8. 두 양수 a, b가

$$\log_{\sqrt{2}} a + \log_2 b = 2, \quad \log_2 a + \log_2 b^2 = 7$$

을 만족시킬 때, $a \times b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. $G(3) = 2F(3)$일 때, $G(5) - 2F(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$G(x)' = 2f(x) + 1$

$G(x) = 2F(x) + x + \cancel{c}$ -3

$G(3) = 2F(3) + 3 + C$

$2F(3)$

$\boxed{C = -3}$

$G(5) - 2F(5) = 2$

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = 21$$

일 때, $S_2 + S_7$의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

$\boxed{ar = 1}$

$-S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 = 21$

$a_2 + a_4 + a_6 = 21$

$1 + r^2 + r^4 = 21$

$r^4 + r^2 = 20$

$\boxed{r^2 = 4}$

$r = 2$

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 10t + 7$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 3이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$t^3 - 5t^2 + 7t$

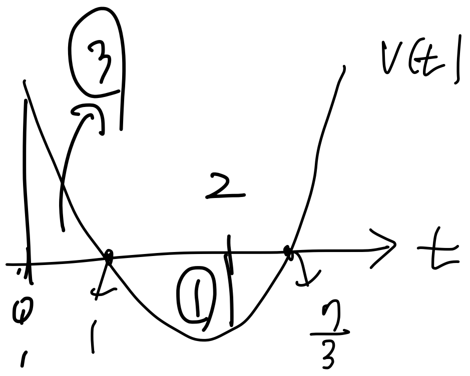
$3t^2 - 10t + 7$
$3t \quad -7$
$1t \quad -1$

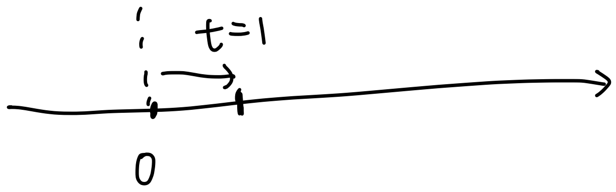
$1-5+7$
$-4+7=3$

$(8-20+14)$

$-(1-5+7)$

$2-3$
$=-1$

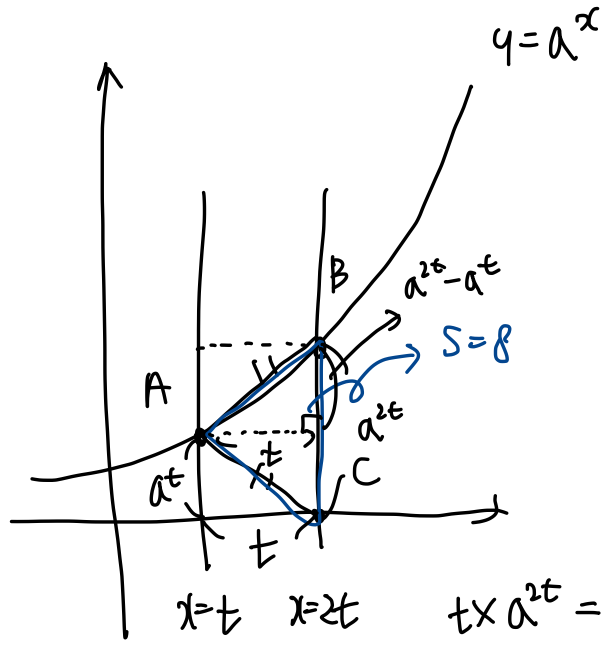




12. 상수 $a\,(a>1)$과 양수 t에 대하여 곡선 $y=a^x$과 두 직선 $x=t$, $x=2t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$이고 삼각형 ACB의 넓이가 8일 때, $a \times t$의 값은? [4점]

① $2^{\frac{9}{4}}$ ② $2^{\frac{23}{8}}$ ③ $2^{\frac{7}{2}}$
④ $2^{\frac{33}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{4}}$

$\boxed{t>0}$



? $a \times t$

$t \times a^{2t} = 16$

$t \times 4 = 16$

$a^{2t} - a^t = a^t$ $t=4$

$a^{2t} = 2 \times a^t$

$\boxed{a^t = 2}$

$\boxed{a^4 = 2}$

$a = 2^{\frac{1}{4}}$

$t = 2^2$

$\therefore 2^{\frac{9}{4}}$

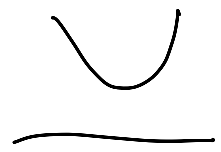
$k>0$

13. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> 모든 실수 a에 대하여
>
> $\lim_{x \to a} \frac{x^2}{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)}$ 의 값이 존재한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$D = 9 - 12 < 0$

