제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}+\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}-1} \times 2^{-\sqrt{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 2x + 1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{h}$의 값은? [2점]

$= f'(1)$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 2$

$\therefore f'(1) = 1$

3. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_4 = 10, \ a_1 \geq 0$$

가 성립할 때, 모든 a_2의 값의 곱은? [3점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{16}{5}$

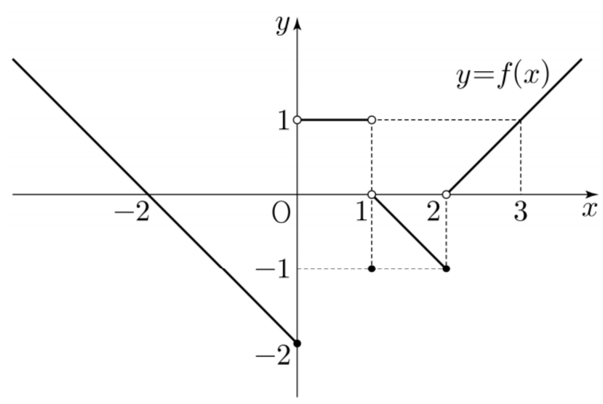
$a+2d + a+3d = 10$

$2a + 5d = 10$

$d=1 \quad a = \frac{5}{2} \quad a_2 = \frac{7}{2}$

$d=2 \quad a=0 \quad a_2 = 2$ $\quad \therefore 7$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\overset{-2}{\lim_{x \to 0-} f(x)} + \overset{1}{\lim_{x \to 1+} f(-x+2)}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. $\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = -\sin\theta - 1$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ -1

$1 - s^2 = -s - 1$

$s^2 - s = 0$

$s = 0$ or -1

6. 방정식 $2x^3 + 9x^2 + 12x + k = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

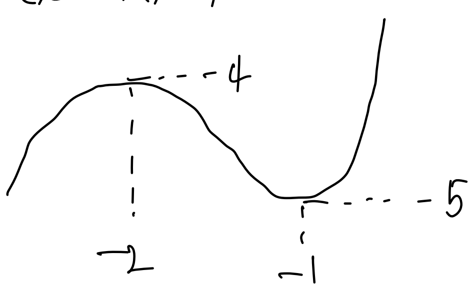
① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$2x^3 + 9x^2 + 12x = -k$

미분

$6x^2 + 18x + 12$

$6(x+2)(x+1)$



$k = 4, 5$

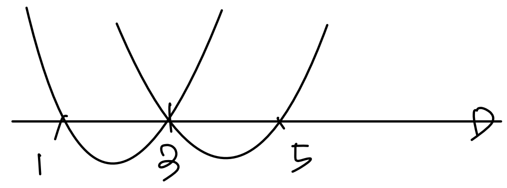
7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 부등식

$$f'(x)f'(x-2) \le 0$$

의 해가 $1 \le x \le 5$이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$f(x)$ 삼차 $\longrightarrow f'(x)$ 이차



$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ 극소 $= f(3) = 3$

$= 3x^2 - 12x + 9$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$\therefore f(1) = 1 - 6 + 9 + 3 = 7$

8. 0 보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여

$$2^{a^2}=3^b=k^c,\ \log_k 6^{\frac{b}{(a^2+b)}}=4$$

가 성립할 때, $\log_2 k$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

$2=k^{\frac{c}{a^2}}$ $3=k^{\frac{c}{b}}$

$2\times3=6=k^{\frac{c}{a^2}+\frac{c}{b}}=k^{\frac{c(a^2+b)}{a^2b}}$

$6^{\frac{b}{(a^2+b)}}=k^{\frac{c}{a^2}}=k^4 \rightarrow \frac{c}{a^2}=4$

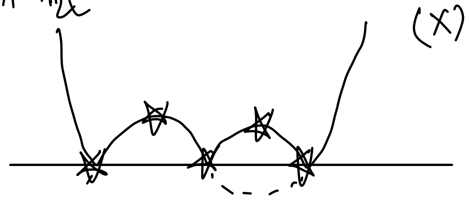
$2=k^{\frac{c}{a^2}}=k^4 \rightarrow k=2^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \log_2 k=\log_2 2^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$

