제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\sqrt[4]{3} \times 3^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$f'(x) = 3x^2+1$

$f'(1) = 4$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 \times a_{13} = 64, \quad \frac{a_5}{a_2} = 2$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$a_7^2 = 64$

$a_7 = 8$ $r^3 = 2$

$a_4 = 4$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-5 & (x<2) \\ ax+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$8a-5 = 2a+1$

$a=1$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=5$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$g'(x) = 2x f(x) + (x^2-1) f'(x)$

$g'(1) = 2f(1) = 10$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\cos\theta + \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$1+2sc = \frac{1}{5}$, $sc = -\frac{2}{5}$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$x=1 \Rightarrow 0=f(1)-1$, $f(1)=1$

양변미분 $\Rightarrow f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2$

$f'(x) = 3x$

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $(\because f(1)=1)$

$f(2) = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

8. 1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여

$$\log_2 a + \log_4 ab = \frac{5}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\log_4 a^3 b = \frac{5}{2}$

$a^3 b = 4^{\frac{5}{2}} = 32 = 2^3 \times 4$

$a=2$
$b=4$

9. 이차함수 $f(x)$가 $\int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$을 만족시킬 때,

$$f(0) - f(-1) + \int_0^1 \{x^2 + 2x + f'(x)\}dx$$

의 값은? [4점]

$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$f(1) - f(-1) = 0$

$\cancel{f(0)} - \cancel{f(-1)} + \int_0^1 (x^2+2x)dx + \cancel{f(1)} - \cancel{f(0)}$

$\frac{1}{3}x^3 + x^2 \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

10. 다음과 같이 $0 \le x < 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

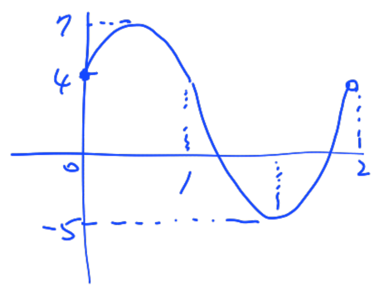
$n-1 \le x < n$일 때, $f(x) = 3^n \sin \pi x + 4$이다. (단, $n=1$, 2)

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

$0 \le x < 1 \rightarrow f(x) = 3\sin \pi x + 4$

$1 \le x < 2 \rightarrow f(x) = 9\sin \pi x + 4$



1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7

13

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 5t^2 + 10t, \quad x_2 = \frac{5}{2}t^2 - 2t - 10$$

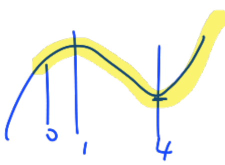
이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

$|x_1 - x_2| = |t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10|$

$3t^2 - 15t + 12$

$3(t-1)(t-4)$



$t=4$

$v_1 = 3t^2 - 10t + 1$

$v_1' = 6t - 10$

$\therefore v_1'(4) = 14$

12. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + b_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_9 - b_3 = 27$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 100 ② 145 ③ 190 ④ 235 ⑤ 280

$b_4 = a_3 + b_3$

$b_5 = b_4 + 1$

$b_6 = b_5 + 1$

$b_7 = a_6 + b_6$

$b_8 = b_7 + 1$

$+ \; b_9 = b_8 + 1$

$b_9 = b_3 + a_3 + a_6 + 4, \quad b_9 - b_3 = 27$

$\therefore a_3 + a_6 = 23$

$a_1 + a_8 = 2 + 7d = 23, \; d = 3$

$\frac{10(2+9\cdot 3)}{2} = 145$

13. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

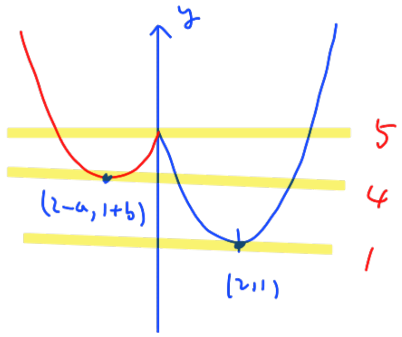
이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t)-\lim_{t\to k-} h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 1, 4, 5일 때, $g(-4)$의 값은? [4점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