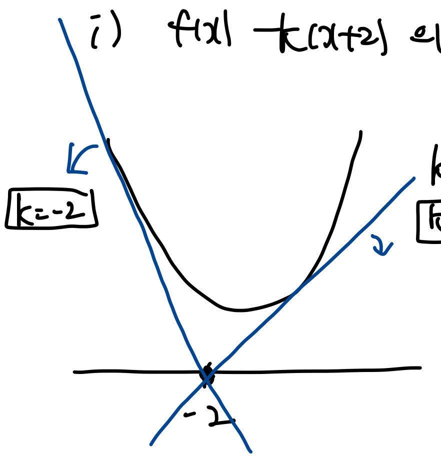


$\lim_{x \to a} \frac{x^2}{f(x)\{f(x) - k(x+2)\}}$

0일리X

0인자가 없거나, 0인자 있어도 x^2이 상쇄시켜주거나

i) $f(x) - k(x+2)$ 의 0인자가 없거나



$\boxed{k=-2}$ $\boxed{k=6}$ $k(x+2)$

$kx + 2k = x^2 + 6x + 12$

$x^2 + (6-k)x + 12 - 2k = 0$

$36 - 12k + k^2 - 4(12-2k) = 0$

$k^2 - 12k + 36 + 8k - 48 = 0$

$k^2 - 4k - 12 = 0$

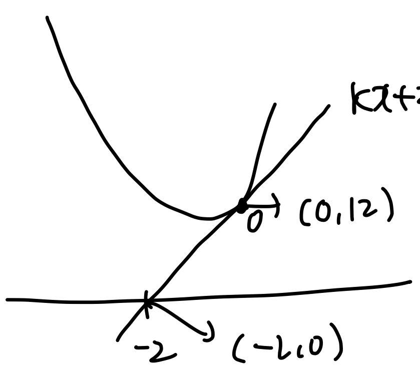
$(k-6)(k+2) = 0$

$k=6,\ k=-2$

따라서, k는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

(7개)

ii) $f(x) - k(x+2)$의 0인자가 $x=0$일때 ($x=0$에서 접할때)



$kx+2k$ $(0,12)$ $(-2,0)$

$\frac{0-12}{-2-0} = k$

$\boxed{k=6}$

가능!

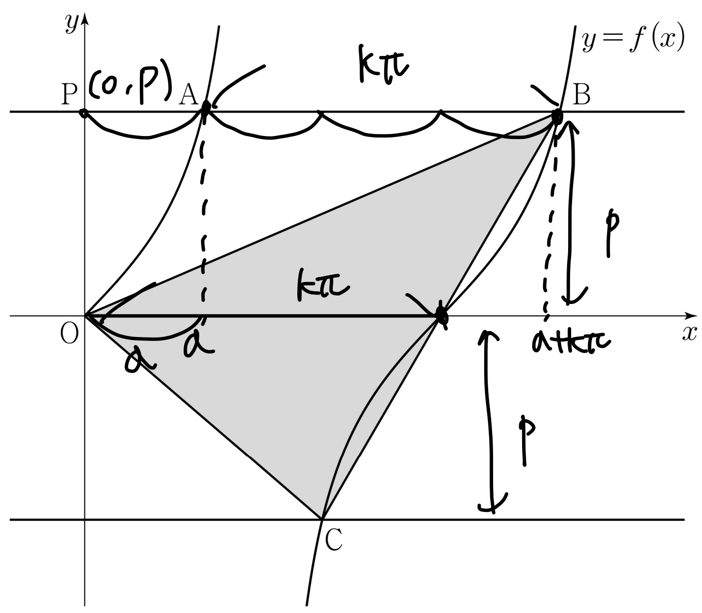
∴ i)에서 7개, ii)에서 1개 → $\boxed{총\ 8개}$

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, 0 \le x < \frac{3k\pi}{2},\ x \ne \frac{k\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan\frac{x}{k}$가 있다. 점 $\mathrm{P}(0, p)\ (p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, B $(\overline{\mathrm{PA}} < \overline{\mathrm{PB}})$라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = 3\overline{\mathrm{PA}}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{주기 : k\pi}$

$a \times 3 = k\pi$ $a = \frac{k\pi}{3}$



$(0, p)$ $k\pi$ $y=p$ p $k\pi$ a a $a+k\pi$ p $y=-p$

$f(a) = p$

$\tan\frac{\pi}{3} = p$

$\boxed{\sqrt{3} = p}$

$\frac{k\pi \times p}{2} + \frac{k\pi \times p}{2} = \frac{5\pi}{3}$

$\boxed{kp = \frac{5}{3}}$

$k = \frac{5}{3\sqrt{3}}$

$k \times \sqrt{3} = \frac{5}{3}$

$+\ \frac{5\sqrt{3}}{9}$

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (|f(t)|-|t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=6$에서 극값을 갖는다.