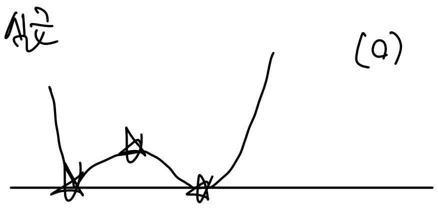
9. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $|f(x)|$의 극솟값의 개수를 a, 극댓값의 개수를 b라 할 때 $a=2b$이다. $f(0)=7$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

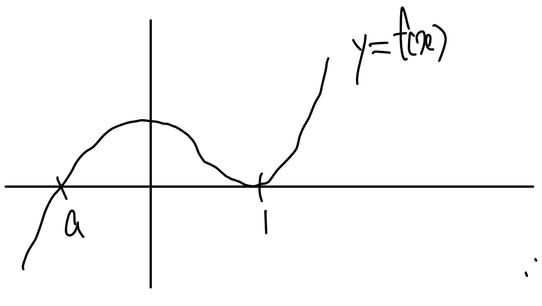
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

i) 세실근



ii) 두실근





$f(x)=(x-1)^2(x-a)$

$f(0)=-a=7$

$a=-7$

$\therefore f(2)=9$

10. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 S_n+S_{n+1}은 등차수열이다.

(나) $a_6 \neq a_9$이고 $\sum_{n=1}^{5} a_n=10$이다.

모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 4 ④ 5 ⑤ 8

S_1+S_2 S_2+S_3 S_3+S_4 $S_4+S_5 \cdots$

d: a_3+a_2 a_4+a_3 a_5+a_4

$\rightarrow a_3=a_5=a_7=\cdots$

$a_2=a_4=a_6=\cdots$

$a_6\neq a_9$ 이므로 $a_3\neq a_2$

$\sum_{n=1}^{5}a_n=a_1+(a_2+a_4)+(a_3+a_5)$

$=a_1+2a_2+2a_3=10$

4, 1 2

2, 1 3

11. 수직선 위를 움직이는 점 P와 정지해 있는 점 Q가 시각 $t\ (t \geq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P의 속도 $v_1(t)$와 위치 $x_1(t)$가 각각
> $0 \leq t \leq 2$일 때, $v_1(t) = 3t^2 - 9t + 6$이고
> $t \geq 2$일 때, $x_1(t) = 2$이다.
> (나) 점 P와 Q 사이의 거리가 최소가 되는 t의 값이 3개 이상이다.

두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각 t의 값은? [4점]

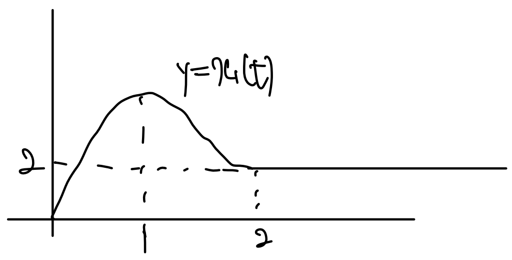
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

$v_1(t) = 3(t-1)(t-2)$

$x_1(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + C$

$0 \leq t \leq 2$ 이고 $2 \leq t$ 에서 $x_1(t) = 2$ 이므로

$x_1(2) = 2 \longrightarrow C = 0$



이므로 (나)조건에 의해 Q의 위치 x_2는

$x_2(t) = 2$

$x_1(t) = x_2(t) \longrightarrow t = 2, \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}$

12. 함수 $f(n) = (n-1)(n-a)$와 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. 함수 $g(n)$이 다음 조건을 만족시킬 때, a의 최솟값은? (단, a는 1보다 큰 자연수이다.) [4점]

> 모든 실수 x에 대하여
> $$2(x+1)g\left(\frac{a}{2}+1\right)g(a) = (x+1)g\left(\frac{5}{b}a-1\right)g(3)$$
> 을 만족시키는 자연수 b의 값의 최솟값이 4이다.

