#0 함수식 작성

안녕하십니까. 한대산 수학입니다.

오늘부로 저는 수학 칼럼에 첫걸음을 내딛고자 합니다.

시작하기에 앞서 질문 하나 던져보겠습니다.

"수2에서 가장 중요한 것은 무엇인가?"

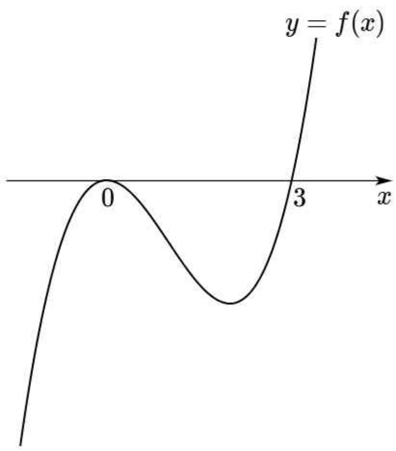
이에 답하기 위해 출제되는 수2 문제의 형식을 생각해봅시다. 수2 문제는 대개 '$f(2)$의 값은?', '$f'(4)$의 값은?' 등과 같이 함숫값을 요구합니다. 함숫값을 구하기 위해서는 함수식을 알아야 하고, 함수식을 알기 위해서는 문제에서 제시된 조건을 분석하여 얻은 함수에 대한 정보를 수식으로 옮길 수 있어야 합니다. 즉 함수식을 작성하는 것이 수2에서 가장 중요하다고 볼 수 있습니다.

그래서 첫 칼럼으로는 수2에서 답을 도출해내는 데 있어 근본이자 핵심 요소인 함수식 작성에 대해 다루려고 합니다.

그럼 본론으로 들어가 봅시다!

* 함수식 작성

일반적으로 함수식은 x축을 기준으로 근을 이용해 식을 작성합니다. 예로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음과 같을 때, $f(x)$의 식은 $f(x)=x^2(x-3)$으로 작성합니다.



이와 같이 기준이 x축인 경우 식작성은 매우 쉽습니다. 그러나 x축과의 근 정보가 없거나 복잡한 경우 식을 작성하기 애매합니다. 이때는 곡선 $y=f(x)$와의 교점 정보가 명확하고 깔끔한 기준 함수를 설정하면 됩니다. 결론을 먼저 말씀드리면 **기준 함수를 x축으로 생각하여 식을 작성한 후 나중에 기준 함수를 더하면 끝**입니다. 즉 기준이 x축 $(y=0)$에서 기준 함수로 바뀐 것이죠. 이를 일명 **더하기 관점**이라 하겠습니다.

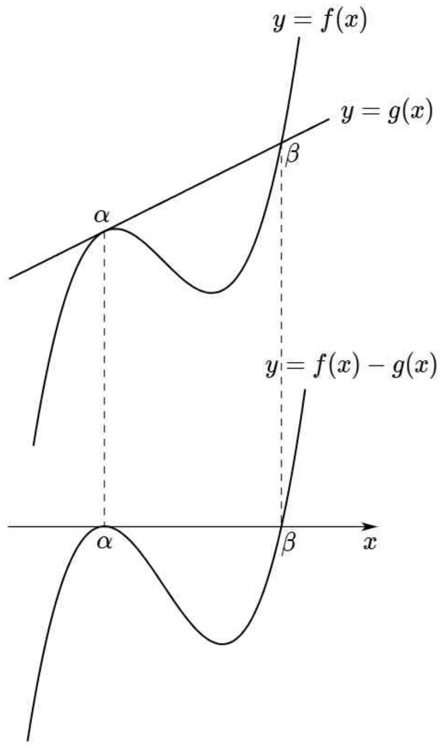
《 더하기 관점 》

기준 함수를 x축으로 생각하여 식을 작성한 후 나중에 기준 함수를 더한다.

이제 왜 그런지를 알아야겠죠?
이해를 위해 빼기에 대해 알아봅시다.

◦ 빼기

빼기는 **뒤가 기준**입니다. $f(x)-g(x)$는 $f(x)$를 **$g(x)$의 기준으로 보겠다**는 말입니다. 이때 함숫값이란, x축을 기준으로 어느 위치에 있는가를 의미합니다. 즉 $f(x)-g(x)$는 **$g(x)$를 x축으로 바꾸는 효과**를 지닙니다. 다음 예시를 봅시다.