$f(x)=(x-2)^2+1$



$1+b=4$

$b=3$

$(a,5)$

$f(a)+b=5$

$f(a)=2$

$(a-2)^2+1=2$

$a=3, 1$

$\therefore a=3 \ (\because 2-a<0)$

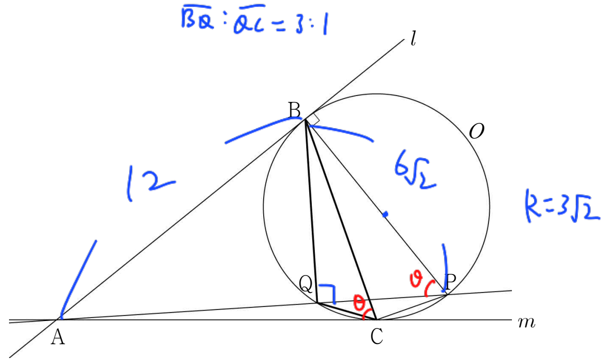
$g(-4)=f(-4+3)+3$

$=f(-1)+3=13$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 O의 외부에 있는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 원 O와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 O와 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P, 직선 AP가 원 O와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 $\overline{AB}=12$일 때, $\sin(\angle BPQ):\sin(\angle QPC)=3:1$이다. 삼각형 BQC의 넓이는? [4점]

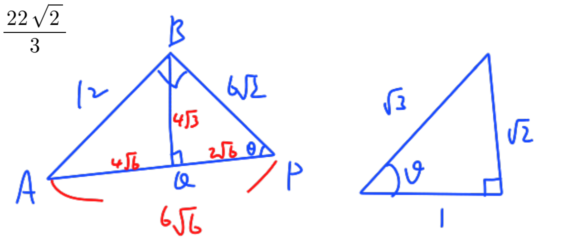
⇓

$\overline{BQ}:\overline{QC}=3:1$



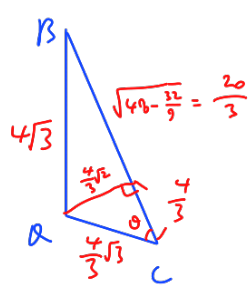
① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$　② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$　③ $6\sqrt{2}$　④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BQ}:\overline{QC}=3:1$



$\overline{BQ}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3} \rightarrow \overline{CQ}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$\overline{PQ}=6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$



$\therefore S=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{4}{3}\sqrt{2}$

$=\frac{16}{3}\sqrt{2}$

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \le 0) \\ \underline{\{f(x)\}^2+x^3} & (x>0) \end{cases} \quad 2ff'+3x^2$$

$+ \Rightarrow$ $g(x)$는 $x>0$ 미.가

이 다음 조건을 만족시킨다. $\therefore b \le 0$

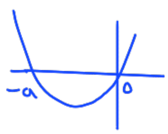
> (가) 함수 $g(x)$는 $x=b$ 에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 방정식 $g(x)=0$ 은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)+g(3)$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{183}{2}$ ② $\dfrac{187}{2}$ ③ $\dfrac{191}{2}$ ④ $\dfrac{195}{2}$ ⑤ $\dfrac{199}{2}$

$|f(x)|-x^2 = \begin{cases} f(x)-x^2 = ax+b & (f(x)\ge 0) \\ -f(x)-x^2 = -2x^2-ax-b & (f(x)<0) \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{미분}}$ $\begin{matrix} a \\ -4x-a \end{matrix}$

i) $b=0$, $g(k)=0$ $(k<0)$
$g'(k)\ne 0$
$f(x)=x(x+a)$



$g(x)$는 $x=-a$에서 미.가

$\swarrow$ $-a<0$

$-a\ge 0$ 이면 k 존재 X

$g'(-a^-)=a$
$g'(-a^+)=3a$ $\Big) \Rightarrow a=0$
$(a<0$에 모순$)$
(X)

ii) $b<0 \Rightarrow g(x)$는
$x=0$ 미.가

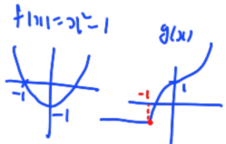
$\begin{cases} |f(0)|=|f(0)|^2, & |f(0)|=|b|=0, 1 \\ & \therefore b=-1 \ (\because b<0) \\ g'(0^-)=g'(0^+), & g'(x)=2ff'+3x^2 \\ & g'(0^+)=2ab \end{cases}$

or $\begin{cases} a=2ab \\ -a=2ab \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{matrix} a=0 \\ b=-1 \end{matrix}$