① 8 ② 9 ③ 12 ④ 14 ⑤ 20

$g\left(\frac{a}{2}+1\right) \rightarrow \frac{a}{2}+1$ 도 자연수이므로 a는 짝수

$a=2$

$2(x+1) \times 1 = (x+1)\, g\left(\frac{10}{b} - 1\right) \times 1$

$\frac{10}{b} - 1$ 이 2보다 큰 짝수 $b=2$

$a=4$

$2(x+1)\, g(3)\, g(4) = (x+1)\, g\left(\frac{20}{b} - 1\right) g(3)$

$\frac{20}{b} - 1$ 이 4보다 큰 짝수 b는 존재(X)

⋮

$a = 4 \times (2n+1)$ $(n \geq 1)$

$2(x+1) \times \underset{1}{\underset{\parallel}{g(2\times 2n+3)}}\ \underset{1}{\underset{\parallel}{g(4\times(2n+1))}} = (x+1)\, g\left(\frac{5a}{b} - 1\right) \underset{1}{\underset{\parallel}{g(4\times(2n+1))}}$

$\frac{5}{b} \times 4(2n+1) - 1$ 이 $4(2n+1)$보다 큰 짝수

즉, $\frac{5}{b} \times 4(2n+1)$은 홀수

$b = 4, \cdots$

$a = 4\times 3, 4\times 5, 4\times 7, \cdots$

$\therefore 12$

13. 두 실수 a, k와 함수 $f(x)=-3^{-x+3}+k$에 대하여, 함수

$$g(x)=\begin{cases} |3^x-2| & (x \le a) \\ f(x) & (x>a) \end{cases}$$

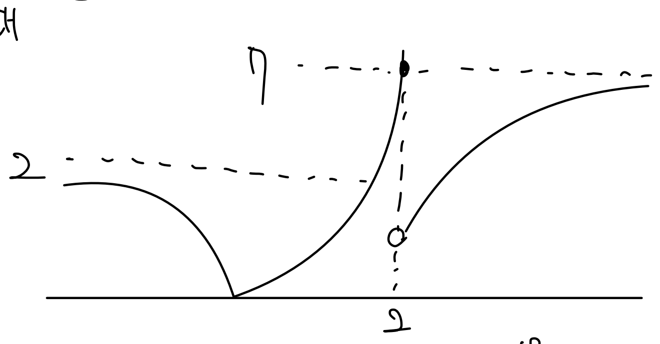
가 다음 조건을 만족시킨다.

> $a \ge 2$일 때만, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

$f(4)$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{8}{3}$　② 3　③ $\frac{14}{3}$　④ 6　⑤ $\frac{20}{3}$

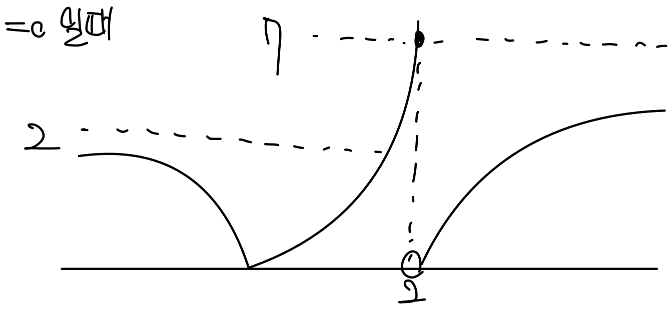
i) f(x)의 점근선이 7일때



$k=7 \rightarrow f(x)=-3^{-x+3}+7$

$f(x)=0 \rightarrow x=\log_3\frac{27}{7}<2$ 이므로 만족

ii) f(2)=0 일때



$f(2)=-3+k=0$　$k=3$

$k<7$ 이므로 만족

$f(x)=-3^{-x+3}+3$

$f(4)=\frac{20}{3}$ or $\frac{8}{3}$

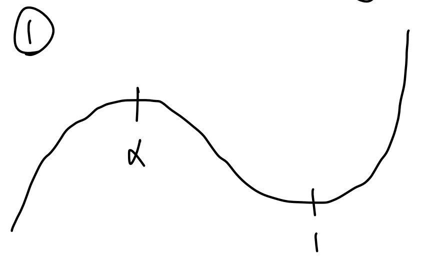
$\therefore \frac{20}{3}$

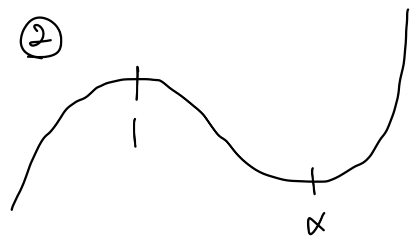
14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

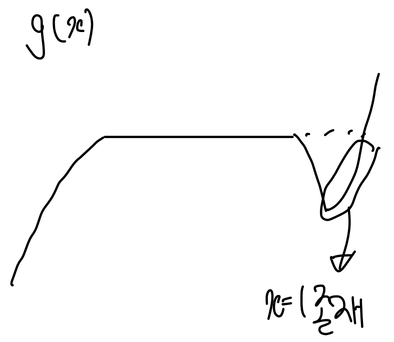
> (가) $x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le 0$이다.
> (나) $\int_{-2}^{-1} g(t)dt=\int_{-2}^{a} g(t)dt=\int_{1}^{0} \{f(t+3)+4\}dt$를 만족시키는 실수 a가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 존재한다.

