돌파

수능 전 마지막 비킬러 대비 칼럼
1호 - 2022학년도 6월 모의고사편

敎心 교심
교육하는 마음

총평 (공통 기준)

1. 신기한 문항이 많다.

현재의 공통-선택 체제의 시초격인 시험지로 개별 문항 단위로 약간의 독특함이 하나씩 들어가있는 세트인 것 같다.

필자는 이번 칼럼을 작성하면서 칼럼에 들어갈 문항을 셀렉했어야 했는데,
모든 문항을 셀렉할뻔할 정도로 각 문항별 매력이 존재해 재미있는 세트이다.

물론 그 당시에도 비슷한 반응이었던 것 같지만, 요즘 기출과 비교하였을 때
확실히 재미있는 문항의 개수가 많기는 하다.

2. 비킬러 난도가 높기는 하다.

요즘 문항들, 특히 비킬러 번호대(9-14, 20, 21)은 1-2문항 제외하고 국밥 유형으로 내려고 한다. (심지어 킬러도 난도가 낮다!)

2206이 각 문항에서의 특이한 부분을 하나씩 넣어서 난도를 높인 느낌이라면
최신 기조는 공통에서는 15, 21, 22에서 (혹은 가끔 13, 14, 20) 변별하고
선택과목에서 변별하려는 경향이 강하다.

그러나, 평가원이 뒷통수를 때린 사례는 한 두번이 아니기에
오히려 <u>2606, 2609의 공통이 쉽게 출제된 지금
2611의 공통의 난도가 굉장히 높을 수도 있음을 기억해야 한다.</u>

선택한 문항

* 10번 - 240621
* 11번 - 250913
* 13번 - 221112
* 20번 - 250615

문항은 난도가 어려운 문항을 선택하기보다는 쉽지만 독특한 느낌이 있어
또 보면 좋은 문항들을 위주로 선택하였다.

220610

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

풀이 정답: ②

$$f(x)=\log_n x, \quad g(x)=-\log_n(x+3)+1$$

이라 하자.

$$f: \text{ 증가함수}, \quad g: \text{ 감소함수}$$

에서 두 곡선의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$f(1)<f(\alpha)<f(2)$$
$$g(1)>g(\alpha)>g(2)$$

이므로

$$f(1)<g(1)$$
$$\Rightarrow \log 4 < \log n$$
$$\Rightarrow n>4$$

이고

$$f(2)>g(2)$$
$$\Rightarrow \log 10 > \log n$$
$$\Rightarrow n<10$$

따라서 n으로 가능한 모든 값은

5, 6, 7, 8, 9

이고 이의 합은 35

총평

공통 + 선택 체제에서 가장 초반에 접했을 문항

두 곡선의 증가와 감소 형태를 이해함으로서 x좌표를 그대로 구하는 것이 아닌 각 곡선의 $x=1$에서와 $x=2$에서의 위치관계를 파악하는 점이 인상깊다

이러한 논리구조는 예전 ㄱㄴㄷ 문항에서 부등식의 참을 논할 때 많이 나온 구조인데, 이를 이렇게 사용한 점에 주목할 필요성이 있어 보인다.

이렇게 비킬러 번호대의 문항에서 오히려 기존 ㄱㄴㄷ 문항에 있던 요소 하나만을 물어보는 문항이 출제되는 것이 가능하다.

연관문항 - 240621

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

연관성

원문항과 연관문항 모두 함수의 증가와 감소를 통해 $x=t$에서의 위치관계를 파악해야 하였고 이 논리를 바탕으로 ㄷ에서 필수적으로 사용되는 부등식을 도출해야 한 점에서 연관성이 높다

220611

11. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

> (가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

풀이 정답: ②

조건 (나)에 의하여

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx=\int_{-3}^{-2} g(x)\,dx=\int_{1}^{2} g(x)\,dx$$

이고

$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx=\int_{-2}^{-1} g(x)\,dx$$

이기에

$$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$$

$$=3\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+2\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

이때,

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-f(x+1)+1)dx$$

$$=-\int_{0}^{1} f(x)dx+1$$

$$=\frac{5}{6}$$

이므로

$$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx=3\times\frac{5}{6}+2\times\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$$

총평

출제 범위가 수학2인점을 감안하였을 때,
넓이의 관점으로 평행이동을 통해 원하는 값을 얻도록 설계한점이 인상깊은 문항이다

비록 이후에는 동일한 유형이 나오지 않으나 대칭성을 다루는 연관문항도 나오는 만큼 넓이 유형과 고1 수학 내용을 엮어서 내는 경우가 굉장히 많을 것으로 예상한다

참고로 고1 수학 중 평면좌표를 다루는 3단원의 세부 목차는 다음과 같다.