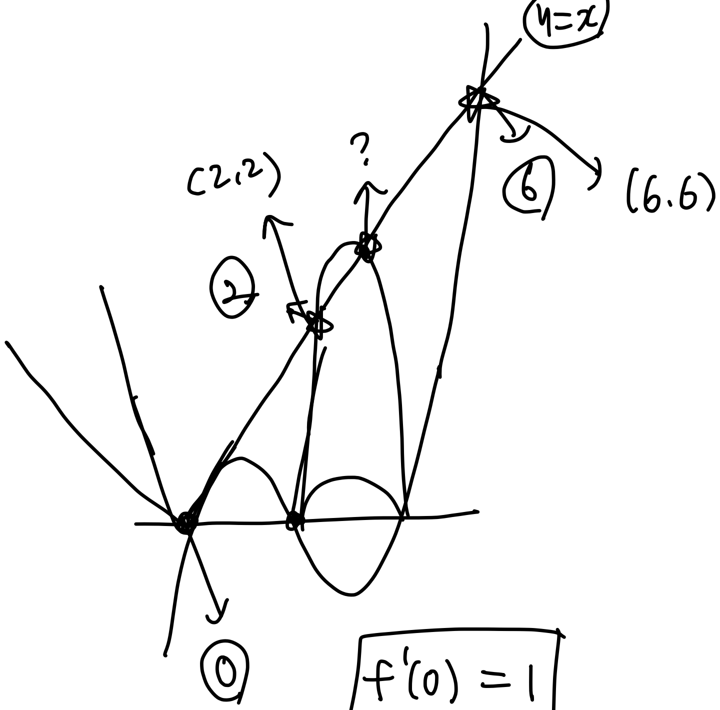
$f(6)\times g(2)<0$일 때, $f(8)$의 값은? [4점]

① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

$g(0)=0$

$g'(x)=|f(x)|-|x|$

$g'(0)=0$
$g'(2)=0$
$g'(6)=0$



$\boxed{f'(0)=1}$

$\boxed{f(0)=0}$

$f(x)=ax^3+bx^2+x$

$f(2)=-2$

$216a+36b+\cancel{6}=\cancel{6}\ 0$

$8a+4b+2=-2$

$8a+4b+4=0$
$-6a$
$2a+b+1=0$

$\boxed{4a=1}$
$6a+b=0$
$b=-6a$

$a=\frac{1}{4}$
$b=-\frac{3}{2}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=na_n+2$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x+1$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(8)=\underset{64}{8\cdot 8}\ \overset{2\ 1}{\cancel{8}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}}+8\cdot\underset{4}{\cancel{8}}x-\frac{3}{\cancel{2}}+8$

$=128+32x-3+8$

$=128-96+8$
-96
$32+8$
$=40$

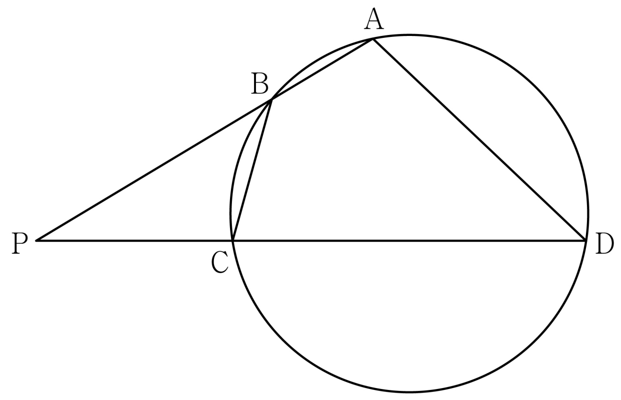
18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 6, \quad 2a_5 - a_4 = 15$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 5a$의 극솟값이 a일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

20. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = 1:3$, $\overline{\mathrm{BC}} < \overline{\mathrm{AD}}$일 때, 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자.