$\Downarrow$

$a=0$

$f(x)=x^2-1$



$x<0$, $\begin{matrix} f>0 & -1 \\ f<0 & -2x^2+1 \end{matrix}$

$g(x)=\begin{cases} -1 & (x<-1) \\ -2x^2+1 & (-1\le x<0) \\ (x^2-1)^2+x^3 & (x\ge 0) \end{cases}$

$\therefore g(-\frac{1}{2})+g(3)$

$= \frac{1}{2}+91 = \frac{183}{2}$

단답형

16. 방정식

$$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$$

을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

$x>-1$ $\boxed{2}$

$(x+1)^2=x+7$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=2$ $(\because x>-1)$

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=6x^2+1$ 이고 $f(0)=2$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$f(x)=2x^3+x+2$

$f(1)=5$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)=150, \quad \sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)=330$$

이다. $a_1=3$일 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{163}$

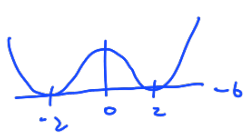
$\sum_{1}^{19} 3a_{k+1} = 480$

$\sum_{1}^{19} a_{k+1} = 160$

$\therefore 3+160=163$

19. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$



$f(x)=(x+2)^2(x-2)^2-6$

$f(0)=10$

20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=-2^{-x+a}+b$가 있다. 집합 $\{x \mid x\neq 4,\ x\text{는 실수}\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+2^x+\frac{|x-4|}{x-4}\{f(x)-2^x\}$$

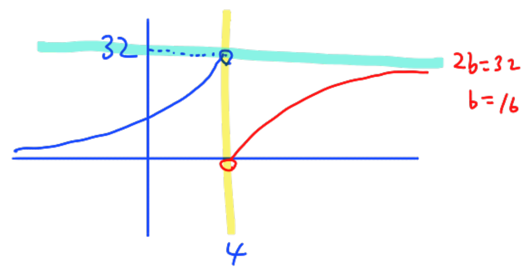
이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{24}$

모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

$x>4$ $g(x)=2f(x)=-2^{-x+a+1}+2b$

$x<4$ $g(x)=2^{x+1}$



$b=32$, $2f(4)=0$, $f(4)=0$

$-2^{-4+a}+16=0$, $a=8$

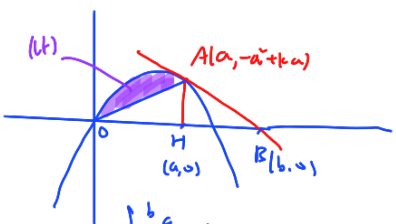
$g(6)=2f(6)=-2^3+32=24$

21. 함수 $f(x)=-x^2+kx\ (k>0)$ 의 그래프 위에 있는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))\left(a>\dfrac{k}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하고, 직선 $y=g(x)$ 의 x 절편을 b 라 하자. 점 A 에서 x축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 삼각형 AOH 의 넓이를 S 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$
>
> (나) $\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx=\frac{32}{3}$

$g(-k)$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, k 는 상수이다.) [4점]

$f(x)=-x(x-k)$, $f'(x)=-2x+k$ $\boxed{28}$



$\int_a^b g = S = \triangle AHB = \triangle AOH$ $\therefore b=2a$

$g(x) = (-2a+k)(x-a)-a^2+ka$

$= (-2a+k)x+a^2$ $(2a,0)$

$-3a^2+2ak=0$ $\therefore k=\frac{3}{2}a$

OA 기울기 $= -a+k = \frac{1}{2}a$ $\therefore$ OA: $y=\frac{1}{2}ax$

$\therefore \int_0^a\{f(x)-\frac{1}{2}ax\}dx = \frac{1}{6}a^3 = \frac{32}{3}$, $a=4, k=6$

$g(x)=-2x+16$

$g(-k)=g(-6)=28$

22. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6=6$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{76}$

> (가) 모든 자연수 n 에 대하여
>
> $$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) 네 항 a_2, a_3, a_4, a_5 중 짝수인 항의 개수는 1 이다.

