제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. 두 다항식 $A=2x^2+xy+y^2$, $B=x^2+2xy-y^2$에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① x^2-xy ② $x^2+3xy-y^2$ ③ $3x^2+3xy$
④ $3x^2-3xy+y^2$ ⑤ $3x^2+xy+2y^2$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 6 & a+1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$일 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

$a=3$
$b=9$

3. 복소수 $z=1+3i$의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(z+\bar{z})i$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $4i$ ② $2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$2i$

4. 등식

$$a(x+2)^2+1=2x^2+bx+9$$

가 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$a=2$

$8x=bx$
$b=8$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+a-5=0$이 중근을 갖도록 하는 상수 a의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$a-5=4$

6. x에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b \le 0$의 해가 $3 \le x \le 5$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$(x-3)(x-5)$
$= x^2-8x+15$

$b=15$
$a=-8$

7. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a^2+b \le 6$을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

a	b
1	1~5
2	1, 2

7개

8. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2+A^3의 모든 성분의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2+A^3=\begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

$-8-10+10+12=4$

9. 다항식 $x(x-4)(x^2-4x+7)+12$가 $(x-1)(x+a)(x+b)^2$으로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값은? [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

$(x^2-4x)(x^2-4x+7)+12$

$x^2-4x=t$, $t(t+7)+12$

$=t^2+7t+12=(t+3)(t+4)$

$=(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)$

$=(x-1)(x-3)(x-2)^2$

$\therefore a=-3,\ b=-2$ / $2a+b=-8$

10. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 3x^2-xy-7y=3 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

$y=2x-4$ 대입

$3x^2-x(2x-4)-7(2x-4)=3$

$x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$, $x=5$, $y=6$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

(가) x에 대한 이차방정식 $x^2+kx+3k=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(나) x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+4k-7=0$이 실근을 갖는다.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

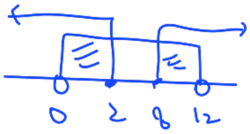
(가) $D = k^2-12k<0$, $0<k<12$

(나) $D/4 = (k-3)^2-4k+7 \geq 0$

$k^2-10k+16 \geq 0$

$(k-2)(k-8) \geq 0$

$k \leq 2$, $k \geq 8$



$k = 1, 2, 8, 9, 10, 11$　6개

12. A 고등학교와 B 고등학교 학생들은 음악 활동으로 피아노와 드럼을 배우고 있다. <표1>은 A 고등학교와 B 고등학교의 남학생 수와 여학생 수를 나타낸 것이다. 두 학교 모두 <표2>와 같이 남학생의 20%는 피아노를, 80%는 드럼을 배우고, 여학생의 70%는 피아노를, 30%는 드럼을 배운다.

(단위: 명)

	남학생	여학생
A 고등학교	120	160
B 고등학교	130	140

<표1>

(단위: %)

	피아노	드럼
남학생	20	80
여학생	70	30

<표2>

<표1>과 <표2>를 각각 행렬 $P=\begin{pmatrix}120 & 160\\130 & 140\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}0.2 & 0.8\\0.7 & 0.3\end{pmatrix}$으로 나타낼 때, B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수를 나타낸 것은? [3점]

① 행렬 PQ의 $(1,\ 2)$ 성분
② 행렬 PQ의 $(2,\ 1)$ 성분
③ 행렬 PQ의 $(2,\ 2)$ 성분
④ 행렬 QP의 $(2,\ 1)$ 성분
⑤ 행렬 QP의 $(2,\ 2)$ 성분

13. 두 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -2\end{pmatrix}$, B가

$$A+2B=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix},\ AB=O$$

를 만족시킬 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은?
(단, a, b는 상수이고, O는 영행렬이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$2B=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2-a\\ 5-b & 2\end{pmatrix}$

$2AB=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2-a\\ 5-b & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8+5a-ab & a+2\\ 10b-10 & 2b-ab-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore a=-2$

$b=1$

$2B=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$4+2+2+1=9$

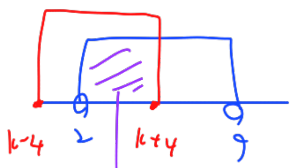
14. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases}|x-k|\le 4\\ x^2-11x+18<0\end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4점]

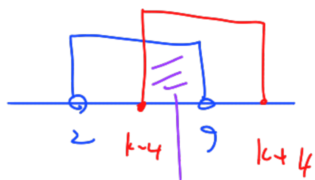
① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$\begin{cases}-4\le x-k\le 4\\ (x-2)(x-9)<0\end{cases}$ $\begin{cases}k-4\le x\le k+4\\ 2<x<9\end{cases}$