$f'(1)=0$일 때, $f(5)$의 값은? [4점]

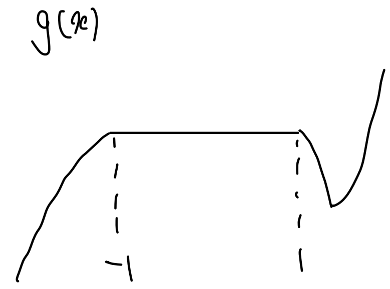
① 8　② 12　③ 16　④ 18　⑤ 21





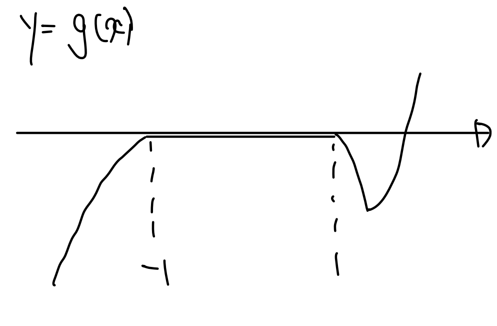


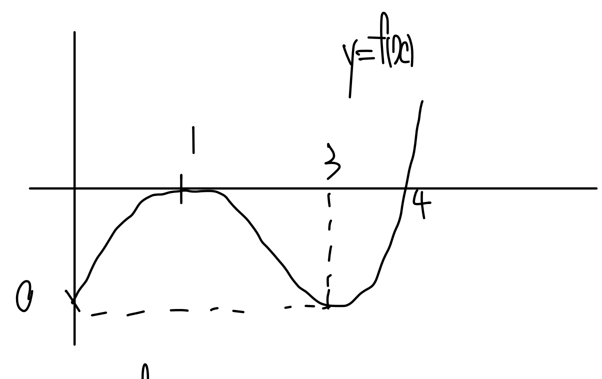
(X)



(O)

(나)에 의해





$f(x)=(x-1)^2(x-4)$

$\therefore f(5)=16$

15. 모든 항이 음이 아닌 정수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3n & (a_n\text{이 2의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 2의 배수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.

a_1부터 a_p까지 0보다 큰 짝수인 항의 개수가 6이 되도록 하는 자연수 p의 최댓값을 m이라 할 때, 모든 m의 값의 합은? [4점]

① 25 ② 27 ③ 28 ④ 38 ⑤ 40

i) $a_1=0$

$a_2=3$ $a_3=9$ $a_4=18$ $a_5=22$ ...

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 ...
0 홀 홀 짝 짝 홀 홀

... a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15}
홀 짝 짝 홀 홀

$\therefore m=15$

ii) $a\neq 0$ 인 짝수

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5
짝 홀 홀 짝 짝

... a_{11} a_{12} a_{13}
홀 짝 짝

$\therefore m=12$

iii) $a\neq 0$ 인 홀수

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ... a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13}
홀 짝 짝 홀 홀 ... 홀 짝 짝 홀 홀

a_{14}
짝

$\therefore m=13$

$\therefore 12+13+15=40$

단답형

16. $\log_2(x-2)=\log_4(2x-1)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>2$ ... 진수조건

$\log_4(x-2)^2=\log_4(2x-1)$

$x^2-4x+4=2x-1$

$x^2-6x+5=0$

$(x-5)(x-1)=0$

$\therefore x=5$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+7$이고 $f(0)=7$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3-2x^2+7x+C$

$f(0)=C=7$

$\therefore f(2)=8-8+14+7$

$=21$

18. 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5 - 3a_3 = -2a_4, \quad a_6 a_7 < 0$$