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
		12		6	—①
6a−15 (홀)	14−4a (짝)	2a−1 (홀)	7−2a (홀)	6	—②

①

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
22	1	11	12		6
18	3	9			
14	5	7			
10	7	5			
6	9	3			
2	11	1			

a_2, a_3, a_4 홀수

$a_2+a_3=12$

a_1: 짝수

$a_1=2a_3$

②

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
(x)		2	10	1	5	6
(x)		6	6	3	3	
	4	3	2	5	1	

$\Rightarrow 22+18+14+10+6+2+4=76$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{4}\Pi_{3}$의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10},\quad \mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

25. 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수 중 적어도 하나가 8의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{17}{33}$ ③ $\frac{19}{33}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{23}{33}$

1 2 4 8

$1-\frac{{}_8C_2}{{}_{12}C_2}$

$=1-\frac{28}{66}=\frac{19}{33}$

26. 다항식 $(1+ax)(2+x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 x^4의 계수의 합이 290일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$({}_5C_3\cdot 2^2+{}_5C_2\cdot 2^3\cdot a)x^3$

$({}_5C_4\cdot 2^1+{}_5C_3\cdot 2^2\cdot a)x^4$

$40+80a+10+40a=290$

$a=2$

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 1부터 4까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(X=k+2)-\mathrm{P}(X=k)=\frac{(-1)^k}{4}\ (k=1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{21}{8}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{11}{32}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{13}{32}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

$P(X=3)-P(X=1)=\frac{-1}{4}$

$P(X=4)-P(X=2)=\frac{1}{4}$

$P(X=1)=a \rightarrow P(X=3)=a-\frac{1}{4}$

$P(X=2)=b \rightarrow P(X=4)=b+\frac{1}{4}$

X	1	2	3	4	
P(X=x)	a	b	$a-\frac{1}{4}$	$b+\frac{1}{4}$	1

i) $\sum_{1}^{4} P(X) = a+b+a-\frac{1}{4}+b+\frac{1}{4}=1$

$2a+2b=1$

ii) $E(X)= a+2b+3a-\frac{3}{4}+4b+1=\frac{21}{8}$

$4a+6b=\frac{19}{8}$

$-(4a+4b=2$

$2b=\frac{3}{8},\ b=\frac{3}{16}$

$a=\frac{5}{16}$

$P(X=1)=a=\frac{5}{16}$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 5$
(나) $n=4, 5, 6$일 때, $f(f(n))=n$이다.

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

$f(f(4))=4$

$f(f(5))=5$

$f(f(6))=6 \longrightarrow f(6)=n$, $f(n)=6$ $\therefore n=5$ or 6

i) $f(6)=6$

$f(5)=5$ or $f(5)=4$

$f(4)=4$ $\quad f(4)=5$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

${}_4H_3=20 \quad {}_5H_3=35$

ii) $f(6)=5$

$f(5)=6$

$\Downarrow$

$f(f(4))=4$, $f(4)\neq 1,2,3$ (by (가))

$f(4)=4$

$\therefore {}_4H_3=20$

$\therefore 20+35+20=75$

단답형

29. 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 5^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포를 따르는 확률변수 Y가

$$2X+Y=a$$

를 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(b \le X \le 75)=0.1359,$$
$$\mathrm{P}(a-160 \le Y \le b)=0.4332$$

일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$\boxed{285}$

$P\left(\frac{b-80}{5} \le Z \le -1\right) = 0.1359 \quad \therefore \frac{b-80}{5} = -2$

$b = 70$

$Y = a - 2X$

$P(a-160 \le a-2X \le 70)$

$= P\left(\frac{a-70}{2} \le X \le 80\right)$

$= P\left(\frac{\frac{a}{2}-115}{5} \le Z \le 0\right) = 0.4332$

$\frac{\frac{a}{2}-115}{5} = -1.5 = -\frac{3}{2}$

$\frac{a}{2} - 115 = -\frac{15}{2}$

$a - 230 = -15 \quad \therefore a = 215$

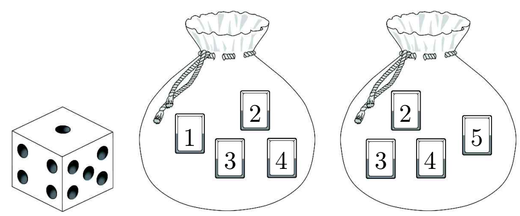
$a+b = 285$

30. 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 A와 2부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 3의 배수이면
> 　주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 후
> 　주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고,
> k가 3의 배수가 아니면
> 　주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸 후
> 　주머니 B에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있을 때, 꺼낸 카드 중 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{34}$