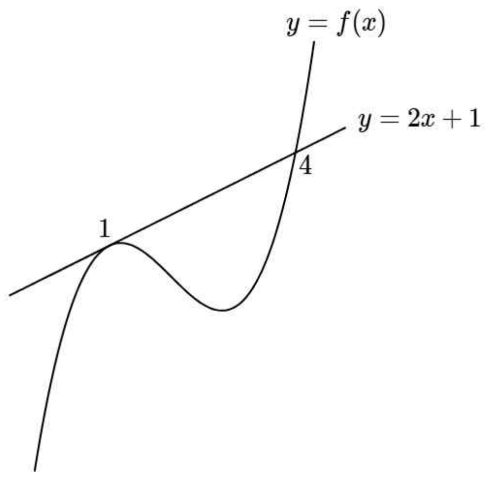
위 상황에서 삼차함수 $f(x)$와 직선 $g(x)$에 대하여 $f(x)-g(x)$의 식은 $f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$로 작성합니다. 이 과정은 **기준 함수를 x축으로 생각하여 식을 작성한 것**과 같습니다. 결론적으로 $f(x)$를 구해야 하므로 $g(x)$를 이항, 즉 양변에 $g(x)$를 더하면 $f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)+g(x)$가 됩니다. 이 과정은 **나중에 기준 함수를 더한 것**과 같습니다.

다시 말해 **더하기 관점**은 빼고 다시 더하는 일련의 과정을 없애고 결론만 작성하는 방법인 거죠.

아래 예시에서 이를 적용해봅시다.

e.g.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 값은?



[그림 1]

교점 정보가 모두 주어진 $y=2x+1$을 기준으로 식을 작성하면

$f(x)=(x-1)^2(x-4)+2x+1$, $\therefore$ $f(5)=27$

* 도함수의 식 작성

한발 더 나아가 도함수의 식도 작성해봅시다.

일반적으로 미분계수는 다음의 과정을 거쳐 도출됩니다.

함수식 작성 → 도함수의 식 작성 → 대입

즉 **더하기 관점**으로 함수식을 작성한 뒤 곱의 미분법을 적용하여 도함수의 식을 작성하고 대입하면 됩니다.

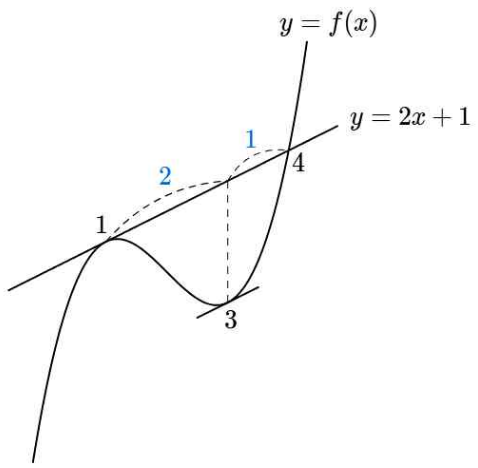
예로 [그림 1]에서 $f'(2)$의 값을 구해봅시다.

$f(x)$의 식은 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+2x+1$이므로 곱의 미분법을 적용하면
$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2+2$, $\therefore\ f'(2)=-1$

이 방식으로 계산하면 일관되게 무조건 답을 구할 수 있습니다.
그러나 다음 상황에서는 더 효율적인 방법으로 계산이 가능합니다.

바로 **$f'(x)=m$의 근을 모두 아는 경우**입니다. 앞서 말씀드렸듯이 교점 정보가 명확하고 깔끔한 기준 함수를 설정하면 더하기 관점으로 함수식을 작성할 수 있다고 했습니다. 이 경우, $y=f'(x)$와 $y=m$의 교점 정보가 모두 주어져 있으므로 $y=m$을 기준 함수로 두고 $f(x)$의 식 없이 바로 $f'(x)$의 식을 작성할 수 있습니다. 대개 m은 기준 직선의 기울기가 됩니다.

[그림 1]에서 이 방법을 적용하여 $f'(2)$의 값을 구해봅시다.