3, 4, 5

$\boxed{k=1}$



6, 7, 8

$\boxed{k=10}$

15. 두 정수 a, b에 대하여 x에 대한 두 다항식

$$P(x)=x^4+x^3+2x-4,$$
$$Q(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+1$$

이 모두 $x+b$로 나누어떨어질 때, $P(b)+Q(a)$의 값은? [4점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

$P(-2)=0 \rightarrow P(x)=(x+2)(x^3-x^2+2x-2)$

$=(x+2)(x-1)(x^2+2)$

$b=2$ or $b=-1$

$Q(-2)=16-8+4a-4+1=0$

$4a=-5$

$a=\frac{-5}{4}$ (×)

(∵ a는 정수)

$Q(1)=1+1+a-1+1=0$

$a=-2$ (○)

$\therefore P(b)+Q(a)$

$=P(-1)+Q(-2)$

$=-6+3=-3$

16. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 근의 곱은 4이다. 방정식 $f(x)=-x+1$의 두 근의 차가 2일 때, $f(6)$의 값은? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

$\alpha\beta=4 \rightarrow f(x)=x^2+ax+4$, $D=a^2-16>0$

$f(x)=-x+1$

$f(x)+x-1=0$

$x^2+(a+1)x+3=0$ 근: p, q

$|p-q|=\sqrt{(a+1)^2-12}=2$

$(a+1)^2=16$, $a=3, -5$

$\therefore a=-5$ ($\because a^2-16>0$)

$\Rightarrow f(x)=x^2-5x+4$

$f(6)=36-30+4=10$

17. 이차항의 계수가 3 인 이차함수 $f(x)$ 와 일차항의 계수가 12 인 일차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0)-g(0)=f(2)-g(2)=3$
(나) 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 이 중근을 갖는다.

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60

$f(x)=3x^2\sim$

$g(x)=12x+a$

$\begin{cases} f(0)-g(0)=3 \\ f(2)-g(2)=3 \end{cases} \Rightarrow f(x)-g(x)=3x(x-2)+3$

$=3x^2-6x+3$

$f(x)+g(x)=f(x)-g(x)+2g(x)$

$=(3x^2-6x+3)+(24x+2a)$

$=3x^2+18x+3+2a=0$

$D/4=81-3(3+2a)=0,$

$3+2a=27, \quad a=12$

$f(x)=(3x^2-6x+3)+g(x)=3x^2+6x+15$

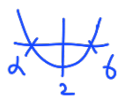
$f(3)=60$

18. x 에 대한 삼차방정식 $x^3-6x^2+(k+8)x-2k=0$ 은 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$ 를 갖는다. $2\alpha+\beta=2\gamma$ 일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

① $\frac{27}{8}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{31}{8}$

$x=2 \rightarrow 8-24+2k+16-2k=0$

$(x-2)(x^2-4x+k)=0 \longrightarrow$



근: α, γ, $\beta=2$

$\alpha+\gamma=4$, $\alpha\gamma=k$

$2\alpha+\beta=2\gamma$

$2\alpha+2=2\gamma$

$\alpha-\gamma=-1$

$\alpha=\frac{3}{2}$

$\gamma=\frac{5}{2}$

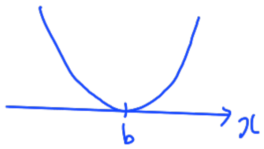
$\alpha\gamma=\frac{15}{4}=k$

19. 두 양수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2$이 있다. 실수 k에 대하여 $k \le x \le k+2$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(k)$라 할 때, 함수 $g(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

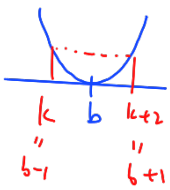
(가) $g(3)=a$
(나) $g(2)+g(6)=32$

$f(6)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

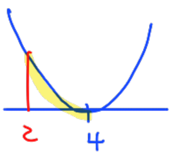


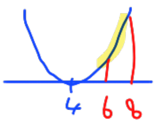
$g(k)$가 최소 ⇒ $k=b-1$



$f(b-1)=a$
$f(b)=0$
$g(b-1)=a$
$\therefore b=4$

$f(x)=a(x-4)^2$





$g(2)=f(2)-f(4)$
$=4a$

$g(6)=f(8)-f(6)$
$=12a$

$g(2)+g(6)=16a=32$, $a=2$

$\therefore f(x)=2(x-4)^2$, $f(6)=8$

20. 최고차항의 계수가 $a\,(a<0)$인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(3)=g(3)$이다. 함수 $h(x)$를