A　　B

3, 6 　$\frac{1}{3}$
1 2 　$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$
1 3 　$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$
1 4 　$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$
2 3 　$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
2 4 　$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
3 4 　$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

1 4 　42, 43, 45
2 4 　42, 43, 45
3 4 　42, 43, 45
$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

1, 2, 4, 5 　$\frac{2}{3} \times$
2 　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
3 　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
4 　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
$\frac{3}{16}$

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{8}} = \frac{6+3}{16+9} = \frac{9}{25}$$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \sin t, \quad y = -4\cos t + 2\sin^2 t$$

에서 $t = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin t + 4\sin t\cos t}{1+\cos t}$$

$$t = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

25. $x>0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^{n}+1}$$

일 때, $f(k)=5$ 를 만족시키는 모든 양수 k 의 값의 합은? [3점]

① $\frac{51}{2}$ ② $\frac{53}{2}$ ③ $\frac{55}{2}$ ④ $\frac{57}{2}$ ⑤ $\frac{59}{2}$

$f(x)$

$\frac{x}{5}>1 \rightarrow \frac{x}{5}=5 \rightarrow x=25$

$\frac{x}{5}=1 \rightarrow \frac{1+10}{2}=\frac{11}{2}$ (x)

$\frac{x}{5}<1 \rightarrow 2x=5,\ x=\frac{5}{2}$

$\frac{55}{2}$

26. 양수 t 에 대하여 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$ 와 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기를 $f(t)$ 라 할 때, $\int_1^e f(t)dt$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$ ④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

$f(t)=\frac{\frac{\ln t}{t}-1}{t-0}=\frac{\ln t-t}{t^2}$

$\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t}-1\right)\frac{1}{t}dt$ $\ln t=k,\ t=e^k$ $\frac{1}{t}dt=dk$

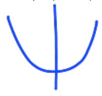
$\int_0^1\left(\frac{k}{e^k}-1\right)dk=\left[(-1-k)e^{-k}-k\right]_0^1$

$=\left(\frac{-2}{e}-1\right)-(-1)$

$=\frac{-2}{e}$

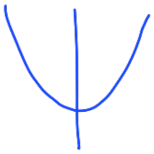
27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 실수 $k\,(k \neq 0)$에 대하여 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\frac{f(x)+k}{e^{f(x)}}$$



가 $x=3$에서 극대이고 $g(3)=e$일 때, $g(k)$의 값은? [3점]

① $-2e^6$ ② $-3e^5$ ③ $-2e^5$ ④ $-3e^4$ ⑤ $-2e^4$



$g'(x) = f'(x)e^{-f(x)} - (f(x)+k)e^{-f(x)}f'(x)$

$= e^{-f(x)}f'(x)(1-f(x)-k)$

$g'(3) = e^{-f(3)}f'(3)(1-k-f(3)) = 0$

$\therefore f'(3)=0$ or $f(3)=1-k$

$f'(3-k)=0,\ k\neq 0 \quad \therefore f(3)=1-k$

$g(3) = (f(3)+k)e^{-f(3)}$

$= e^{-1+k} = e \quad \therefore k=2$

$f(3) = -1 = f(-1)$

$f(x) = (x+1)(x-3)-1,\ f(2)=-4$

$g(k) = g(2) = (f(2)+2)e^{-f(2)}$

$= -2e^4$

28. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(-x)}{x} & (x<0) \\ -x^2+2x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

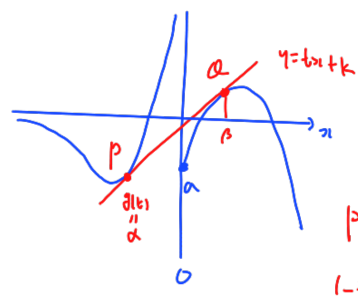
$f' = \begin{cases} \dfrac{1-\ln(-x)}{x^2} & (x>0) \\ -2x+2 & (x<0) \end{cases}$

이다. 실수 $t\,(0<t<2)$에 대하여 $f'(x)=t$를 만족시키는 음수 x의 값을 $g(t)$라 하고, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 값을 $h(t)$라 하자.