$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고, $2:1$ 내분에 의해 $f'(x)=2$의 실근은 1, 3이므로 교점 정보가 모두 주어진 $y=2$를 기준으로 $f'(x)$의 식을 작성하면
$f'(x)=3(x-1)(x-3)+2$. $\therefore$ $f'(2)=-1$

(추가로 기준 직선과의 교점에서의 미분계수의 경우, 가리고 대입(거리 곱)을 통해 훨씬 간편하게 계산이 가능하지만 이는 식 작성이 아닌 기술적인 요소로 다음에 다루겠습니다.)

* 기출 적용

이제 기출에서 적용해봅시다.

e.g. 2015대비(A) 6월 모평 21(고3)

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

※ 조건 해석을 통해 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$, $g(x)=(x-1)h(x)$임을 얻은 상태

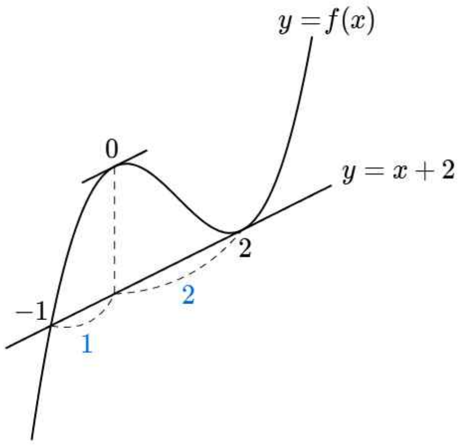
$\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to n}\frac{(x-1)(x-2)}{h(x)}=(n-1)(n-2)$에서 $n=3$, 4일 때도 성립해야 하는데
분자의 식에 n을 대입해보면 $(n-1)(n-2)$이므로 결괏값과 동일
즉 $h(3)=h(4)=1$
$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $y=1$을 기준으로 $h(x)$의 식을 작성하면
$h(x)=(x-3)(x-4)+1$
따라서 $g(x)=(x-1)((x-3)(x-4)+1)$, $\therefore$ $g(5)=12$

ⓔ.ⓖ. 2017실시(나) 7월 학평 17(고3)

17. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선이 점 $(-1, 1)$에서 이 곡선과 만날 때, $f'(3)$의 값은? [4점]

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

※ 조건 해석을 통해 다음 상황을 얻은 상태



$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 $1:2$ 내분에 의해 $f'(x)=1$의 실근은 0, 2이므로 $y=1$을 기준으로 $f'(x)$의 식을 작성하면

$f'(x)=3x(x-2)+1$. $\therefore$ $f'(3)=10$

e.g. 2024대비 6월 모평 20(고3)

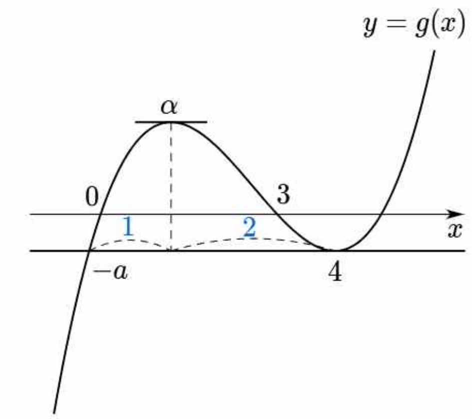
20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert \ge \lvert g(3)\rvert$이다.

