2025학년도 대학수학능력시험 수학 풀이 (1~14번)

2025년 7월 31일 목요일 오후 7:47

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$5^{\frac{1}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$

$= 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$= 5^1$

$= 5$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 8x + 7$ 에 대하여 $\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}}_{f'(2)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 8$ 이므로 $f'(2) = 4$

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30$$

을 만족시킬 때, k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k^2 + k = 30$ $\therefore k = 5 \ (\because k > 0)$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & (x < -2) \\ x^2 - a & (x \geq -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\lim_{x \to -2-} f(x) = 5 \times (-2) + a = a - 10$

$\lim_{x \to -2+} f(x) = (-2)^2 - a = 4 - a$

두 값이 같아야 $f(x)$가 $x=-2$에서도 연속이 되므로

$a - 10 = 4 - a$ $\therefore a = 7$

5. 함수 $f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

곱의 미분법을 사용하여 $f(x)$를 미분하면

$f'(x) = 2x(3x^2-x) + (x^2+1)(6x-1)$

전개하지 말고 그냥 대입합시다

$f'(1) = 2\times1\times2 + 2\times5$

$= 14$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$의 값은? [3점]

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$ 이므로 $-\sin\theta = -\frac{1}{5}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{5}$

그리고 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

따라서

$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{24}{25}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{25}}$

$= \frac{1}{5}\times25 = 5$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = 3x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = 9x^2+2$ $\therefore f(1) = 11$

8. 두 실수 $a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$, $b=\log 2$에 대하여 $a\times b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log\frac{1}{\sqrt{10}} = \log 10^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ 이므로

$a = 2\times(-\frac{1}{2}) + \log_2 20$

$= (-1) + \log_2 20$

$= \log_2(2^{-1}\times 20) = \log_2 10$

$a\times b = \log_2 10 \times \log 2$

$= \log_2 10 \times \frac{\log_2 2}{\log_2 10}$

밑의 변환 공식 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$= \log_2 2$

$= 1$

9. 함수 $f(x)=3x^2-16x-20$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$$

일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx - \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 0$ 이므로

$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$

$[x^3-8x^2-20x]_0^a = 0$ 이므로

$a^3-8a^2-20a = a(a+2)(a-10) = 0$

$\therefore a = 10\ (\because a>0)$

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$f(x)=13$을 만족시키는 x가 존재하기 위해서는 $a\geq 10$,

$a+b$를 최소화해야 하므로 $a=10$이라 하면

$f(\frac{\pi}{3}) = 10\cos(\frac{b}{3}\pi)+3 = 13$

따라서 $\frac{b}{3}\pi = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$

$\rightarrow b = 6, 12, 18, \cdots$

이 중에서 b의 최솟값은 6이다.

$\therefore a+b \geq 10+6 = 16$

(참고)

a가 11~19이면 b가 자연수로 안 나오고

a가 20이면 $b=1$이 가능하지만

이때는 a가 이미 16보다 크므로 $a+b$가 최소가 아니다.

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-\frac{3}{2}t^2-6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-3t-6=3(t+1)(t-2)$

$v=0$을 만족시키는 t의 값은 2이므로

$t=2$에서 운동 방향이 바뀜

$a=\frac{dv}{dt}=6t-3$ 이므로

$t=2$일 때 $a=9$

12. $a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1=2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

$n=1$일 때,

$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$ 이고 $a_1=2$ 이므로 $b_2=4$

수열 $\{b_n\}$이 등차수열이고 $b_1=2$, $b_2=4$이므로 $b_n=2n$

$n\geq 2$일 때,

$$\frac{a_n}{b_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2=n-\frac{1}{2}$$

이므로

$a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)b_{n+1}=\left(n-\frac{1}{2}\right)(2n+2)=2n^2+n-1$

문제에서 $a_1=2$라고 했으므로 위 일반항은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k-1)$$

$$=2\times 55+15-5$$

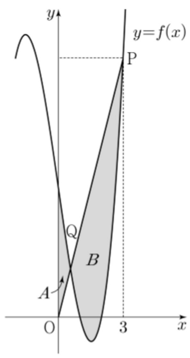
$$=120$$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 P$(3,\ f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



$f(1)=f(2)=0$ 이므로 어떤 상수 a에 대하여

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$
$=x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a$

$f'(0)=-7$이므로 x의 계수는 -7이다.

따라서 $3a+2=-7 \Rightarrow a=-3$ 이므로

$\therefore f(x)=x^3-7x+6$

점 P의 좌표는 $(3,\ 12)$이므로 직선 OP의 방정식은

$y=4x$이다. 따라서

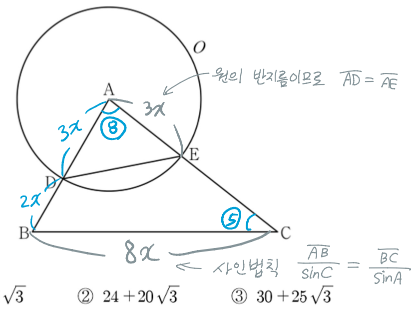
$B-A=\int_0^3\{4x-f(x)\}dx$

$=\int_0^3(-x^3+11x-6)\,dx$

$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3$

$=\frac{45}{4}$

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.
$\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB}<\overline{AC}$) [4점]



① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$ ③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$ ⑤ $42+35\sqrt{3}$

$\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$이므로 $\overline{AD}=3x$, $\overline{DB}=2x$로 두자. 사인법칙에 의해

• $\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{BC}}{\sin A}$이므로 $\overline{BC}=8x$ $\left(\because \overline{BC}=5x\text{이고 } \frac{\sin A}{\sin C}=\frac{8}{5}\right)$

• 삼각형 ABC의 외접원 반지름이 7이므로 $\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=7$에서