다음은 $\overline{\mathrm{PB}} : \overline{\mathrm{PC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 7:5:\sqrt{14}$이고 $\overline{\mathrm{AD}} = 4\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle\mathrm{BPC} = \theta$라 할 때, $\overline{\mathrm{PB}} : \overline{\mathrm{PC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 7:5:\sqrt{14}$이므로
> 삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = \frac{6}{7}$이다.
> $\overline{\mathrm{PB}} : \overline{\mathrm{PC}} = 7:5$에서 $\overline{\mathrm{PB}} = 7k$, $\overline{\mathrm{PC}} = 5k$,
> $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = 1:3$에서 $\overline{\mathrm{AB}} = l$, $\overline{\mathrm{CD}} = 3l$이라 하자.
> 원의 성질에 의하여
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
> $\overline{\mathrm{PB}} : \overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{PD}} : \overline{\mathrm{PA}}$이고, $l = \boxed{\text{(가)}} \times k$이다.
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1 : \boxed{\text{(나)}}$이므로
> $\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{\boxed{\text{(나)}}} \times \overline{\mathrm{AD}}$이다.
> 따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,
> 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여 $R = \boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$
>
> 이다.

$\frac{f'(0)}{2}-2 \le f'(0) \le 0$

$\frac{f'(0)}{2}-2 = f'(2x)$

$f(x)=x^3+\cdots$

$3x^2+2ax+b$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(10)=300+20a+b=296$

$a=0 \quad b=-4$

$$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2 \le \frac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x} \le x^4$$

$$\frac{5}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}-2 \le 4x^2+2ax+b \le x^4$$