※ 조건 해석을 통해 다음 상황을 얻은 상태



《사고 과정 단계》

① 구하는 값이 $f(9)$, 즉 $g'(9)$이므로 $g'(x)$의 식을 작성해야 함

② α만 알면 $g'(x)=0$의 실근을 모두 알므로 $y=0$을 기준으로 $g'(x)$의 식 작성 가능

③ α는 a를 알면 $1:2$ 내분으로 얻을 수 있음

④ a는 $y=g(4)$를 기준으로 $g(x)$의 식을 작성하고 $g(0)=g(3)$을 통해 얻을 수 있음

위의 역추론 과정을 바탕으로 풀이하면

$g(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{3}$인 삼차함수이므로

$g(x)=\dfrac{1}{3}(x+a)(x-4)^2+g(4)$

$g(0)=g(3)$에서 공통 부분인 $\dfrac{1}{3}$과 $g(4)$를 생략한 후 대입하면

$16a = a+3$, $a = \frac{1}{5}$

따라서 $-\frac{1}{5}$과 4를 $1:2$ 내분하면 $\alpha = \frac{6}{5}$

$g'(x)=0$의 실근이 $\frac{6}{5}$, 4이므로 $y=0$을 기준으로 $g'(x)$의 식을 작성하면

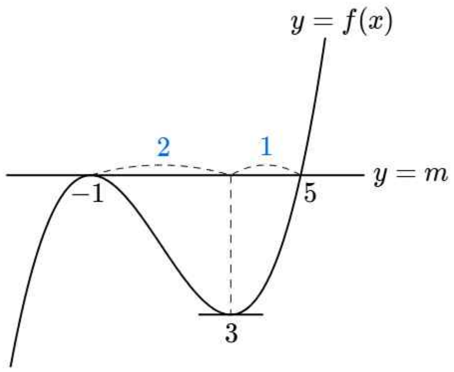
$g'(x)=\left(x-\frac{6}{5}\right)(x-4)$. $\therefore$ $g'(9)=39$

e.g. 2024대비 9월 모평 6(고3)

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

※ 조건 해석을 통해 다음 상황을 얻은 상태



$f(x)$의 극댓값을 m이라 할 때, $2:1$ 내분에 의해 $f(5)=m$이므로 $y=m$을 기준으로 $f(x)$의 식을 작성하면

$f(x)=(x+1)^2(x-5)+m$

이때 $f(0)=1$이므로 $m-5=1$ $\therefore$ $m=6$

e.g. 2024대비 수능 20(고3)

20. $a > \sqrt{2}$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

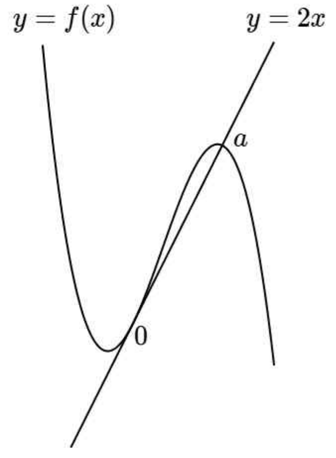
라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

여태까지 개형적 상황을 바탕으로 함수식을 작성했다면, 이 문제는 역으로
함수식에서 개형적 상황을 얻어내야 함

문제의 발문에서 '곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선'이 제시되어 있으므로
$f(x)$의 식을 다음과 같이 정리하면

$f(x) = -x^2(x-a) + 2x$

이는 곧 $f(x)$의 식을 $y = 2x$를 기준으로 작성한 것이므로



이후 문제의 조건들을 해석하여 답을 구하면 됨

ⓔ.ⓖ. 2025대비 6월 모평 11(고3)

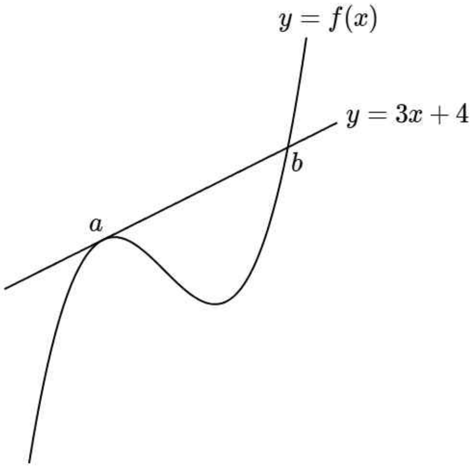
11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

※ 조건 해석을 통해 다음 상황을 얻은 상태



$y=3x+4$가 점 $(a, 1)$을 지나므로 $a=-1$

$y=3x+4$를 기준으로 $f(x)$의 식을 작성하면

$f(x)=(x+1)^2(x-b)+3x+4$

이때 $f(0)=0$이므로 $-b+4=0$, $b=4$

$\therefore$ $f(1)=-5$

ⓔ.ⓖ. 2025대비 수능 15(고3)

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5}\,)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