$\sin C=\frac{5}{14}x$이다. $\sin A=\frac{8}{5}\sin C$ 이므로 $\sin A=\frac{4}{7}x$

$\triangle ADE:\triangle ABC=9:35$를 이용하기 위해 각각의 넓이를 구하면

• $\triangle ADE=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\sin A=\frac{18}{7}x^3$

• $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AB}\sin B=20x^2\sin B$

$\frac{18}{7}x^3:20x^2\sin B=9:35$이므로 $\sin B=\frac{1}{2}x$

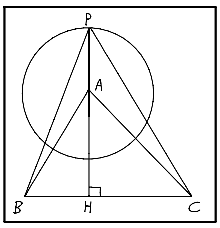
$\sin B:\sin C=7:5$이므로 $\overline{AC}=\frac{7}{5}\overline{AB}$이다. $\therefore \overline{AC}=7x$

x를 구하기 위해 삼각형 ABC에 제2코사인법칙을 적용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$

$64x^2=(74-70\cos A)x^2 \Rightarrow \cos A=\frac{1}{7}$

따라서 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$이므로 $\frac{4}{7}x=\frac{4\sqrt{3}}{7}$이다. $\therefore x=\sqrt{3}$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 H라 하자. 삼각형 PBC의 넓이가 최대가 되려면 왼쪽 그림처럼 세 점 P, A, H가 일직선을 이루도록 하여 삼각형 PBC의 높이를 최대가 되도록 만들면 된다.

• $\overline{BC}=8\sqrt{3}$ • $\overline{PA}=3\sqrt{3}$ (원 O의 반지름)

• $\overline{AH}=\overline{AB}\sin B=5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}$

이 정보들을 이용하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값을 구하면

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times(\overline{PA}+\overline{AH})=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times\left(3\sqrt{3}+\frac{15}{2}\right)=36+30\sqrt{3}$

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

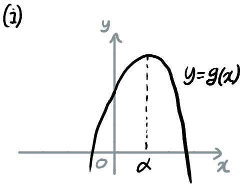
① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

(가) 조건에 의해 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

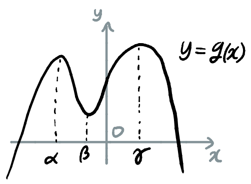
$\underbrace{f(0)=7}_{x=0\text{에서 연속}}$ 이고 $\underbrace{f'(0)=15}_{x=0\text{에서 도함수 연속}}$ 이다.

$g(x)$가 $x\le 0$에서 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고 $x>0$에서 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 두 가지가 가능하다.

(i)



(ii)



(i)의 경우는 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 실근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+4$ 뿐이므로 (나) 조건을 만족시키지 못한다.

(ii)의 경우는 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 실근이 다음과 같다.

$$\boxed{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha+4,\ \beta+4,\ \gamma+4}$$

여기서 서로 다른 수를 4개로 만들려면 $\beta=\alpha+4$, $\gamma=\beta+4$를 만족시키면 된다.

그렇다면 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 다음과 같이 4가 된다.

$$\boxed{\alpha,\ \underbrace{\alpha+4}_{=\beta},\ \underbrace{\alpha+8}_{=\gamma=\beta+4},\ \underbrace{\alpha+12}_{=\gamma+4}}$$

$x\le 0$에서 $g'(x)=3x^2+2ax+15$이고 이를 $3(x-\alpha)(x-\alpha-4)$와 일치시킨다.

$3x^2+2ax+15 = 3x^2-3(2\alpha+4)x+3\alpha(\alpha+4)$ 에서

$3\alpha(\alpha+4)=15$이므로 $\underbrace{\alpha=-5}_{\text{그래프 상으로 } \alpha<0}$이고 $2a=18$이므로 $a=9$이다.

따라서 $x\le 0$일 때, $g(x)=x^3+9x^2+15x+7$이다. $\therefore g(-2)=5$

$\alpha=-5$이므로 $\gamma=\alpha+8=3$이다.

따라서 $f'(x)=m(x-3)$ (m은 상수)인데 $f'(0)=15$이므로 $m=-5$

$f'(x)=-5x+15$ 이므로 $f(x)=-\frac{5}{2}x^2+15x+7$이다. ($\because f(0)=7$)

따라서 $g(2)=f(2)=27$ $\therefore g(2)=27$

$g(-2)+g(2)=5+27=32$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

진수 조건에 의하여 $x-3>0$, $3x-5>0$

$\therefore x>3$

$\log_2(x-3)=\log_4(x-3)^2$ 이므로

$\log_4(x-3)^2=\log_4(3x-5)$

$(x-3)^2=3x-5 \Rightarrow x^2-6x+9=3x-5$

$\Rightarrow x^2-9x+14=0$

$\Rightarrow (x-2)(x-7)=0$

$\therefore x=7$ ($\because x>3$)

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2+4x$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 33

$f(x)=\int f'(x)\,dx=3x^3+2x^2+C$

$f(1)=6$ 이므로 $C=1$이다.

$f(x)=3x^3+2x^2+1$ 이므로 $f(2)=33$

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+4} = 12$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값을 구하시오. [3점] 96

$a_1 + a_5 = 12,\quad a_9 + a_{13} = 12$
$a_2 + a_6 = 12,\quad a_{10} + a_{14} = 12$
$a_3 + a_7 = 12,\quad a_{11} + a_{15} = 12$
$a_4 + a_8 = 12,\quad a_{12} + a_{16} = 12$

$\Downarrow$

$a_1 + \cdots + a_{16} = 12 \times 8 = 96$

19. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점] 41

$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2 = 6(x+a)(x-2a)$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(-a) = 7a^3 = \frac{7}{27}$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$

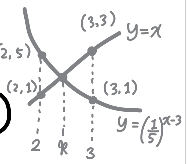
$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$ 이므로

$f(3) = 41$

20. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x > k$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x)) = 3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점] 36



