돌파

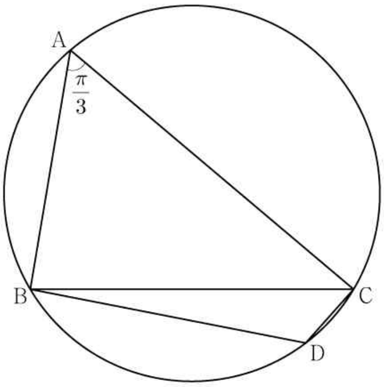
수능 전 마지막 비킬러 대비 칼럼
2호 - 2022학년도 9월 모의고사편

敎心 교심
교육하는 마음

22학년도 9월

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값은? [4점]

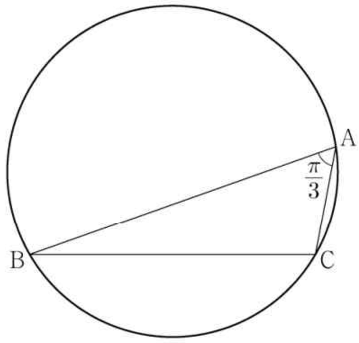
① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



[연관] 21학년도 11월

10. $\angle A = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



정답

원문항: ② / 연관문항: ②

돌파법

외접원 + 각 -> 변의 길이

도형에서 외접원의 반지름의 길이가 나오고
각의 크기가 나왔으므로 사인법칙을 통해
바로 $\overline{BC}$, $\overline{BD}$를 구해야 한다.

이후 $\overline{CD}$를 구하기 위해 삼각형 BCD에서
코사인법칙으로 마무리하면 완벽하다.

원문항 풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} = 2\times(\text{외접원의 반지름의 길이})\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= 2\times 2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2\sqrt{21}$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}$$
$$= 2(\text{외접원의 반지름의 길이})\times\sin(\angle BCD)$$
$$= 2\times 2\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}$$
$$= 8$$

이때, 주어진 원에서

$$\angle BAC + \angle BDC = \pi \ \Rightarrow\ \angle BDC = \frac{2}{3}\pi$$

이므로 $x = \overline{CD}$ $(x>0)$이라 하자.
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\times\cos(\angle BDC)\times\overline{BD}\times\overline{CD}$$
$$\Rightarrow\ 84 = 64 + x^2 - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 8\times x$$
$$\Rightarrow\ (x+10)(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 2 \quad (\because\ x>0) \ \Rightarrow\ \overline{BD}+\overline{CD} = 10$$

연관문항 풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} = 2\times(\text{외접원의 반지름의 길이})\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= 2\times 7\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 7\sqrt{3}$$

$\overline{AB}:\overline{AC} = 3:1$에서

$$\overline{AB} = 3k,\ \overline{AC} = k \quad (k>0)$$

이라 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\cos(\angle BAC)\times\overline{AB}\times\overline{AC}$$
$$\Rightarrow\ 147 = 9k^2 + k^2 - 2\times\frac{1}{2}\times 3k\times k$$
$$\Rightarrow\ k^2 = 21$$
$$\Rightarrow\ k = \sqrt{21} \qquad (\because\ k>0)$$
$$\Rightarrow\ \overline{AC} = \sqrt{21}$$

22학년도 9월

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

24학년도 11월

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

정답

원문항: ② / 연관문항: ①

돌파법

등차수열이 대칭적이다.

(공차가 0이 아닌) 등차수열에서 두 항의 절댓값이 같다면 등차수열이 대칭적으로 설계가 됨을 이해해야 한다.

원 문항의 (가) 조건을 통해 이를 이해하고
m과 d가 자연수임을 통해 가능한 경우를 좁혀서
(나) 조건을 직접 실험해야 한다.

원문항 풀이

(가) & 공차가 자연수

$\Rightarrow\ a_m + a_{m+3} = 0$

$(\because\ d \neq 0 \Rightarrow a_m \neq a_{m+3})$

$\Rightarrow\ a_{m+1} = -\dfrac{d}{2},\ a_{m+2} = \dfrac{d}{2}$

$\Rightarrow\ 90 = (2m+1)d$

$\Rightarrow$ 순서쌍 (m, d)로 가능한 경우는
$(1, 30)$, $(2, 18)$, $(4, 10)$,
$(7, 6)$, $(22, 2)$뿐이다.

이때,

$$(\text{나}) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \text{의 최솟값}\right) > -100$$

에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$가 최소인 경우

$\Leftrightarrow\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$이
수열 $\{a_n\}$의 모든 음의 항인 경우

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \text{의 최솟값}\right) = \sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{(m+1)(a_1 + a_{m+1})}{2} = -\frac{(m+1)(d+90)}{4}$$

따라서 $S = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \text{의 최솟값}\right)$가 (나)를 만족시키도록 하는 순서쌍은

$(1, 30) \Rightarrow S = -60$ (O)
$(2, 18) \Rightarrow S = -81$ (O)
$(4, 10) \Rightarrow S = -125$ (X)
$(7, 6) \Rightarrow S = -192$ (X)
$(22, 2) \Rightarrow S = -529$ (X)

에서 모든 자연수 d의 값의 합은 $30 + 18 = 48$

연관문항 풀이

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
a : 첫째항, d : 공차

라 하자.