이 문제 역시 역으로 함수식에서 개형적 상황을 얻어내야 함

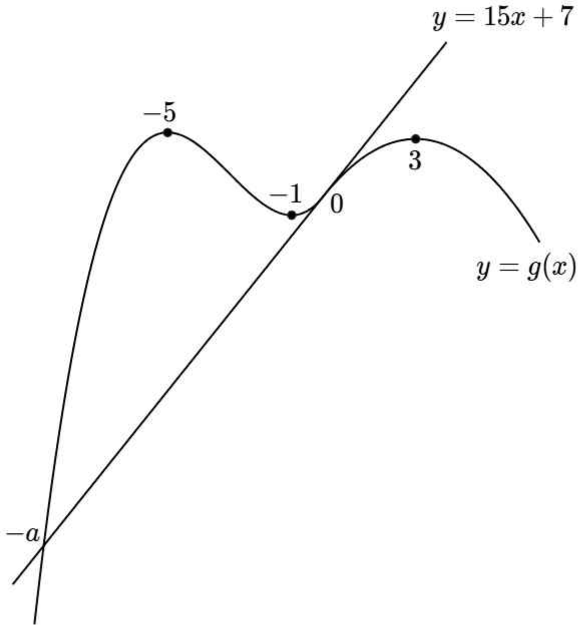
구간별 함수 $g(x)$가 $x=0$을 기준으로 나뉘므로 $x \le 0$에서 $g(x)$의 식을 다음과 같이 정리하면

$g(x)=x^2(x+a)+15x+7$

이는 곧 $g(x)$의 식을 $y=15x+7$을 기준으로 작성한 것이므로 $g(x)$는 $y=15x+7$과 $x=0$에서 접함

이때 조건 (가)에 의하여 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$f(x)$도 $y=15x+7$과 $x=0$에서 접함

따라서 $y=15x+7$을 기준으로 $f(x)$의 식을 작성하면
$f(x)=kx^2+15x+7$ $(k<0)$



이후 조건 (나)를 해석하여 답을 구하면 됨

e.g. 2026대비 6월 모평 15(고3)

15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

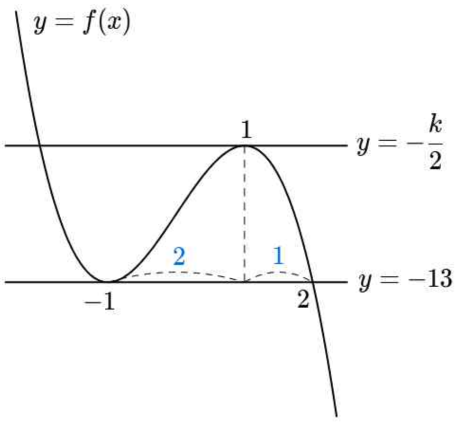
$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

※ 조건 해석을 통해 다음 상황을 얻은 상태



$f(x)$의 최고차항의 계수를 p $(p<0)$이라 하면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 $3p$인 이차함수이고 $f'(x)=0$의 실근은 -1, 1이므로 $y=0$을 기준으로 $f'(x)$의 식을 작성하면

$f'(x)=3p(x+1)(x-1)$

이때 $f'(0)=6$이므로 $-3p=6$, $p=-2$

따라서 $f(x)$의 극값의 차는 $\frac{|-2|}{2}\times 2^3=8$이므로 $-\frac{k}{2}=-5$, $k=10$

한편, $2:1$ 내분에 의해 $f(2)=-13$이므로 $y=-13$을 기준으로 $f(x)$의 식을 작성하면

$f(x)=-2(x+1)^2(x-2)-13$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{25}{4}$

$\therefore\ k+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}$

ⓔ.ⓖ. 2026대비 6월 모평 21(고3)

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 조건 해석을 통해 $g(x)$가 $f(x)$와 $x=1$, $x=2$에서 접함을 얻은 상태

$g(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f(x)$를 기준으로 $g(x)$의 식을
작성하면

$g(x)=(x-1)^2(x-2)^2+(x-1)(x-2)$, $\therefore\ g(-1)=42$

* 마무리하며

함수식 작성은 문제에서 물론 중간다리 역할도 하지만 대개 **마지막 끝맺음을 담당하는 핵심적인 요소**입니다. 열심히 문제 조건 다 해석하여 거의 다 찾아내도 식을 작성하지 못하면 무의미합니다.

또한 함수식 작성 원리를 이해함으로써 함수의 그래프와 식 사이의 상관관계를 알고 이를 통해 문제를 바라보는 시야가 확장되어 문제를 위에서 내려다볼 수 있는 강력한 힘을 가지게 됩니다.

따라서 이 식 작성이라는 기본기를 충분히 익혀두는 것이 매우 중요합니다.

긴 글 읽어주셔서 감사합니다. 여러분들에게 조금이나마 도움이 되기를 바라며 다음 칼럼으로는 식 작성을 활용한 특정 상황에 국한된 내용으로 찾아뵙겠습니다.