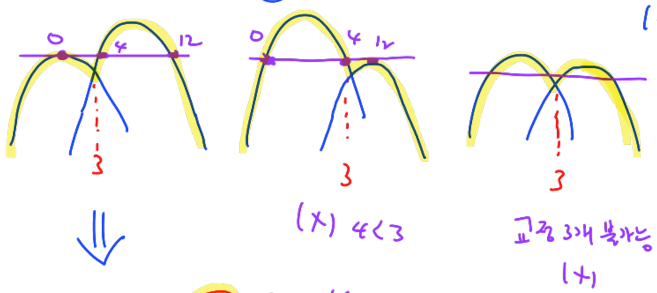
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 3) \\ g(x) & (x > 3) \end{cases}$$

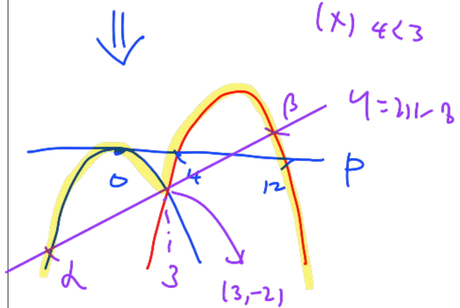
이라 할 때, 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=f(0)$이 만나는 점의 x좌표는 0, 4, 12뿐이다.
(나) 두 실수 α, $\beta\,(\alpha<3<\beta)$에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-8$이 만나는 점의 x좌표는 α, 3, β이다.

$\alpha+\beta=6$일 때, $h(-2)+h(5)$의 값은? [4점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19





$f(x)=ax^2+p$
$g(x)=a(x-4)(x-12)+p$
$f(3)=9a+p=-2$
$f(x)-(2x-8)=ax^2-2x+p+8$ → $\alpha+3=\frac{2}{a}$
$g(x)-(2x-8)=ax^2-(16a+2)x$ ~ → $\beta+3=\frac{16a+2}{a}$
⇒ $\underbrace{\alpha+\beta}_{6}+6=16+\frac{4}{a}$
$\therefore \frac{4}{a}=-4$, $a=-1$
⇒ $p=7$

$f(x)=-x^2+7$
$g(x)=-(x-4)(x-12)+7$
$\therefore h(-2)+h(5)=f(-2)+g(5)=3+14=17$

21. 그림과 같이 월요일부터 금요일까지 총 5일 동안 진행되는 스포츠 주간에 서로 다른 네 종목 A, B, C, D를 활동하기 위한 스포츠 활동 신청서가 있다.

스포츠 활동 신청서

종목＼요일	월요일	화요일	수요일	목요일	금요일
A					
B					
C					
D					

매일 서로 다른 두 종목씩 하루도 빠짐없이 활동하도록 다음 규칙에 따라 스포츠 활동 신청서를 작성하는 경우의 수는? (단, 종목을 신청하는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 종목은 적어도 2일을 선택하여 활동한다.
> (나) 종목 A와 종목 B는 같은 요일에 활동하지 않는다.
> (다) 종목 B와 종목 C는 하루만 같은 요일에 활동한다.

① 410 　 ② 420 　 ③ 430 　 ④ 440 　 ⑤ 450

	1	2	3	4	5
A	o	o			
B			o	o	

A+B ≤ 5

i) A B
2 3

C+D = 5
2 3
3 2

	1	2	3	4	5
A	o	o			
B			o	o	o
C			o		
D				o	o

$_5C_2 \times {_3C_1} \times (1+2) = 90$

C 2개 　 C 3개

ii) A B
3 2

C+D = 5
2 3
3 2

	1	2	3	4	5
A	o	o	o		
B				o	o
C				o	
D					o

$_5C_3 \times {_2C_1} \times (3+3) = 120$

C 2개 　 C 3개

iii) A B
2 2

C+D = 6
2 4
3 3
4 2

	1	2	3	4	5
A	o	o			
B			o	o	
C			o		o
D				o	o

$_5C_2 \times {_3C_2} \times {_2C_1} \times (1+2+1) = 240$

C 2개 　 C 3개 　 C 4개

$\therefore 90+120+240 = 450$

단답형

22. $_4P_3 + {_4C_3}$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{28}$

$24+4=28$

23. 연립부등식

$$\begin{cases} 3x \le x+16 \\ x+8 \le 4x-10 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$