> $k \geq a$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$g(1)+h'(1)$의 값은? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) [4점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ 1



$-2\beta+2=t$ $\quad -x(x-2)+a$

$\beta = 1-\frac{t}{2} \rightarrow (1+\frac{t}{2})(1-\frac{t}{2}+a)$

$= 1-\frac{t^2}{4}+a$

$P\left(\alpha, \frac{\ln(-\alpha)}{\alpha}\right),\ Q\left(1-\frac{t}{2}, 1-\frac{t^2}{4}+a\right)$

$\dfrac{1-\frac{t^2}{4}+a-\frac{\ln(-\alpha)}{\alpha}}{1-\frac{t}{2}-\alpha} = t$

$1-\frac{t^2}{4}+a-\frac{\ln(-\alpha)}{\alpha} = t-\frac{t^2}{2}-\alpha t$

$a=h(t)=t-\frac{t^2}{4}-1+\frac{\ln(-\alpha)}{\alpha}-\alpha t$

$h'(t) = 1-\frac{t}{2}+\frac{1-\ln(-\alpha)}{\alpha^2}\alpha' - \alpha' t - \alpha$

$g(1) \rightarrow t=1 \rightarrow \frac{1-\ln(-g(1))}{g(1)^2}=1$

$g(1)=-1=\alpha$

$\rightarrow h'(1) = 1-\frac{1}{2}+\alpha'-\alpha'+1 = \frac{3}{2}$

$\therefore g(1)+h'(1) = -1+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

단답형

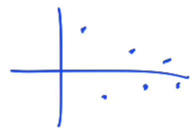
29. 첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{|a_n+1|-a_n-1}_{b_n}\right)=26$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{16}$

$a_n \ge -1 \to 0$

$a_n < -1 \to -2a_n - 2$



a $\quad \frac{1}{4}a$ $\quad \frac{1}{16}a$

$-\frac{1}{2}a$ $\quad -\frac{1}{8}a$ $\quad -\frac{1}{32}a$

$a_{2n-1} > 0 \to b_{2n-1} = 0$

$b_2 = a-2$

$b_4 = \frac{1}{4}a-2$

$b_6 = \frac{1}{16}a-2$

$b_8 = \frac{1}{64}a-2$

$\vdots$

$b_{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}a-2$

$\sum_{1}^{\infty} b_n = 26$

$\frac{1}{4}a-2 \ge -1 \to a-2=26$

$a \ge 4$ $\quad a=28$ (×)

$\frac{1}{16}a-2 \ge -1 \to a-2+\frac{1}{4}a-2=26$

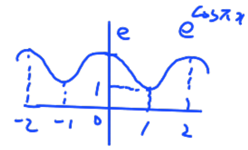
$a \ge 16$ $\quad a=24$ (○)

$\therefore \sum_{1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1+\frac{1}{2}} = 16$

30. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}dt$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$h(g(x)+2)=2x^3+6f(1)x^2+1$$

을 만족시킨다. $\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx = k \times \{f(1)\}^2$ 일 때, 실수 k 의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{72}$



$f'(x) = e^{\cos\pi x} \Rightarrow \begin{cases} \text{우함수} \\ \text{주기 } 2 \end{cases}$

$f(0)=0$, f' 우함수 $\Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$f'(x+2) = f'(x)$

$f(x+2) = f(x)+c$

$f(2) = f(0)+c = c$, $f(2)=c$

$f'(1+x) = f'(1-x)$

$f(1+x) = -f(1-x)+d$

$f(2) = -f(0)+d$, $d=c$

$f(1) = -f(1)+c$

$f(1) = \frac{c}{2}$

$h(g(f(x))+2) = 2(f(x))^3+6f(1)(f(x))^2+1$

$h(x+2) = 2f^3+3cf^2+1$

$h'(x+2) = 6f^2f'+6cff' = 6ff'(f+c)$

$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx = \int_1^5 \frac{h'(x+2)}{f(x+2)}dx = \int_1^5 \frac{6ff'(f+c)}{f(x)+c}dx$