일 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

$ar^4 - 3ar^2 = -2ar^3$

$r^2 - 3 = -2r$

$r^2 + 2r - 3 = 0$

$(r+3)(r-1) = 0$

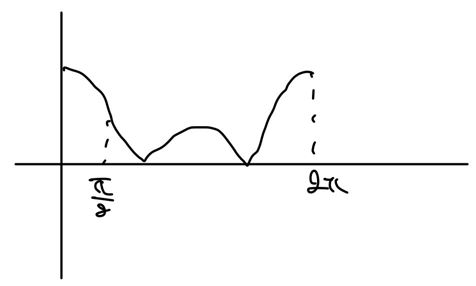
$r = 1$ or -3

$a_6 a_7 < 0$ 이므로 $r < 0$

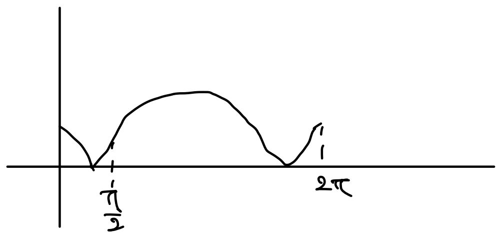
$r = -3$

$\therefore a_5 = 2 \times (-3)^4 = 162$

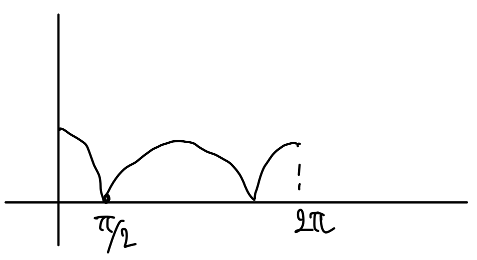
19. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y = |a\cos x + b - 3|$의 그래프가 직선 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고 최댓값이 2일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]



(X)



(X)



(o)

$b - 3 = 0$ $b = 3$ $a = 2$ $\therefore 5$

20. 최고차항 계수가 1이고 $f(1) = 3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y = -|x-t| + 1$의 그래프와 곡선 $y = f(x)$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$\lim_{t \to 2-} g(t) = \lim_{t \to 2+} g(t) \neq g(2)$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

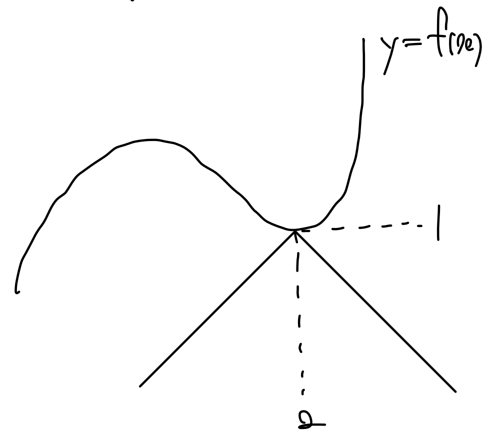
$\lim_{t \to 2} g(t) \neq g(2)$ 이므로 $x=2$를 기준으로 접하거나 교점을가지거나

i) 접할때

$\lim_{t \to 2-} \neq \lim_{t \to 2+}$ 이므로 (X)

ii) 교점을가질때

$\lim_{t \to 2-} = \lim_{t \to 2+}$ 이므로 (o)



$f(x) = (x-2)^2(x-a) + 1$

$f(1) = 1 - a + 1 = 3$

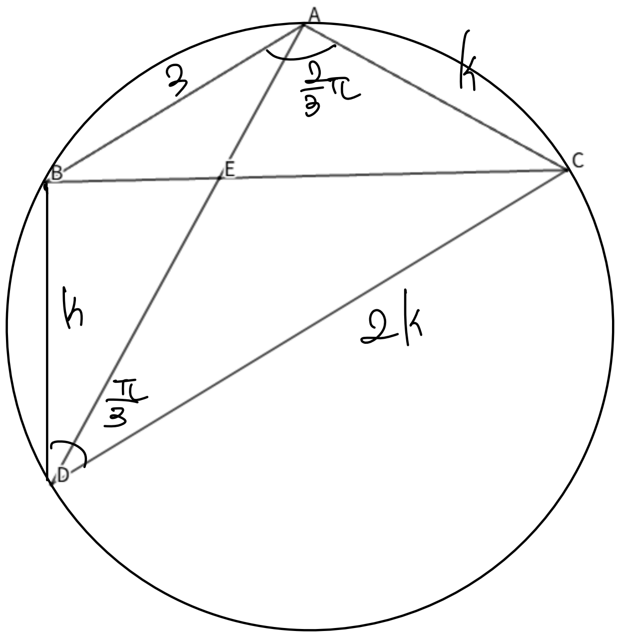
$a = -1$

$\therefore f(5) = 6 \times 9 + 1 = 55$

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 그은 직선과 삼각형 ABC가 만나는 점을 E, 점 C에서 그은 직선과 만나는 점을 D라 하자.