$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$ 이므로 $(2 < k < 3)$

$\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}} = k^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{3k} = \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}\right\}^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{3k}$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^{-3k+9} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{3k} = \left(\frac{1}{5}\right)^{9}$

$f(12) = \left(\frac{1}{5}\right)^9$ 이므로 $(\because 12 > k)$

$f\left(\left(\frac{1}{5}\right)^9\right) = \underbrace{f(f(12)) = 3 \times 12}_{f(f(x)) = 3x} = 36$

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

16

> 모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

$f(x)$가 삼차함수이므로 $f(x)=0$의 실근은 필연적으로 하나 이상 존재한다. 이 실근 중 하나를 k라 하면 $f(k)=0$이므로 $\alpha=k$일 때 박스 조건을 만족시키려면 $f(2k+1)=0$이 되어야 한다. $\left(\frac{0}{0}\text{ 꼴}\right)$

그런데 $\alpha=2k+1$일 때도 박스 조건을 만족시켜야 한다는 점을 생각하면 $f(2(2k+1)+1)=f(4k+3)$도 0이 되어야 하고 $\alpha=4k+3$일 때도 만족시키려면 $f(8k+7)$도 0이 되어야 하고 . . .

이렇게 연쇄적으로 발생하는 조건을 모두 만족시키기 위한 유일한 해결책은 $k=2k+1$이 되는 것이다. 즉, $k=-1$이다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$ 외의 다른 실근을 가지면 안 된다.

$f(x)$의 최고차항 계수가 1이고 $f(0)=4$, $f(-1)=0$이므로
$f(x)=(x+1)(x^2+mx+4)$ (m은 정수)와 같이 수식을 세울 수 있다.
전개했을 때 a, b가 정수가 되어야 하니까

이때, $f(1)=2m+10$이므로 m이 최대가 되어야 $f(1)$이 최대가 된다.
방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$ 외에 다른 실근을 가지지 않으므로
방정식 $x^2+mx+4=0$의 실근은 없다. 따라서
판별식 $D=m^2-16<0$이고 이를 만족시키는 정수 m의 최댓값은 3이므로 $f(1)$의 최댓값은 $2\times3+10=16$이다.

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

64

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n=0\text{ 또는 }|a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

(나) 조건에 의해 $|a_3|=|a_5|$, $|a_2|\neq|a_4|$, $|a_1|\neq|a_3|$
이제 (가) 조건을 고려하여 $|a_3|=|a_5|$를 만족시키는 경우를 찾자.

(i) $|a_4|$가 홀수이고 $|a_3|$이 홀수인 경우
$a_4=a_3-3$이고 $|a_3|$이 홀수이면 $|a_4|$는 짝수이다.
따라서 가능하지 않은 경우이다.

(ii) $|a_4|$가 홀수이고 $|a_3|$이 짝수인 경우
$a_5=a_4-3=\frac{a_3}{2}-3$이므로 $|a_3|=\left|\frac{a_3}{2}-3\right|$이다.
$a_3=\frac{a_3}{2}-3$ 또는 $-a_3=\frac{a_3}{2}-3$이므로 $a_3=-6$ 또는 $a_3=2$.

(iii) $|a_4|$가 짝수이고 $|a_3|$이 홀수인 경우
$a_5=\frac{a_4}{2}=\frac{a_3-3}{2}$이므로 $|a_3|=\left|\frac{a_3-3}{2}\right|$이다.
$a_3=\frac{a_3-3}{2}$ 또는 $-a_3=\frac{a_3-3}{2}$이므로 $a_3=-3$ 또는 $a_3=1$

(iv) $|a_4|$가 짝수이고 $|a_3|$이 짝수인 경우
$a_5=\frac{a_4}{2}=\frac{a_3}{4}$이므로 $|a_3|=\left|\frac{a_3}{4}\right|$이다.
$a_3=\frac{a_3}{4}$ 또는 $-a_3=\frac{a_3}{4}$이므로 $a_3=0$

① $a_3=-6$
a_4 … -3
a_3 … -6
a_2 … ~~-3~~ $|a_2|\neq|a_4|$, -12
a_1 … -9, -24

② $a_3=2$
a_4: 1
a_3: 2
a_2: 5, 4
a_1: 10, 7, 8

③ $a_3=-3$
a_4: -6
a_3: -3
a_2: ~~-6~~

④ $a_3=1$
a_4 … -2
a_3 … 1
a_2 … ~~2~~
a_1 …

⑤ $a_3=0$
a_4: 0
a_3: 0
a_2: 3, ~~0~~
a_1: 6

○ 표시된 수의 절댓값이 중복되는 경우가 없으므로 그대로 다 더해주면
$9+24+10+7+8+6=64$

2025학년도 대학수학능력시험 문제지 1

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [2점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

$(x^3+2)^5$의 일반항 : ${}_5C_r \cdot (x^3)^r \cdot 2^{5-r}$

$r=2$일 때,

${}_5C_2 \times (x^3)^2 \times 2^3 = 80x^6$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}$이고 $P(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$이므로

$P(B)=\dfrac{2}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{7}{10}$

25. 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 256인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.49 ② 0.52 ③ 0.55 ④ 0.58 ⑤ 0.61

신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 1.96$$

$$= 2 \times \frac{2}{\sqrt{256}} \times 1.96$$

$$= 0.49$$

26. 어느 학급의 학생 16명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 과목 A를 선택한 학생은 9명, 과목 B를 선택한 학생은 7명이다. 이 조사에 참여한 학생 16명 중에서 임의로 3명을 선택할 때, 선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{17}{20}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{19}{20}$

"적어도 하나" 나오면 여사건으로 풀 생각하기

세 명이 모두 A를 선택했을 확률

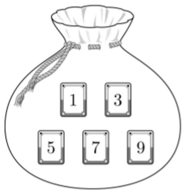
$$= \frac{{}_9C_3}{{}_{16}C_3} = \frac{\cancel{9}^{3} \times \cancel{8} \times \cancel{7}}{\cancel{16}_{2} \times \cancel{15}_{5} \times \cancel{14}_{2}} = \frac{3}{20}$$

문제에서 묻어보는 것은 이것의 여사건 확률이므로

$$1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

27. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=24$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$$E(X)=\frac{1+3+5+7+9}{5}=5$$

$$V(X)=\frac{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{5}=8$$

이므로 $V(\bar{X})=\frac{V(X)}{n}=\frac{8}{3}$ 이다.