$= \int_1^5 6ff'dx = \left[3(f(x))^2\right]_1^5$

$\left(\begin{array}{l} f(x+2)=f(x)+c \\ f(1)=\frac{c}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$

$= 3((f(5))^2-(f(1))^2)$

$= 3((f(1)+2c)^2-(f(1))^2)$

$= 3((5f(1))^2-(f(1))^2) = 72(f(1))^2$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(-6,0)$, $\vec{b}=(k,2)$에 대하여 $\vec{a}+2\vec{b}=(0,4)$일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-6+2k=0$

24. 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$\frac{x}{2}+\frac{2y}{8}=1$

$x=0 \rightarrow y=4$

25. 좌표평면 위의 세 점 O$(0,\,0)$, A$(3,\,4)$, B$(-3,\,6)$에 대하여 점 P가

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ P(x,y)

$(x-3,\,y-4)\cdot(-3,\,6)=0$

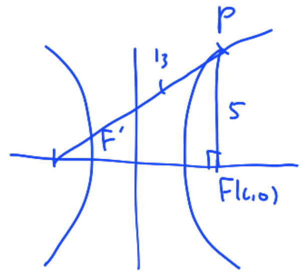
$-3(x-3)+6(y-4)=0$

$-x+2y-5=0$

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

26. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 F$(c,\,0)$ $(c>0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=5$일 때, b^2의 값은? (단, b는 양수이다.) [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24



$\overline{PF'}-5=8$

$\overline{PF'}=13$

$\therefore \overline{F'F}=12=2c$

$c=6$

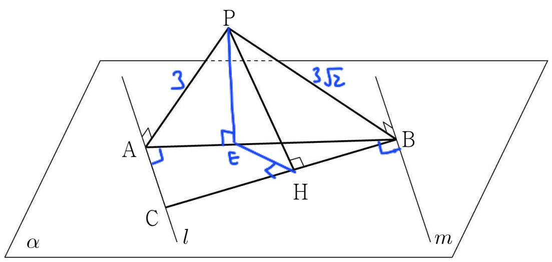
$36=16+b^2,\ b^2=20$

27. 공간에 서로 평행한 두 직선 l, m을 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 두 직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 직선 l 위의 점 C에 대하여 네 점 A, B, C, P가

$$\overline{AP}=3,\quad \overline{BP}=3\sqrt{2},\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

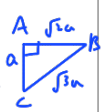
를 만족시킨다. 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ 4

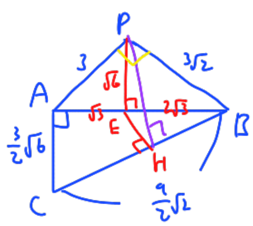


$l \perp AP$
$m \perp BP \to l \perp BP$
$(l \parallel m)$
$l \perp ABP \to l \perp AB$, $m \perp AB$

$\frac{AP}{CA} = \frac{BP}{BA} \to \frac{BA}{CA} = \frac{BP}{AP} = \sqrt{2}$, $CA = a$, $BA = \sqrt{2}a \to BC = \sqrt{3}a$



$\frac{3}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}$ $\therefore \frac{3}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $a = \frac{3}{2}\sqrt{6}$



△PAB : 직각△

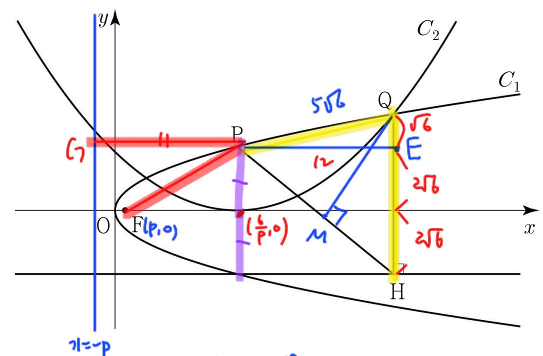
$\overline{PE} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

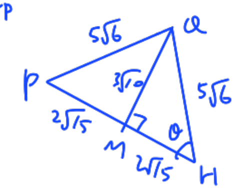
$\frac{EH}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $EH = 2$