$|a_6| = a_8$

$\Rightarrow\ a_8 > 0,\ (a_6)^2 = (a_8)^2$

$\Rightarrow\ a_8 > 0,\ a_6 = a_8$ 또는 $a_6 + a_8 = 0$

$\Rightarrow\ a_8 > 0,\ a_7 = 0$

$(\because\ d \neq 0 \Rightarrow a_6 \neq a_8)$

$\Rightarrow\ d > 0,\ a_7 = 0$

이고

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} \times \frac{1}{a_{k+1} - a_k}\right) = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \times \frac{1}{d} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) \times \frac{1}{d} = \frac{5}{6d^2}$$

의 값이 $\dfrac{5}{96}$이므로 $d^2 = 16$에서 $d = 4$ $(\because\ d > 0)$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{13} a_k + a_{14} + a_{15} = 0 + 7d + 8d = 60$$

22학년도 9월

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18학년도 9월 (나)

20. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답

원문항: ⑤ / 연관문항: ③

돌파법

삼차함수의 개형과 대칭성을 이해하고 있자

$g(x)$의 식의 의미를 해석하고 $f(x)$의 개형을 이해하기만 하여도 거의 바로 풀 수 있는 문항이다.

삼차함수의 개형을 외워서 나쁠 것이 없음을 알려주는 문항이다.

원문항 풀이

ㄱ.

$p=1$
$\Rightarrow$ $x>0$에서 $g(x)=f(x+1)-f(1)$
$\Rightarrow$ $g'(1)=f'(2)=0$ (O)

ㄴ.

$f(x)$는 다항함수
$\Rightarrow$ $x \neq 0$에서 $g(x)$는 미분가능

이므로

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능
$\Rightarrow$ $x=0$에서 $g(x)$가 미분가능
$\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{x \to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x \to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$
$\Rightarrow$ $f'(0)=f'(p)$
$\Rightarrow$ $f'(p)=0$

이때,

$f'(x)$는 이차함수 & $f'(0)=f'(2)=0$
$\Rightarrow$ $f'(x)=0$의 실근은 0과 2뿐

이므로 $f'(p)=0$인 양수 p는 2뿐이다. (O)

ㄷ.

$f'(x)$는 이차함수 & $f'(0)=f'(2)=0$
$\Rightarrow$ $f'(x)$는 $x=1$에서 대칭
$\Rightarrow$ $f(x)$는 $(1, f(1))$에서 대칭
$\Rightarrow$ $f(x)+f(2-x)=2f(1)$
$\Rightarrow$ $f(-x)+f(x+2)=f(0)+f(2)$
$\Rightarrow$ $f(x+2)-f(2)=-\big(f(-x)-f(0)\big)$

이고 $p \geq 2$에서

음이 아닌 모든 실수 t에 대하여
$f'(t+p) \geq f'(t+2)$
$\Rightarrow$ $x \geq 0$에서
$\displaystyle\int_0^x \big(f'(t+p)-f'(t+2)\big)dt \geq 0$
$\Rightarrow$ $x \geq 0$에서
$f(x+p)-f(p) \geq f(x+2)-f(2)$
$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \geq \int_0^1 \big(f(x+2)-f(2)\big)dx$
$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \geq -\int_0^1 \big(f(-x)-f(0)\big)dx$
$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \geq -\int_{-1}^0 \big(f(x)-f(0)\big)dx$
$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \geq -\int_{-1}^0 g(x)\,dx$
$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,dx \geq 0$ (O)

따라서 〈보기〉에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

연관문항 풀이

$$h(x)=f(x)+x$$

라 하면

$$g(t):\ f(x)+x=t\text{의}$$
서로 다른 실근의 개수
$$\Rightarrow$$
$$g(t):\ h(x)=t\text{의 서로 다른 실근의 개수}$$

라 할 수 있다.

ㄱ.

$h(x)=x^3+x$
$\Rightarrow\ h'(x)=3x^2+1>0$
$\Rightarrow\ h(x)$는 증가함수
$\Rightarrow\ h(x)$는 일대일대응
$\Rightarrow\ g(t)=1$ (상수함수) (O)

ㄴ.

$h(x)$가 극값을 가지지 않는 경우
$\Rightarrow\ h(x)$는 일대일대응
$\Rightarrow\ g(t)=1$ (모순)
$\Rightarrow\ h(x)$가 극값을 가짐

곧, $g(1)=2$이면 $h(x)$가 극값을 가지고 $h'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $h(x)$는

$x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소 $(\alpha<\beta)$

따라서 $h(\beta)<t<h(\alpha)$에서

$g(t)=3$ (O)

ㄷ.