$V(a\bar{X}+b)=a^2V(\bar{X})=\frac{8}{3}a^2$ 이므로

이 값이 24가 되도록 하는 a는 3

$V(X)$를 $E(X^2)-\{E(X)\}^2$으로 구해도 무방하다.

$E(X^2)=\frac{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2}{5}=33$ 이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=33-25=8$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(1)\times f(6)$의 값이 6의 약수이다.
> (나) $2f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2f(6)$

① 166 ② 171 ③ 176 ④ 181 ⑤ 186

(나) 조건에서 $f(1) \le f(6)$

(i) $f(1)=1$, $f(6)=1$ 일 때

$f(2) \sim f(5)$가 모두 2이므로 1가지.

(ii) $f(1)=1$, $f(6)=2$ 일 때

$f(2) \sim f(5)$가 가질 수 있는 값이 2, 3, 4 중 하나이므로 ${}_3H_4 = 15$가지.

(iii) $f(1)=1$, $f(6)=3$ 일 때

$f(2) \sim f(5)$가 가질 수 있는 값이 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 ${}_5H_4 = 70$가지.

(iv) $f(1)=1$, $f(6)=6$ 일 때

$f(2) \sim f(5)$가 가질 수 있는 값이 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 ${}_5H_4 = 70$가지.

(v) $f(1)=2$, $f(6)=3$ 일 때

$f(2) \sim f(5)$가 가질 수 있는 값이 4, 5, 6 중 하나이므로 ${}_3H_4 = 15$가지.

$\therefore 1+15+70+70+15=171$

단답형

29. 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1^{\,2})$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2^{\,2})$을 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(X \ge 40 - x)$이고
> $\mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X \le x + 10)$이다.

$\mathrm{P}(15 \le X \le 20) + \mathrm{P}(15 \le Y \le 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.4772일 때, $m_1 + \sigma_2$의 값을 구하시오. (단, σ_1과 σ_2는 양수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

25

$P(X \le x) = P(X \ge 40 - x)$ 에서 $x = 20$일 때, $P(X \le 20) = P(X \ge 20)$이므로

$\therefore\ m_1 = 20$

$P(Y \le x) = P(X \le x + 10)$ 의 양변을 표준화시키면

$P\left(Z \le \underbrace{\boxed{\frac{x - m_2}{\sigma_2}}\right) = P\left(Z \le \boxed{\frac{(x+10) - 20}{\sigma_1}}}_{\text{둘이 같음}}\right)$

$\frac{x - m_2}{\sigma_2} = \frac{x - 10}{\sigma_1}$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$\therefore\ m_2 = 10,\quad \sigma_1 = \sigma_2$

$P(15 \le X \le 20) + P(15 \le Y \le 20)$

$= P\left(\frac{-5}{\sigma_2} \le Z \le 0\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_2} \le Y \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$ (참고)

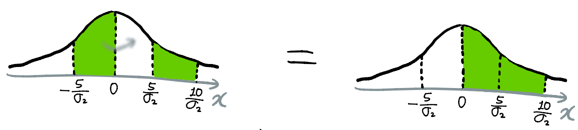
$= P\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$

이 값이 0.4772 이므로 $\frac{10}{\sigma_2} = 2.0$ 이다.

$\therefore\ \sigma_2 = 5$

결론적으로 $m_1 + \sigma_2 = 20 + 5 = 25$

(참고)



$P\left(-\frac{5}{\sigma_2} \le Z \le 0\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_2} \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$ $\quad = \quad$ $P\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$

30. 탁자 위에 5개의 동전이 일렬로 놓여 있다. 이 5개의 동전 중 1번째 자리와 2번째 자리의 동전은 앞면이 보이도록 놓여 있고, 나머지 자리의 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 이 5개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> $k \le 5$이면 k번째 자리의 동전을 한 번 뒤집어 제자리에 놓고,
> $k = 6$이면 모든 동전을 한 번씩 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 이 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 19

3번의 시행 후 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓이려면 주사위 눈이 1, 2, 6 또는 3, 4, 5가 나오면 된다. 주사위 눈의 순서는 무관하다 (즉, 1-2-6 순으로 나오거나 2-6-1 순으로 나오거나 상관 없음)

(i) 1, 2, 6으로 나올 확률 $\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$

(ii) 3, 4, 5로 나올 확률 $\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$

두 확률을 더하면 $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$ 이다. $\therefore\ p + q = 18 + 1 = 19$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2025학년도 대학수학능력시험 수학 풀이 (미적분)

2025년 8월 8일 금요일 오후 3:30

2025학년도 대학수학능력시험 문제지 1

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$3 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-2} = 3 \times 1^{-2} = 3$$

24. $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1} dx$ 의 값은? [3점]

① $10 + \ln 5$ ② $10 + \ln 7$ ③ $10 + 2\ln 3$ ④ $10 + \ln 11$ ⑤ $10 + \ln 13$

$$\int_0^{10} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[x + \ln(x+1)\right]_0^{10}$$

$$= 10 + \ln 11$$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2+3} = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^2+n}-a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2+3} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$ 이다.