$\therefore PH = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$

28. 양수 p에 대하여 점 F를 초점으로 하는 포물선 $C_1 : y^2 = 4px$가 있다. 포물선 C_1 위에 있는 제1사분면 위의 점 P를 초점으로 하고 꼭짓점이 x축 위에 있는 포물선을 C_2라 하자. 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 Q라 하고, 점 Q에서 포물선 C_2의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{PH}=4\sqrt{15}$, $\overline{QH}=5\sqrt{6}$일 때, 선분 PF의 길이는?
(단, 점 P의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.) [4점]

① $\frac{389}{40}$ ② $\frac{197}{20}$ ③ $\frac{399}{40}$ ④ $\frac{101}{10}$ ⑤ $\frac{409}{40}$





$\overline{QM} = 3\sqrt{10}$

$4\sqrt{15} \times 3\sqrt{10} = 5\sqrt{6} \times \overline{PE}$

$\overline{PE} = 12$, $\overline{QE} = \sqrt{6}$

$P(d, 2\sqrt{6})$, $y^2 = 4px$, $d = \frac{6}{p}$

$Q\left(\frac{6}{p} + 12, 3\sqrt{6}\right)$

$54 = 24 + 48p$, $p = \frac{5}{8}$

$\therefore \overline{PF} = \overline{PG} = p + \frac{6}{p} = \frac{5}{8} + \frac{48}{5} = \frac{25+384}{40} = \frac{409}{40}$

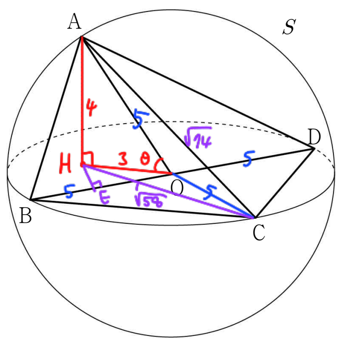
단답형

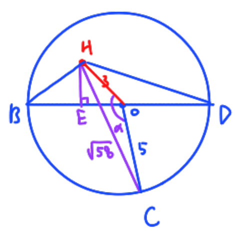
29. 공간에 점 O가 중심이고 반지름의 길이가 5인 구 S가 있다. 구 S 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가

$$\overline{BC}=\overline{CD},\quad \overline{BD}=10,\quad \overline{AC}=\sqrt{74},\quad \overline{AB}<\overline{AD}$$

를 만족시킨다. 직선 OA와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. 삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. [4점]

$\boxed{12}$





$\angle HOC=\alpha$

$\cos\alpha=\frac{34-58}{2\cdot15}=-\frac{4}{5}$

$\angle HOE=\alpha-\frac{\pi}{2}$

$\overline{HE}=3\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-3\cos\alpha=\frac{12}{5}$

$\therefore \triangle HBD=\frac{1}{2}\times10\times\frac{12}{5}=12$

30. 좌표평면에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{4}$인 평행사변형 ABCD가 있다.

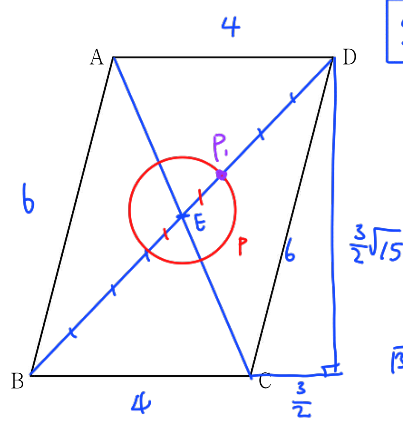
$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{ED}|$$

를 만족시키는 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$$

를 만족시키는 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\boxed{25}$



$\overline{BD}=\sqrt{\frac{135}{4}+\frac{121}{4}}=8$

$|\underbrace{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}}_{\vec{0}}-4\overrightarrow{EP}|=|\overrightarrow{EB}|$

$4|\overrightarrow{EP}|=|\overrightarrow{EB}|=4 \quad \therefore |\overrightarrow{EP}|=1$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PC}, \quad \overrightarrow{EQ}-\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{EQ}=-\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{PE}$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EQ})$

$=\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{PE})=|\overrightarrow{PB}|^2\le|\overrightarrow{PB_1}|^2=25$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.