

II

평면벡터

I

1. 평면벡터의 연산

1. 벡터

크기와 방향을 함께 갖는 양. 점 A에서 점 B로 향하는 벡터를 기호로 $\overrightarrow{AB}$ 라 하며, 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 **시점**, 점 B를 **종점**이라 한다. 그림으로 표현할 때는 선분에 화살표로 방향을 표시한다.



물리와 결합해, 이동한 결과값(변위)로 이해할 수도 있다.

이에 시점과 종점을 표현하지 않고, 벡터 하나에 집중하여 $\vec{a}$ 와 같이 표현할 수도 있다.

선분의 **길이**는 벡터의 **크기**를 나타낸다. 크기인 만큼, $|\overrightarrow{AB}|$ 또는 $|\vec{a}|$ 로 표현한다. 이때, 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라 하고, 크기가 0인, 즉 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 한다. 영벡터는 기호로 $\vec{0}$ 과 같이 나타내며, 방향은 생각하지 않는다.

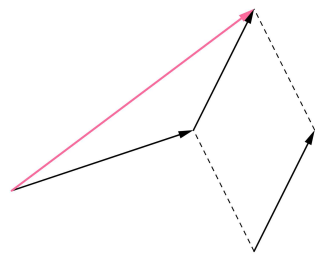
크기와 방향으로 정의된 만큼, 크기와 방향이 같은 두 벡터는 같은 벡터이다.

※ 벡터는 도형적 상황을 수식적으로 다루기 위해 관점을 설정한 것이라고 이해하는 것이 좋다. 이에, 벡터 단원의 경우 도형의 특징과 수식적 조작 능력을 동시에 요한다.

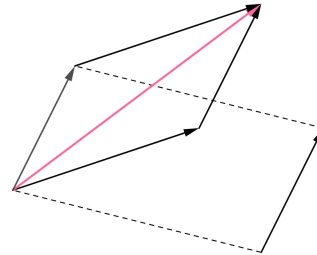


2. 벡터의 연산

벡터는 크기와 방향으로 정의되므로, **시점과 종점에 종속되지 않는다**. 시점과 종점이 다른 벡터를 연산할 때는, **서로 이어지게끔** 놓으면 된다. 시점과 종점 중 일치시키는 방법에 따라 해석을 달리할 수 있다.



[삼각형법]



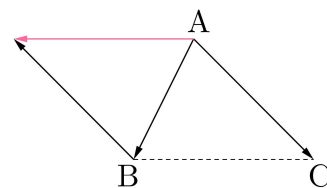
[평행사변형법]

주어진 상황에 따라 한 벡터의 **시점**과 다른 벡터의 **종점**을 일치시키는 것으로 해석할지 (=삼각형법), 두 벡터의 **시점**을 일치시키는 것으로 해석할지 (=평행사변형법) 선택하는 것이 좋다.

※ 삼각형법은 벡터의 요소가 완전히 결정되지 않은 경우: 종점의 자취를 확인하는 경우 유용할 수 있겠고, 평행사변형법은 종점 등 고정된 정보가 주어진 경우 고려하는 것이 좋겠다.

벡터 $\vec{a}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 $-\vec{a}$ 와 같이 표현한다. 따라서, 벡터의 뺄셈은 벡터의 방향을 바꿔 생각한다.

$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$ 이므로, 두 벡터의 시점과 종점으로 이루어지는 삼각형의 밑변을 크기로 하고, 방향은 시작한 지점과 끝점이 뒤바뀐 벡터가 된다.



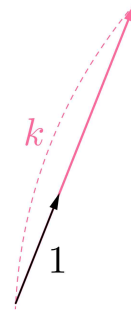
역시, 어느 방향으로 먼저 가든 결과적으로 도달하는 곳이 같으므로, 더하는 순서는 상관 없고(**교환법칙**), 동시에 행해져도 문제없다(**결합법칙**)

I

1. 평면벡터의 연산

벡터 $\vec{a}$ 를 k 배 확대한 벡터는 $k\vec{a}$ 와 같이 나타낸다. $k > 0$ 인 경우 단순한 확대이나, $k < 0$ 인 경우에는 방향이 반대로 바뀐다. 이는 고정되지 않은 벡터: 종점의 자취에도 해당돼, 자취 자체를 k 배 확대했다고 해석할 수 있다.

여기서 $k \neq 0$ 인 경우, 두 벡터 $\vec{a}$, $k\vec{a}$ 는 크기는 다르나, 방향이 같거나 정반대이다. 이를 두 벡터가 **평행**하다고 한다.



3. 위치벡터와 성분화

한 평면의 모든 벡터의 시점을 점 O 로 고정한다면, 임의의 벡터 $\vec{p}$ 에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ 인 점 P 는 오직 하나뿐이다. 즉, 점 P 와 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 가 일대일대응이다. 이때, 고정된 한 점 O 를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 를 점 O 에 대한 점 P 의 **위치벡터**라 한다. 임의의 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 도 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ 이므로 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 로 표현할 수 있다.

※ 대놓고 좌표로 보겠다는 소리다. 벡터↔좌표임을 염두에 두자.

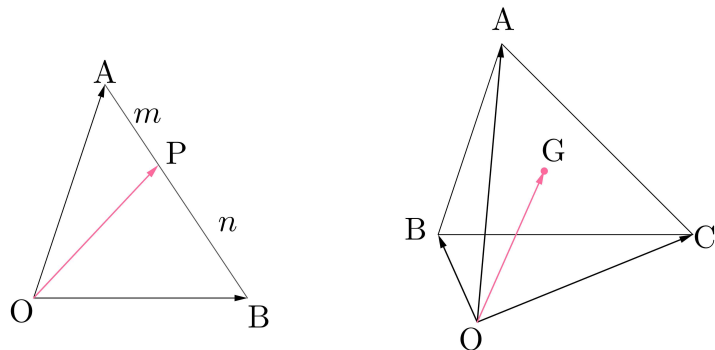
위치벡터의 성질에 의하여, 좌표평면의 원점 O 를 시점으로 잡으면 위치벡터가 각 종점에 일대일대응이므로 선분의 **내/외분점**, **무게중심** 공식이 그대로 적용된다. 즉, 두 점 A , B 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 라 하면,

$$\text{선분 } AB \text{를 } m:n \text{으로 내분하는 점 } P \text{의 위치벡터 } \vec{p} \text{는 } \vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

$$\text{선분 } AB \text{를 } m:n \text{으로 외분하는 점 } P \text{의 위치벡터 } \vec{q} \text{는 } \vec{q} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

이고, 세 점 A , B , C 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라 하면

$$\text{삼각형 } ABC \text{의 무게중심 } G \text{의 위치벡터 } \vec{g} \text{는 } \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



※ 이 자체로 중요하다기보다는, 형태를 기억하고 그대로/역으로 식을 변형해서 관찰해야 할 점을 줄이는 데 사용된다. 내/외분점의 경우, $\vec{p} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ 와 같이 일반적인 경우로 나타낼 수 있다. t 의 범위가 주어진다면, t 에 해당되는 범위만큼의 길이가 되겠다.

내/외분점의 경우 항상 시점이 통일돼야 하는 것은 아니다. 시점 사이 거리의 비=중점 사이 거리의 비= $m:n$ 일 때 조건을 만족시킨다. 평행할 때는 비율에 맞게 들어갈 것이고, 평행하지 않을 때도 동비율=세 직선이 한 점에서 만나니 시점이 일치된 것과 마찬가지이다.