$\boxed{21}$

$6 \le x \le 8$ 　 $6+7+8=21$

24. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ A-2B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$(A+B)-(A-2B)$

$= 3B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$

$\therefore B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $1-3+5=3$

25. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x-2$로 나눈 나머지가 3이다. $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$P(1)=2$

$P(2)=3$

$P(x)=(x-1)(x-2)+x+1$

$P(3)=2+4=6$

26. 다음 조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{88}$

(가) 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수 중 7의 개수는 1이다.
(나) 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 곱을 2로 나눈 나머지는 1이다. → 홀수, 홀수

$7\ \_\ \_$ $4\times9=36$

$\_\ 7\ \_$ $4\times4=16$

$\_\ \_\ 7$ $4\times9=36$

88

27. 상수 a에 대하여 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나눈 나머지는 $2f(x)+6x^2-4$이다. $\{f(x)\}^2-2f(x)+3$을 x^2-4x-5로 나눈 나머지가 2일 때, $f(a^2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{16}$

$f(x) = (x-a)^2 Q(x) + 2f(x) + 6x^2 - 4$

나머지 1차 이하

$\therefore f(x) = -3x^2 + ax + b$

$\{f(x)\}^2 - 2f(x) + 3 = (x-5)(x+1)Q_1(x) + 2$

$x=5 \rightarrow \{f(5)\}^2 - 2f(5) + 3 = 2,\ (f(5)-1)^2 = 0,\ f(5) = 1$

$x=-1 \rightarrow \{f(-1)\}^2 - 2f(-1) + 3 = 2,\ (f(-1)-1)^2 = 0,\ f(-1) = 1$

$f(x) = -3(x+1)(x-5) + 1$

$= -3x^2 + 12x + 16$

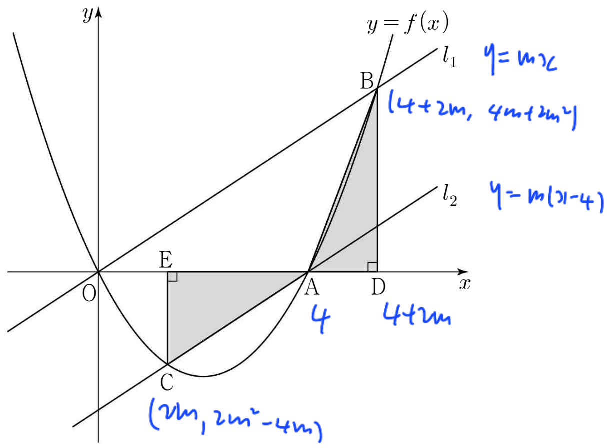
$(x-a)^2 Q(x) = -f(x) - 6x^2 + 4 = -3x^2 - 12x - 12$

$= -3(x+2)^2 \quad \therefore a = -2$

$f(a^2) = f(4) = 16$

28. 이차함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 O, A라 하자. $0<m<2$인 실수 m에 대하여 점 O를 지나고 기울기가 m인 직선 l_1이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 B, 점 A를 지나고 기울기가 m인 직선 l_2가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 삼각형 AEC, ADB의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1-S_2의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p\times q$의 값을 구하시오. $\boxed{12}$

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$f(x) = \frac{1}{2}x(x-4) \quad A(4,0)$

$l_1 : y = mx$

$l_2 : y = m(x-4)$

$l_1 /\!/ l_2 \rightarrow$ O,B와 A,C x좌표 합 일정

$f(x) = mx \Rightarrow \frac{1}{2}x(x-4-2m) = 0$

$D(4+2m, 0)$

$\Rightarrow C(2m, 0)$

$S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(4-2m)(4m-2m^2) - \frac{1}{2}\cdot 2m(4m+2m^2)$

$= \frac{1}{2}\cdot 2m\{(4-2m)(2-m) - 2m(2+m)\}$

$= m(-12m+8) = -m(12m-8)$

$0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$

$m = \frac{1}{3} \rightarrow (-\frac{1}{3})(-4) = \frac{4}{3} = \frac{q}{p}$

최대

$p\times q = 12$

29. 1 부터 8 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8 장의 카드가 있다. 이 8 장의 카드 중에서 6 장의 카드를 택하여 왼쪽부터 모두 일렬로 나열한다. 이 6 장의 카드에 적힌 수를 왼쪽부터 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 할 때, 세 자연수 A, B, C를

$$A = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$
$$B = a_4 \times 10 + a_5,$$
$$C = a_6$$