$g(t)$가 상수함수
$\rightarrow f(x)$가 극값을 가지지 않음

이 명제의 대우는

$f(x)$가 극값을 가짐
$\rightarrow g(t)$가 상수함수가 아님

반례로

$$f(x)=x^3-x$$

이면

$f'(x)=3x^2-1$
$\Rightarrow\ f(x)$가 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극값 가짐

이지만,

$h(x)=x^3$
$\Rightarrow\ h(x)$는 증가함수
$\Rightarrow\ g(t)=1$ (상수함수) ($\because$ ㄱ)

이므로 만족시키지 않는다. (X)

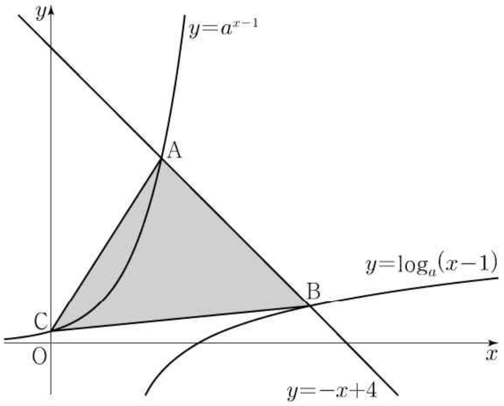
따라서 〈보기〉에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22학년도 9월

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



25학년도 9월

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

정답

원문항: 192 / 연관문항: ⑤

돌파법

지수함수와 로그함수의 역함수 관계
=> 대칭성

문항에서 출제된 요소가 지수함수와 로그함수의 역함수 관계에 의해 대칭성을 가지고 이를 평행이동하여도 이해할 수 있는가로 단순하지만 허를 찌르는 강력한 문항이었다.

원문항 풀이

두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는
직선 $y=x$에 대하여 대칭

에서 각 곡선 및 직선을 x축 방향으로 1만큼 평행이동하면

두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$는
직선 $y=x-1$에 대하여 대칭

이때,

A는 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점
$\Rightarrow$ A를 $y=x-1$에 대칭이동한 점 A′은 곡선 $y=\log_a(x-1)$ 위에 있음
$\Rightarrow$ 직선 AA′의 기울기는 -1
$\Rightarrow$ A는 $y=-x+4$ 위에 있으므로 A′은 $y=\log_a(x-1)$과 $y=-x+4$의 교점
$\Rightarrow$ $\mathrm{B}=\mathrm{A}'$

이기에

선분 AB의 중점 = M

이라 하면

M은 직선 $y=x-1$ 위의 점
$\Rightarrow$ M은 $y=x-1$, $y=x-1$의 교점
$\Rightarrow$ M은 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$
$\Rightarrow$ A는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$\Rightarrow$ $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{25}{4}$

따라서

C는 $y=a^{x-1}$과 y축의 교점
$\Rightarrow$ C는 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$
$\Rightarrow$ C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리 $=\frac{48}{25}\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ 삼각형 ABC에서 AB가 밑변일 때 (높이) $=\frac{48}{25}\sqrt{2}$

이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times(\text{높이})$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48}{25}\sqrt{2}$$
$$=\frac{96}{25}$$

에서 $50\times S=192$

연관문항 풀이

일반성을 잃지 않고 A_n보다 B_n의 x좌표가 더 크다고 하자. … ㉠

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$에 대하여

$$\triangle x = (x\text{좌표의 차}),\ \triangle y = (y\text{좌표의 차})$$

라 하면

(가) $\Rightarrow$ $\triangle y = 3\triangle x$
(나) $\Rightarrow$ $(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 = n^2 \times 10$

에서

$$\triangle x = n,\ \triangle y = 3n \quad \cdots \text{㉡}$$

이때,

A'_n, B'_n : A_n, B_n을 각각 $y=x$에 대해 대칭이동한 두 점

라 하면

$y=2^x$를 $y=x$에 대해 대칭이동하면
$y=\log_2 x$임
$\Rightarrow$ A'_n, B'_n은 $y=\log_2 x$ 위에 있음

이고

중심이 $y=x$ 위에 있는 원은
$y=x$에 대하여 대칭
$\Rightarrow$ A_n, B_n을 지나고 중심이 $y=x$ 위에 있는 원은 A'_n, B'_n을 지난다.

이므로

A_n, B_n을 지나고 중심이 $y=x$ 위에
있는 원과 $y=\log_2 x$의 교점은 A'_n, B'_n

㉠에 의하여

$$x_n = (\mathrm{B}'_n\text{의 } x\text{좌표})$$
$$= (\mathrm{B}_n\text{의 } y\text{좌표})$$

이므로 ㉡에 의하여

$$\mathrm{B}_n = \left(\log_2(x_n),\ x_n\right)$$
$$\Rightarrow \mathrm{A}_n = \left(\log_2(x_n) - n,\ x_n - 3n\right)$$
$$\Rightarrow 2^{\log_2(x_n) - n} = x_n - 3n$$
$$\Rightarrow x_n = \frac{2^n}{2^n - 1} \times 3n$$
$$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 8,\ x_3 = \frac{72}{7}$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{170}{7}$$