※ 유도

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2+3} \times \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2} = 1\times 1 = 1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^2+n}-a_n\right)$$

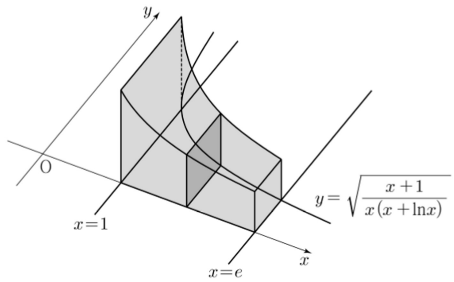
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{a_n^2+n}-a_n\right)\left(\sqrt{a_n^2+n}+a_n\right)}{\sqrt{a_n^2+n}+a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{a_n^2+n}+a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

단면의 넓이 $= \left(\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}\right)^2 = \frac{x+1}{x(x+\ln x)}$

따라서 입체의 부피는

$$\int_1^e \frac{x+1}{x(x+\ln x)}\,dx = \int_1^e \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x+\ln x}\,dx$$

$$= \int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x+\ln x}\,dx$$

$t = x+\ln x$
$dt = \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$
치환적분

$$= \int_1^{e+1} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \left[\ln t\right]_1^{e+1}$$

$$= \ln(e+1)$$

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

$y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축

$\rightarrow$ $g(0)=0,\ g'(0)=0$

- $g(0)=0$이므로 $f(1)+1=0 \rightarrow f(1)=-1$이다.
- $g'(x)=e^x f'(e^x)+e^x$이고 $g'(0)=0$이므로

$f'(1)+1=0 \rightarrow f'(1)=-1$이다.

$g(x)$가 역함수를 가지므로 $g(x)$는 일대일함수이다.

$\rightarrow$ 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$이다.

$\rightarrow$ $g'(x)=e^x\{f'(e^x)+1\}$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(e^x)\geq -1$이다.

다시 말해, $x>0$이면 $f'(x)\geq -1$이다.

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $f'(x)=3(x-1)^2-1$이다.

이를 적분하면 $f(x)=(x-1)^3-x+C$인데, 앞서 $f(1)=-1$이라고 했으므로 $C=0$이다. $\therefore f(x)=(x-1)^3-x$

따라서 $g(x)=f(e^x)+e^x=(e^x-1)^3$이고

$g'(x)=3(e^x-1)^2e^x$이다.

$g(\ln 3)=8$이므로

$$h'(8)=\frac{1}{g'(\ln 3)}=\frac{1}{3\times(3-1)^2\times 3}=\frac{1}{36}$$

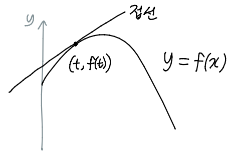
28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

$f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}$이므로 $x\geq 0$일 때 $f''(x)<0$이므로 $x>0$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. 따라서 접선이 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에 존재한다. (다음 그림 참고)



따라서

$$g(t)=\int_0^t\{\underbrace{f'(t)(x-t)+f(t)}_{접선}-\underbrace{f(x)}_{곡선}\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}f'(t)x^2-tf'(t)x+f(t)x-F(x)\right]_0^t=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+tf(t)-F(t)+F(0)$$

이를 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=\cancel{-tf'(t)}-\frac{1}{2}t^2f''(t)+\cancel{f(t)}+\cancel{tf'(t)}-\cancel{f(t)}=-\frac{1}{2}t^2f''(t)$$

$$=-\frac{1}{2}t^2\cdot(-1-2te^{1-t^2})=\frac{1}{2}t^2+t^3e^{1-t^2}\qquad \therefore g'(1)=\frac{3}{2}$$

$g(t)$를 다시 구하면

$$g(t)=\int g'(t)dt=\int\left(\frac{1}{2}t^2+\overset{(참고)}{\underline{t^3e^{1-t^2}}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e\qquad \therefore g(1)=\frac{1}{2}e-\frac{5}{6}$$

$\because g(0)=0$

결론적으로 $g(1)+g'(1)=\left(\frac{1}{2}e-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$이다.

(참고)

$$\int t^3e^{1-t^2}dt=\int\frac{1}{2}t^2e^{1-t^2}\cdot 2t\,dt\qquad \left(\begin{matrix}u=t^2\\du=2tdt\end{matrix}\ 치환\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int ue^{1-u}du$$

$$=\frac{1}{2}(-ue^{1-u})+\frac{1}{2}\int e^{1-u}du$$

$$=-\frac{1}{2}ue^{1-u}-\frac{1}{2}e^{1-u}+C$$

$$=-\frac{1}{2}t^2e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+C$$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3}}_{㉠},\quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}}_{㉡}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

25

㉠ + ㉡ 을 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|=20$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=10$

㉠ − ㉡ 을 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=\frac{20}{3}$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{10}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $\underbrace{a\,(a>0)}$, 공비를 $\underbrace{r\,(-1<r<0)}$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}>0$ 이고 $1-r>0$ 이기 때문에

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\neq\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이기 때문에

$\frac{a}{1-|r|}=\frac{a}{1+r}=10,\quad \frac{a}{1-r}=\frac{10}{3}$ 이다. 연립하여 풀면

$a=5,\ r=-\frac{1}{2}$ 이다. $\quad\therefore a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ 는 주기 4로 $-1,\ -1,\ +1,\ +1$ 이 반복된다. 따라서

$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right\}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$배

$=\left(-a_{m+1}-\underbrace{a_{m+2}}_{-\frac{1}{2}a_{m+1}}+\underbrace{a_{m+3}}_{\frac{1}{4}a_{m+1}}+\underbrace{a_{m+4}}_{-\frac{1}{8}a_{m+1}}\right)+\left(-a_{m+5}-a_{m+6}+a_{m+7}+a_{m+8}\right)$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ 배

$+\left(-a_{m+9}-a_{m+10}+a_{m+11}+a_{m+12}\right)+\cdots$

$=\dfrac{-\frac{3}{8}a_{m+1}}{1-\frac{1}{16}}=-\frac{2}{5}\underbrace{a_{m+1}}_{-\frac{1}{2}a_m}=\frac{1}{5}a_m$