$-4 \le b \le 0$

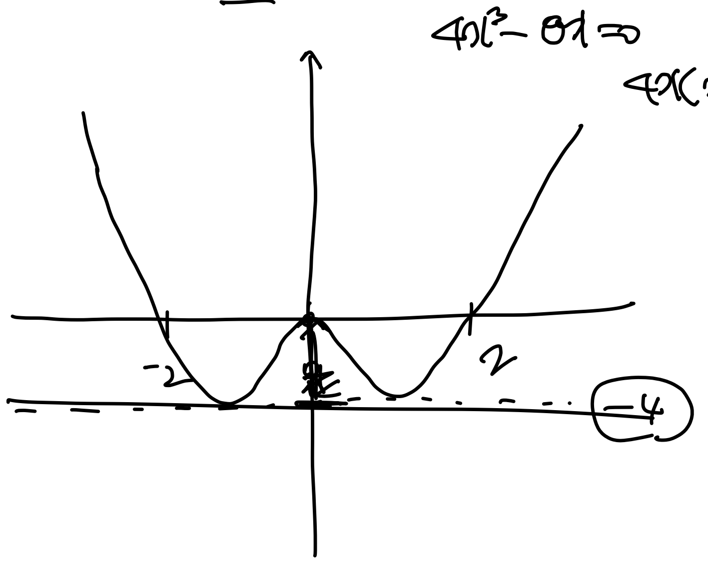
$4x^2+2ax+b \le x^4-4x^2$

$2ax+b \le x^2(x^2-4)$

$4x^3-8x=0$

$4x(x^2-2)=0$

$\sqrt{2}$



$a=0$
$b=-4$

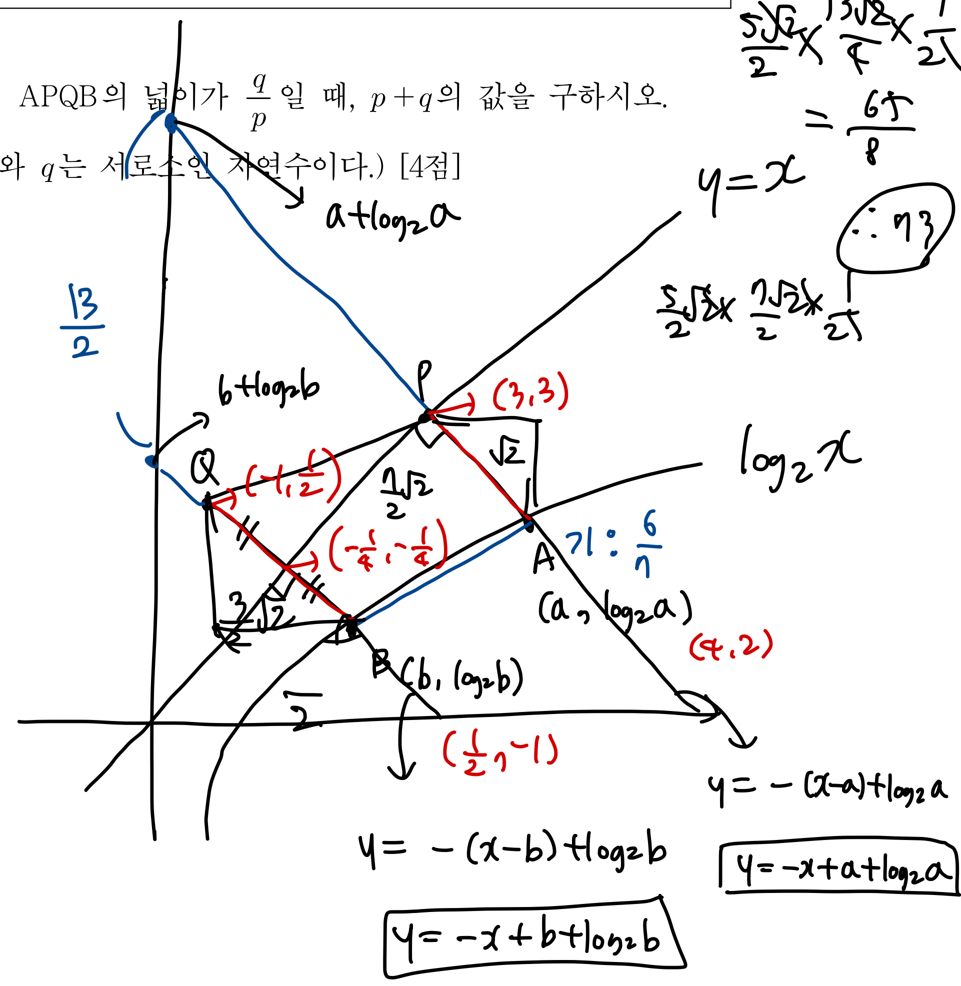
22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) (직선 AP의 y절편) $-$ (직선 BQ의 y절편) $=\frac{13}{2}$
>
> (나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{13\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}$
$=\frac{65}{8}$

$\therefore 73$



① $a+\log_2 a-b-\log_2 b=\frac{13}{2}$ $\quad \log_2 a-\log_2 b+(a-b)=\frac{13}{2}$

② $\frac{\log_2 a-\log_2 b}{a-b}=\frac{6}{7}$ $\quad 7(\log_2 a-\log_2 b)=6(a-b)$

$\log_2 a-\log_2 b=3$

$a-b=\frac{7}{2}$

$\log_2\frac{a}{b}=3$

$\frac{a}{b}=8$

♡ + ☆ $=\frac{13}{2}$

☆ $=\frac{7}{2}$

♡ $=3$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 함수 $f(x^3+x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{11}{8}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{13}{8}$　⑤ $\frac{7}{4}$

28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times\left(g(0)\right)^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$

(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

① -12　② -6　③ -1　④ 3　⑤ 9

$g(\pi) = n\pi$

$f(x) = (x-\tan x)\circ g(x)$

$f(0) = $ $x = \tan x$

$g(0) = \alpha, \beta$

$f'(x) = (1-\sec^2 x)\circ g(x) \times g'(x)$

$f''(x)$

$\frac{3}{2}\pi <\quad< \frac{5}{2}\pi$

$0 = a(-\pi)^3 + 2\pi$

$\boxed{\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi}$

단답형

29. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 + a_2 < 10$
>
> (나) 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고, 이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$a_1 > 0 \quad -1 < r < 1$

$ar + ar^2 < 10$

$216 = 6 \times 36 = 2^3 \times 3^3$

$-3 \times 2^2,\ 3 \times 2^1,\ -3 \times 1$

$-12 + 6$

$\frac{27}{2},\ -9,\ 6,\ -4,\ \cdots \quad -\frac{2}{3}$

$\frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$\frac{a_1(-1)}{-\frac{2}{3} - 1} = \frac{\frac{27}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{3 \times 27}{2 \times 5} = \frac{81}{10}$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1 + xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1) = 4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx = 34,\quad \int_1^2 xg(x)\,dx = 53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$e^{f(x)} = \frac{g(x)}{1 + xf'(x)}$

$(1 + xf'(x))e^{f(x)} = g(x)$

$\int_1^2 (1 + xf'(x))e^{f(x)}\,dx = 34$

$\int_1^2 e^{f(x)} + xf'(x)e^{f(x)}\,dx = 34$

$\int_1^2 xe^{f(x)} + x^2 f'(x)e^{f(x)}\,dx = 53$

$2e^{f(2)} - 16 = 34$

$f(2) = 25$

31

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.