$\sin\angle CDA : \sin\angle CAD = 1:2$, $\angle ABC = \angle CDA$, $\overline{CE}=\overline{DE}$

일 때, 삼각형 ACE의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



$\sin\angle CDA : \sin\angle CAD = \overline{AC} : \overline{CD} = 1:2$

$\angle ABC = \angle CDA$ 이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$는 같은 원에 내접

$\overline{CE}=\overline{DE}$ 이므로 $\overline{BD}=\overline{AC}$

$\overline{BC}^2 = k^2+9+2\times3k\times\frac{1}{2} = 5k^2-2\times2k^2\times\frac{1}{2}$

$= k^2+3k+9 = 3k^2$

$2k^2-3k-9=0$

2   3
1   -3

$\therefore k=3 \longrightarrow \overline{BC}=3\sqrt{3}$

$\overline{BE}=\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\sqrt{3}$

$\overline{AB}=\overline{AC} \longrightarrow \angle ACB=\frac{\pi}{6}$

$2R=\frac{\overline{AE}}{\sin\angle ACB}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$

$R=\sqrt{3}$ $S=R^2\pi=3\pi$ $\therefore \frac{S}{\pi}=3$

22. 최고차항 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $\{g(x)-f(x)\}\{g(x)+x-1\}=0$이다.
> (나) 0 이상의 실수 a에 대하여
> $$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=-f'(a)$$
> 를 만족시키는 a의 값의 집합이 $\{0,\ 2,\ 6,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\}$이다.

$f'(2)$, $f'(6)\geq0$일 때, $g(-1)-f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

① $f(x)$ | $-x+1$ a

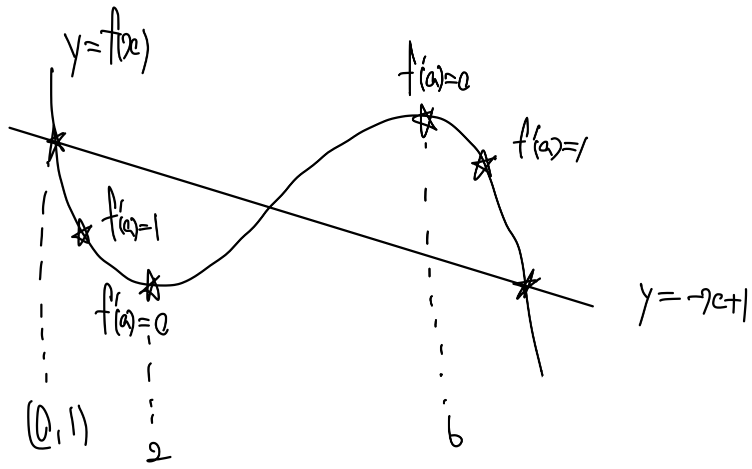
② $-x+1$ | $-x+1$ a

③ $f(x)$ | $f(x)$ a

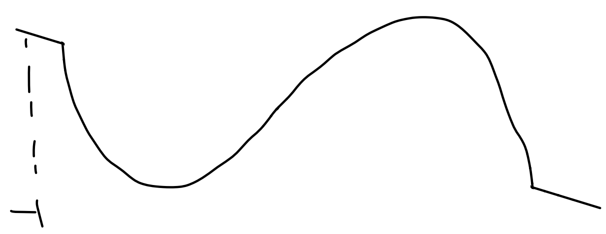
$f'(a)\times(-1)=-f'(a)$
모든 실수 가능

$(-1)\times(-1)=-f'(a)$
$f'(a)=-1$ 인경우

$f'(a)^2=-f'(a)$
$f'(a)=-1$ or 0



$y=g(x)$



$f(x)=-(x-2)^2(x-8)+f(2)$

$f(0)=4\times8+f(2)=1$

$f(2)=-31$

$g(-1)=2$

$\therefore g(-1)-f(2)$
$=33$