2}{3} - \ln 3 \implies g'(0) = 1 - \frac{3}{2}\ln 3$.

7 미적분 29번 유형: 무한급수와 등비수열

질문: 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴합니다. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때,

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항 중에서 정수 값을 갖는 항은 정확히 3개뿐이다.

(나) 이 세 정수 항의 합은 13이고, 곱은 -1728이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = q/p$ 일 때, $\frac{q}{4} - \frac{p}{3}$ 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

정답: 235

설명:

1. **세 정수 항 찾기**: 세 정수를 x, y, z라 하면, $x + y + z = 13$이고 $xyz = -1728 = (-12)^3$입니다. 세 항이 등비수열을 이룬다고 가정하면 가운데 항은 -12입니다. $x + (-12) + z = 13 \implies x + z = 25$. $x(-12)z = -1728 \implies xz = 144$. 두 수 x, z는 $t^2 - 25t + 144 = 0$의 근이므로, $(t-9)(t-16) = 0$. 두 수는 9와 16입니다.
2. **공비 및 순서 확인**: 세 정수는 $\{9, -12, 16\}$입니다. 등비수열을 이루려면 순서는 $16, -12, 9$ (공비 $r = -3/4$) 또는 $9, -12, 16$ (공비 $r = -4/3$)입니다. 무한급수가 수렴하므로 $|r| < 1$이어야 하므로, 공비 $r = -3/4$이고 정수항의 순서는 $16, -12, 9$ 입니다.
3. **정수 항의 유일성 검증**: 공비가 $r = -3/4$이므로, 16 이전의 항은 $16/(-3/4) = -64/3$ (정수 아님), 9 다음 항은 $9 \times (-3/4) = -27/4$ (정수 아님) 이므로, 이 세 항만이 유일한 정수 항이라는 조건이 만족됩니다.
4. **첫째항 찾기**: 이 세 정수항이 a_k, a_{k+1}, a_{k+2}라고 합시다. $a_k = a_1 r^{k-1} = 16$. $a_1 = 16/(-3/4)^{k-1}$. $a_1 > 0$이므로 지수 $k-1$은 짝수여야 합니다. $k-1, k-2, ...$ 항들이 정수가 아니려면 $k - 1 = 2$, 즉 $k = 3$이 가장 작은 가능성입니다. $a_1 = 16/(-3/4)^2 = 16/(9/16) = 256/9$. $a_2 = (256/9)(-3/4) = -64/3$ (정수 아님). $a_3 = (-64/3)(-3/4) = 16$ (정수). 이 조건이 만족됩니다.
5. **무한급수의 합 계산**: $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{256/9}{1-(-3/4)} = \frac{256/9}{7/4} = \frac{256}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{1024}{63}$.
6. **최종 값**: $q = 1024, p = 63$. 이 둘은 서로소입니다. $\frac{q}{4} - \frac{p}{3} = \frac{1024}{4} - \frac{63}{3} = 256 - 21 = 235$.

8 미적분 30번 유형: 미분과 적분의 관계 (부분적분)

질문: 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식 $g(x) = 2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$를 만족시킨다. $f(0) = 5$이고 $\int_0^2 g(x)\,dx = 15$, $\int_0^2 xg(x)\,dx = 30$일 때, $\displaystyle\int_0^2 (x^2+1)f(x)\,dx$의 값은?

정답: 10

설명:

1. **곱의 미분법 역이용**: 주어진 등식의 우변은 $H(x) = (x^2+1)f(x)$의 도함수 $H'(x)$와 형태가 같습니다. $H'(x) = (x^2+1)'f(x) + (x^2+1)f'(x) = 2xf(x) + (x^2+1)f'(x)$. 따라서 $g(x) = H'(x)$ 입니다.
2. **첫 번째 적분 조건 활용**: $\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 H'(x)\,dx = [H(x)]_0^2 = H(2) - H(0) = 15$. $H(0) = (0^2+1)f(0) = 1 \times 5 = 5$. $H(2) - 5 = 15 \implies H(2) = 20$.
3. **두 번째 적분 조건과 부분적분 활용**: 구하고자 하는 값은 $\int_0^2 H(x)dx$ 입니다. 주어진 조건 $\int_0^2 xg(x)\,dx = 30$에 $g(x) = H'(x)$를 대입하면 $\int_0^2 xH'(x)\,dx = 30$. 부분적분법을 이용합니다. $(u = x, v' = H'(x) \implies u' = 1, v = H(x))$

$$\int_0^2 xH'(x)\,dx = [xH(x)]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot H(x)\,dx = 30$$

$$(2H(2) - 0 \cdot H(0)) - \int_0^2 H(x)\,dx = 30$$

4. **최종 값 계산**: $H(2) = 20$을 대입합니다. $2(20) - \int_0^2 H(x)\,dx = 30 \implies 40 - \int_0^2 H(x)\,dx = 30$. 따라서 $\int_0^2 H(x)\,dx = \int_0^2 (x^2+1)f(x)\,dx = 10$.