따라서 $\frac{1}{5}a_m>\frac{1}{700}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$ 을 만족시키는 자연수 m의 값을 모두 찾으면 된다.

m이 짝수이면 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}<0$ 이므로 홀수인 경우만 고려

m	1	3	5	7	9	$\cancel{11}$	$\cdots$
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\cancel{\frac{1}{1024}}$	$\cdots$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

30. 두 상수 $a\,(1\le a\le 2)$, b에 대하여 함수
$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

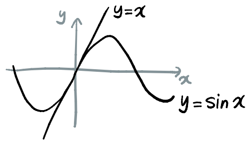
> (가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
> (나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0,\ 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17

• $f(0)=0$ 이므로 $\sin b=0$ 이다. $\quad\therefore b=m\pi$ (m은 정수)

• $f(2\pi)=2\pi a+b$ 이므로 $\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$



$y=\sin x$ 의 $x=0$에서의 미분계수는 1이고 이 점에서 변곡점이므로 왼쪽 그림처럼 방정식 $\sin x=x$ 의 실근은 $x=0$이 유일하다.

$\therefore 2\pi a+b=0\ \cdots$ ㉠

• $f'(x)=(a+\cos x)\cos(ax+b+\sin x)$ 이므로

$f'(0)=(a+1)\cos b,\quad f'(4\pi)=(a+1)\cos(4\pi a+b)$

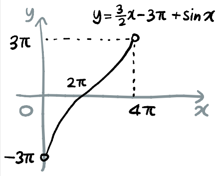
$f'(0)=f'(4\pi)$가 되기 위해서는 $4a$가 2의 배수가 되어야 한다.

이를 만족시키는 $1\le a\le 2$ 범위의 a는 1 또는 $\frac{3}{2}$ 또는 2이다.

그런데 (나) 조건에 따르면 $f'(0)=f'(t)$를 만족시키는 $0<t<4\pi$인 실수 t가 존재하지 않아야 하기 때문에 $\underbrace{a=1}_{f'(0)=f'(2\pi)}$과 $\underbrace{a=2}_{f'(0)=f'(\pi)}$는 탈락이다.

따라서 $a=\frac{3}{2}$이며, ㉠에 의해 $b=-3\pi$ 이다.

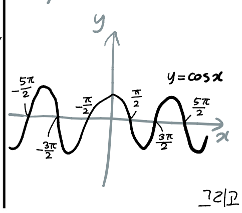
$f'(x)=\underbrace{\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)}_{\text{뭔 짓을 해도 0 안됨}}\cos\underbrace{\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)}_{\text{미분해보면 }\frac{3}{2}+\cos x\ \to\ \text{증가함수}}$ 이므로



구간 $(0,\ 4\pi)$에서 $f'(x)=0$의 실근은

$\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x$
$=-\frac{5}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi$

의 실근과 같다.



$y=\cos x$ 의 그래프를 왼쪽 그림처럼 그렸을 때, 그래프가 $(+)\to(-)$로 바뀌는 점은 $x=-\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$ 이므로 구간 $(0,\ 4\pi)$에서 $f(x)$의 극대점은 3개이다. $\quad\therefore n=3$

그리고 $\frac{3}{2}\alpha_1-3\pi+\sin\alpha_1=-\frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\quad\alpha_1=\pi$

결론적으로 $n\alpha_1-ab=3\cdot\pi-\frac{3}{2}\cdot(-3\pi)=\frac{15}{2}\pi$

$\therefore p+q=2+15=17$

2025학년도 대학수학능력시험 수학 풀이 (기하)

2025년 8월 8일 금요일 오후 3:30

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k, 3)$, $\vec{b}=(1, 2)$에 대하여 $\vec{a}+3\vec{b}=(6, 9)$일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

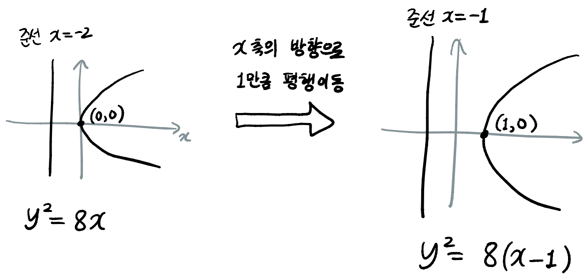
$(k, 3)+3(1, 2)$

$=(k+3, \ 9)$

$k+3=6$이므로 $k=3$

24. 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이고, 준선이 $x=-1$인 포물선이 점 $(3, a)$를 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



포물선 $y^2=8(x-1)$이 점 $(3, a)$를 지나므로

$a^2=8(3-1)=16$이다.

$\therefore a=4$ ($\because a$는 양수)

25. 좌표공간의 두 점 $A(a, b, 6)$, $B(-4, -2, c)$에 대하여 선분 AB를 3:2로 내분하는 점이 z축 위에 있고, 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이 xy평면 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

내분점이 z축 위에 있으므로
내분점의 x좌표와 y좌표는 모두 0이다.

내분점의 x좌표 : $\frac{3\times(-4)+2\times a}{3+2}=0 \quad \therefore a=6$

내분점의 y좌표 : $\frac{3\times(-2)+2\times b}{3+2}=0 \quad \therefore b=3$

외분점이 xy 평면 위에 있으므로
외분점의 z좌표는 0이다

외분점의 z좌표 : $\frac{3\times C-2\times 6}{3-2}=0 \quad \therefore C=4$

$\therefore a+b+C=6+3+4=13$

26. 자연수 $n\,(n\geq 2)$에 대하여 직선 $x=\frac{1}{n}$이 두 타원

$$C_1 : \frac{x^2}{2}+y^2=1,\quad C_2 : 2x^2+\frac{y^2}{2}=1$$

과 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P, Q라 하자. 타원 C_1 위의 점 P에서의 접선의 x절편을 α, 타원 C_2 위의 점 Q에서의 접선의 x절편을 β라 할 때, $6\leq\alpha-\beta\leq 15$가 되도록 하는 모든 n의 개수는? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

점 P의 좌표를 $\left(\frac{1}{n}, y_1\right)$이라 하자.
(y_1을 구할 수는 있으나 구할 필요가 없다.)