3-1. 평면좌표
3-2. 직선의 방정식
3-3. 원의 방정식
3-4. 도형의 이동

연관문항 - 250913

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\ge 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

연관성

원문항에서는 넓이의 평행이동 및 대칭이동을 통해 답을 도출하면
연관문항에서는 넓이의 대칭성만을 활용해 구하는 적분 구간을 적절하게 해석해야 하였던 문항이다.

특히 이 문항에서는 A, B의 값을 직접 구하는 난도가 굉장히 높기에 대칭성에 대한 이해도가 높아야 했다.

220613

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

풀이 정답: ⑤

$f(x)$는

x가 정수일 때, $f(x)=1$
x가 정수가 아닐 때, $f(x)=3$

이때, 20 이하의 자연수 k에 대하여

$\sqrt{k}$가 정수이도록 하는 k의 값
$=1, 4, 9, 16$

이므로

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{k \times 3}{3} - \sum_{m=1}^{4} \frac{m^2 \times 2}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{20} k - \frac{2}{3} \sum_{m=1}^{4} m^2$$
$$= \frac{20 \times 21}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6}$$
$$= 190$$

총평

교과적으로 보았을 때, 수학1의 수열의 합을
제외한 그 어떠한 평가요소도 보이지 않아서
신기했던 문항이다.

특히, 현 문항은 수열의 합이라는 요소를
$1 \le k \le 20$인 자연수 k에 대하여 $\sqrt{k}$
만을 고려하도록 하는 장치로서 두고 실질적으로는
$f(x)$에서 x의 정수 여부에 따른 함숫값
을 알아내도록 하는 것이 주된 요소였다.

이에 따라 평가원이 교과서의 평가요소를 따르되,
사고 능력을 교과요소에서 무조건적으로 평가하지
않는다는 사실을 얼핏 알 수 있다.

물론 현 시점(26수능이전)에서는 교과 요소의
비중이 높아지기는 하였으나, 그렇지 않은
문항이 언제나 등장할 수 있음을 명심해야 한다.

연관문항 - 221112

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때,
$f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

연관성

원문항과 유사한 형태를 띠는 수열의 합 문항보다
원문항과 같이 교과요소를 적게 넣되,
평가요소를 거칠게(?) 넣은 기출 문항을 가지고
왔다.

연관문항도 원문항처럼 교과요소가 수학2의 함수의
연속성밖에 없고, 연속성을 함수 $f(x)$의 관찰
범위를 제한하기 위해 설정했다는 점에서 유사하
다.

구체적으로, 연속성을 통해 f로 가능한 개형의
수를 제한하고, 최대-최소에 따른 논리적인 결정을
유도하였다.

220620

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

풀이

정답: 8

$g(x)$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt-\int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

이므로 이의 도함수는

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$$=(3x^2-24x+45)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$$=3(x-3)(x-5)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

조건에 의하여

$g(x)$가 하나의 극값을 가진다.
$\Rightarrow$ $g'(x)$의 부호는 한 번만 변한다.

이고

$\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$의 도함수는

$\{f(x)\}^4 \geq 0$

$\Rightarrow$ $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$는 증가함수

$\Rightarrow$ $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$는 $x=a$에서만 부호변화

이므로 $g'(x)$의 부호가 변하는 지점은

$a\neq 3$, $a\neq 5$이면 $x=3$, 5, a (X)
$a=3$이면 $x=5$ (O)
$a=5$이면 $x=3$ (O)

이기에 모든 a의 값의 합은 $3+5=8$

총평

함수 $g(x)$를 미분하는 과정은 기출에서도 많이 나온 형태이기에 그나마 익숙했을 것이다.

그러나, $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$가 증가함수임을 통해 $g'(x)$의 부호변화를 관찰하는 포인트는 낯설었다.

정적분으로 정의된 함수를 보고 필요한 정보만 바로 파악하는 능력이 필요했다.

연관문항 – 250615

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k(k\geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x\leq k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여
$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt\geq 0$이고
$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt\geq 0$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

연관성

원문항처럼 정적분의 구체적인 값을 조사하지 않고 $g(x)$가 증가함수임을 통해 부호변화를 쉽게 관찰해야 하는 조건 (나)가 핵심인 문항이다.

연관문항에서는 원문항과는 다르게 피적분 함수의 양과 음을 따지고 적분 구간을 따져서 k로 가능한 구간을 구하는 매우 까다로운 문항이었다.