이라 하자. 두 수 $A+B+C$, $A-B-C$가 모두 5 의 배수가 되도록 하는 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6의 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{720}$

$A = \underline{a_1}\ \underline{a_2}\ \underline{a_3}$

$B = \underline{a_4}\ \underline{a_5}$

$C = \underline{a_6}$

$A+B+C = 5p$

$A-B-C = 5q$

$5p+5q = 2A$

$5(p+q) = 2A$ ∴ A는 5의 배수 → $a_3 = 5$

$5p-5q = 2B+2C$

$5(p-q) = 2(B+C)$ ∴ $B+C$는 5의 배수

→ $a_5 + a_6 = 5$ or 10 or 15

(1 4) (4 1) (2 3) (3 2)

(2 8) (8 2) (3 7) (7 3) (4 6) (6 4)

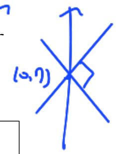
(7 8) (8 7)

12가지

나머지 $a_1, a_2, a_4 \rightarrow {}_5P_3 = 60$

∴ $60 \times 12 = 720$

30. 두 양수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + a$와 두 일차함수 $g(x) = bx + 7$, $h(x) = -\frac{1}{b}x + 7$이 있다. → 수직



(0,7)

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 두 실수 α, β $(\alpha < \beta)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\} = \frac{1}{16}(x-\alpha)^n(x-\beta)^{4-n}$$
> 을 만족시키는 자연수 n이 존재한다. (단, $1 \le n \le 3$)

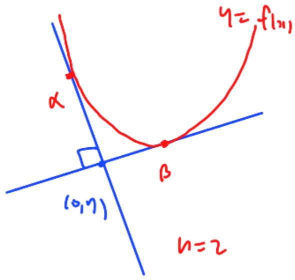
$S = \frac{1}{2}(\beta-\alpha) \times (|f(\alpha)| + |f(\beta)|)$

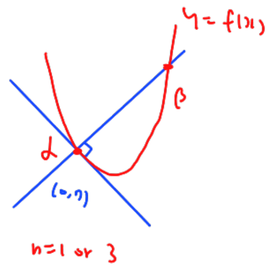
네 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$, $\mathrm{C}(\alpha, 0)$, $\mathrm{D}(\beta, 0)$에 대하여 사각형 ACDB의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m = p+q\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{163}$

$f(x)-g(x) = \frac{1}{4}x^2 - (b+2)x + a - 3 = A(x)$

$f(x)-h(x) = \frac{1}{4}x^2 + (\frac{1}{b}-2)x + a - 3 = B(x)$





$A(x)$ $D_1 = (b+2)^2 - (a-3) = 0$

$B(x)$ $D_2 = (\frac{1}{b}-2)^2 - (a-3) = 0$

$(b+2)^2 = (\frac{1}{b}-2)^2$, $(b+\frac{1}{b})(b-\frac{1}{b}+4) = 0$

$b+\frac{1}{b} = 0$ or $b - \frac{1}{b} = -4$

(×) $b^2+4b-1=0$

$b = -2+\sqrt{5}$ (∵ $b>0$), $a = 8$

$A(x) = \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{5}x + 5 = \frac{1}{4}(x-2\sqrt{5})^2$

$B(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{5}x + 5 = \frac{1}{4}(x+2\sqrt{5})^2$

$f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 8$, $\alpha = -2\sqrt{5}$, $\beta = 2\sqrt{5}$

$A(-2\sqrt{5}, 17+4\sqrt{5})$, $B(2\sqrt{5}, 17-4\sqrt{5})$

$C(-2\sqrt{5}, 0)$, $D(2\sqrt{5}, 0)$

∴ $S = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times (34) = 68\sqrt{5} = M$

$\alpha = 0 \rightarrow a = 3$, $b = -2$ or $\frac{1}{2}$

$b=-2$ $b=\frac{1}{2}$

$A(x)$ $\frac{1}{4}x^2$ $\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$

$B(x)$ $\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$ $\frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{1}{4}x(x-10)$ ∴ $\beta = 10$

$f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 3$

$A(0,7)$, $B(10,12)$, $C(0,0)$, $D(10,0)$

$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 19 = 95 = m$

$M+m = 95 + 68\sqrt{5}$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.