타원 C_1 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{x}{2n}+y_1 y=1$ 이고 이 접선은 점 $(2n, 0)$을 지난다.

$\therefore \alpha=2n$

점 Q의 좌표를 $\left(\frac{1}{n}, y_2\right)$라 하자.
타원 C_2 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{n}+y_1 y=1$ 이고 이 접선은 점 $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$을 지난다.

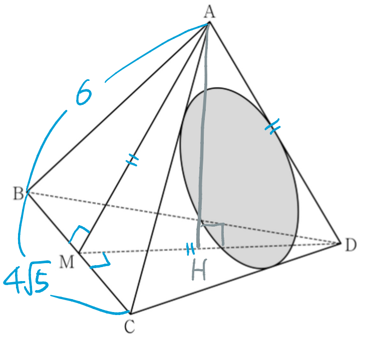
$\therefore \beta=\frac{n}{2}$

$\alpha-\beta=2n-\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n$ 이므로

$6\leq\frac{3}{2}n\leq 15 \Rightarrow 4\leq n\leq 10$

을 만족시키는 자연수 n의 개수는 $10-3=7$

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4\sqrt{5}$인 사면체 ABCD에 대하여 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 삼각형 AMD가 정삼각형이고 직선 BC는 평면 AMD와 수직일 때, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



① $\frac{\sqrt{10}}{4}\pi$　② $\frac{\sqrt{10}}{6}\pi$　③ $\frac{\sqrt{10}}{8}\pi$　④ $\frac{\sqrt{10}}{10}\pi$　⑤ $\frac{\sqrt{10}}{12}\pi$

삼각형 ACD의 내접원의 넓이를 S, 두 평면 ACD와 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 구하고자 하는 것은 $S\cos\theta$이다.

선분 BC가 평면 AMD와 수직이므로 $\overline{BC}\perp\overline{AM}$, $\overline{BC}\perp\overline{MD}$

삼수선의 정리에 의해 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 직선 MD 위에 존재한다. 따라서 이 수선의 발을 점 H라 하면 $\cos\theta=\frac{\triangle HCD}{\triangle ACD}$이다.

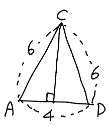
• $\triangle HCD$ 구하기

선분 AM이 선분 BC를 수직이등분하므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{AM}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$ 이고

삼각형 AMD가 정삼각형이므로 $\overline{MD}=4$이다.

따라서 $\triangle HCD=\frac{1}{2}\times\underbrace{\overline{HD}}_{\frac{1}{2}\overline{MD}}\times\underbrace{\overline{MC}}_{\frac{1}{2}\overline{BC}}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

• $\triangle ACD$ 구하기



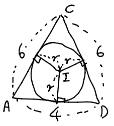
$\overline{AC}=\overline{CD}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$ 이고 $\overline{CD}=4$ 이므로

왼쪽 그림에서 피타고라스의 정리로 높이 구해서 넓이 구하면

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{8}$

• 삼각형 ACD의 내접원의 넓이 S 구하기



삼각형 ACD의 내심을 점 I라 하고 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 $\triangle ACD=\triangle ACI+\triangle ADI+\triangle CDI$

이므로 $8\sqrt{2}=3r+2r+3r \Rightarrow 8\sqrt{2}=8r \Rightarrow r=\sqrt{2}$

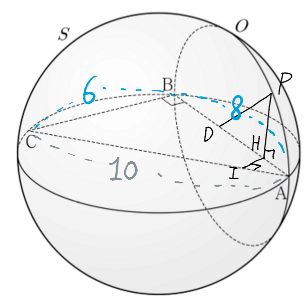
$\therefore S=2\pi$

따라서 구하려는 정사영의 넓이는

$S'=S\cos\theta=2\pi\times\frac{\sqrt{10}}{8}=\frac{\sqrt{10}}{4}\pi$

28. 좌표공간에 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 구 S가 있다. 직선 AB를 포함하고 평면 ABC에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 중에서 직선 AC까지의 거리가 4인 서로 다른 두 점을 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [4점]

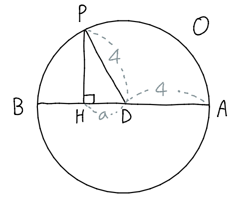
① $\sqrt{43}$　② $\sqrt{47}$　③ $\sqrt{51}$　④ $\sqrt{55}$　⑤ $\sqrt{59}$



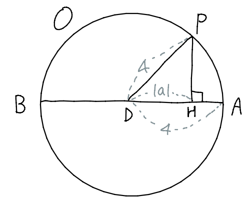
원 O 위의 한 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 점 H라 하고

$\overline{AH}=\underbrace{4}_{\text{원 O의 반지름의 길이}}+a$ $(-4<a<4)$라 하자.

(i) $a>0$일 때



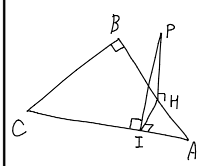
(ii) $a<0$일 때



원 O의 중심을 D라 하면 $\overline{PH}=\sqrt{\overline{PD}^2-\overline{HD}^2}=\sqrt{16-a^2}$ 이다.

점 H에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 점 I라 할 때,

다음과 같이 삼수선의 정리의 조건을 만족시키므로 $\overline{PI}\perp\overline{AC}$ 이다.



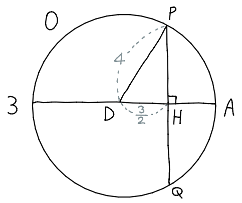
• 평면 ABC와 원 O를 포함한 평면이 서로 수직이고 선분 PH는 두 평면의 교선인 직선 AB와 수직이므로 선분 PH와 평면 ABC는 서로 수직이다.

• $\overline{HI}\perp\overline{AC}$ 이다.

$\overline{HI}=\overline{AH}\sin A=(4+a)\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}+\frac{3}{5}a$ 이고

$\overline{PI}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{(\sqrt{16-a^2})^2+\left(\frac{12}{5}+\frac{3}{5}a\right)^2}=\sqrt{-\frac{16}{25}a^2+\frac{72}{25}a+\underbrace{\frac{144}{25}+16}_{\text{(계산 편의상)}}}$

이므로 $\overline{PI}=4 \Rightarrow \overline{PI}^2=16$을 만족시키는 a의 값은 $-\frac{3}{2}$이다.



따라서 두 점 P와 Q의 위치는 왼쪽 그림과 같이 정해진다.

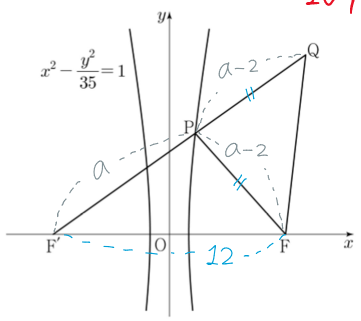
$\overline{PH}=\sqrt{4^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{2}$ 이므로

$\overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{55}$이다.

단답형

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{35}=1$이 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF′ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 점 Q를 잡자.
삼각형 QF′F와 삼각형 FF′P가 서로 닮음일 때,
삼각형 PFQ의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{QF'}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

107

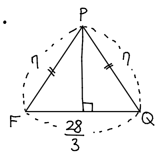


• 점 F의 좌표는 $(\sqrt{1+35},\ 0)=(6,\ 0)$ 이고
점 F′의 좌표는 $(-6,\ 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=12$ 이다.

• $\overline{\mathrm{PF'}}=a$ 라 하면 쌍곡선의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PQ}}=a-2$ 이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$ 라는 문제 조건에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}=a-2$ 이다.

• 두 삼각형 QF′F와 FF′P가 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{QF'}}:\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{F'P}} \Rightarrow 2a-2:12=12:a \Rightarrow 2a^2-2a=144$
$\therefore a=9$

이며 두 삼각형의 닮음비는 $4:3$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{3}\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{28}{3}$ 이다.

•


삼각형 PFQ는 이등변삼각형이므로 그 넓이를 쉽게 구할 수 있다.
$\overline{\mathrm{FQ}}$를 밑변으로 보면 높이는

$$\sqrt{7^2-\left(\frac{14}{3}\right)^2}=7\sqrt{1^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=7\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{3}$$

이므로 삼각형 PFQ의 넓이는

$$\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{28}^{\,14}}{3}\times\frac{7\sqrt{5}}{3}=\frac{98}{9}\sqrt{5}$$

$\therefore p+q=9+98=107$

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다.

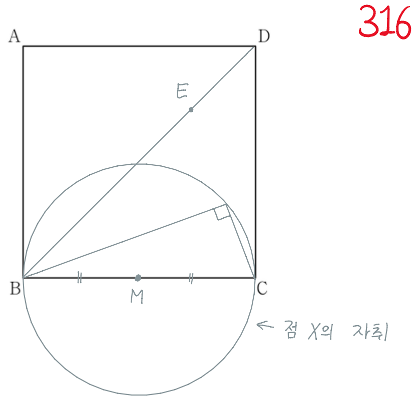
$$|\overrightarrow{\mathrm{XB}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{XB}}-\overrightarrow{\mathrm{XC}}|$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 S라 하자.
도형 S 위의 점 P에 대하여

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

를 만족시키는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

316



$$|\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}|^2=|\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XC}|^2$$

$\Rightarrow \cancel{|\overrightarrow{XB}|^2}+2\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}+\cancel{|\overrightarrow{XC}|^2}=\cancel{|\overrightarrow{XB}|^2}-2\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}+\cancel{|\overrightarrow{XC}|^2}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}=0$ $\qquad\therefore \overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}=0$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{XB}$와 $\overrightarrow{XC}$는 서로 수직이므로 X의 자취는
선분의 BC를 지름으로 하는 원이다 (원주각 90°).

$4\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PD}$ 에서 $\dfrac{4}{3}\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PD}}{3}$ 이므로
선분 BD를 $2:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{PE}$ 이다.
선분 BC의 중점 (X의 자취인 원의 중심)을 점 M이라 하자.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\tfrac{3}{4}\overrightarrow{PE}\right)\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\tfrac{3}{4}(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{ME})\right)\\
&= \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\tfrac{1}{4}\overrightarrow{MP}+\tfrac{3}{4}\overrightarrow{ME}\right)\\
&= \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}}_{(4,-4)\cdot(2,-4)=24}+\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}+\underbrace{\tfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{ME}}_{\frac{3}{4}\times(4,-4)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)=-6}\\
&= 18+\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AC}$는 크기가 $4\sqrt{2}$이며 방향이 정해진 벡터이고,
$\overrightarrow{MP}$는 크기가 2이며 방향을 자유롭게 설정할 수 있는 벡터이므로

$-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{MP}|\le\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}\le|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{MP}| \Rightarrow -8\sqrt{2}\le\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}\le 8\sqrt{2}$

따라서 $M=18+\frac{1}{4}\times 8\sqrt{2}=18+2\sqrt{2}$ 이고, $m=18-\frac{1}{4}\times 8\sqrt{2}=18-2\sqrt{2}$ 이다.
결론적으로 $M\times m=(18+2\sqrt{2})(18-2\sqrt{2})=18^2-(2\sqrt{2})^2=324-8=316$