2025학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (1~14번)

2025년 7월 11일 금요일 오후 3:18

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[4]{3}\times 3^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 3^1 = 3$

2. 함수 $f(x)=x^3+x$ 에 대하여 $\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}_{f'(1)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$f'(x) = 3x^2+1$

$f'(1) = 4$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 \times a_{13} = 64, \quad \frac{a_5}{a_2} = 2$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$a \times ar^{12} = 64 \Rightarrow a^2r^{12} = 64 \Rightarrow ar^6 = 8$

$\frac{ar^4}{ar} = 2 \Rightarrow r^3 = 2$

$a_4 = ar^3 = \frac{ar^6}{r^3} = \frac{8}{2} = 4$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^3-5 & (x<2) \\ ax+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 2-} f(x) = 8a-5$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = 2a+1$

$8a-5 = 2a+1$

$\therefore a = 1$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=5$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)$

$=2\times5 \quad =10$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

양변 제곱

$\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

양변에 $x=1$ 대입

$0=f(1)-1 \qquad \therefore f(1)=1$

양변 미분

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x$

$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2+C$

$f(1)=1$이므로 $C=-1$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} \Rightarrow f(2)=\frac{11}{2}$

8. 1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여

$$\log_2 a + \log_4 ab = \frac{5}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$$\log_4 a^2 + \log_4 ab = \frac{5}{2}$$

$$\log_4 a^3 b = \frac{5}{2}$$

$$a^3 b = 4^{\frac{5}{2}} = 2^5$$

$$a = 2, \quad b = 2^2 = 4$$

$$\therefore a + b = 6$$

9. 이차함수 $f(x)$가 $\int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$을 만족시킬 때,

$$\underbrace{f(0) - f(-1)}_{\int_{-1}^{0} f'(x)dx} + \int_0^1 \{x^2 + 2x + f'(x)\}dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$$\int_{-1}^{0} f'(x) + \int_0^1 (x^2 + 2x)dx + \int_0^1 f'(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1} f'(x)dx$$

$$\int_0^1 (x^2 + 2x)dx + \int_{-1}^{1} f'(x)dx$$

$$= \frac{4}{3} + 0$$

$$= \frac{4}{3}$$

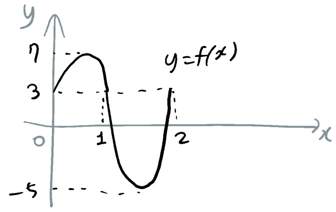
10. 다음과 같이 $0 \le x < 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $f(x) = 3^n \sin \pi x + 4$이다.
> (단, $n = 1$, 2)

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin \pi x + 4 & (0 \le x < 1) \\ 9\sin \pi x + 4 & (1 \le x < 2) \end{cases}$$



$0 \le x < \frac{1}{2}$: 3부터 6까지 (4개)

$\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2}$: 1부터 7까지 (7개)

$\frac{3}{2} \le x < 2$: 1부터 2까지 (2개)

$4 + 7 + 2 = 13$

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 5t^2 + 10t, \quad x_2 = \frac{5}{2}t^2 - 2t - 10$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

$x_1 - x_2 = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10$

$(x_1 - x_2)' = 3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4)$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x_1 - x_2$	↗	극대	↘	극소	↗

$t=4$일 때 $x_1 - x_2 = 2$ 이므로
$x_1 - x_2$는 양수값만 가짐을 알 수 있음
⇒ $t=4$일 때 거리 최소 확정

$a_1 = x_1'' = 6t - 10$ 이므로 $t=4$이면 $a_1 = 14$

12. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + b_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_9 - b_3 = 27$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 100 ② 145 ③ 190 ④ 235 ⑤ 280

$b_2 = b_1 + 1$
$b_3 = b_2 + 1 = b_1 + 2$
$b_4 = a_3 + b_3 = a_3 + b_1 + 2$
$b_5 = b_4 + 1 = a_3 + b_1 + 3$
$\vdots$
$b_9 = a_3 + a_6 + b_1 + 6$

$b_9 - b_3 = (a_3 + a_6 + b_1 + 6) - (b_1 + 2)$
$= a_3 + a_6 + 4$

이 값이 27이므로 $(a+2d) + (a+5d) + 4$
$= 2a + 7d + 4 = 27$

문제에서 $a=1$이므로 $d=3$

$a_n = 3n - 2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}(3k-2) = 3 \times 55 - 2 \times 10$
$= 145$

13. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

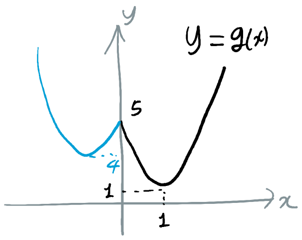
$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t\to k+}h(t)-\lim_{t\to k-}h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 1, 4, 5일 때, $g(-4)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

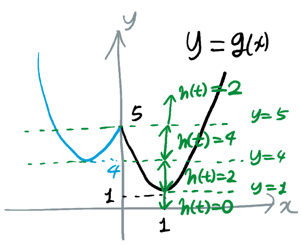


$x\geq 0$ 일 때 $y=g(x)$ 그래프는 확정
$x<0$ 일 때의 개형은 추론해야 하는데, 위와 같이
$g(x)$의 극값이 1, 4, 5가 되도록 그리면
문제 조건을 만족시킴

$\lim_{t\to 1+} h(t) = 2$, $\lim_{t\to 1-} h(t) = 0$ (○)

$\lim_{t\to 4+} h(t) = 4$, $\lim_{t\to 4-} h(t) = 2$ (○)

$\lim_{t\to 5+} h(t) = 2$, $\lim_{t\to 5-} h(t) = 4$ (○)



$x<0$일 때와 $x>0$ 일 때
극값 차이 3이므로 $b=3$

$x=0$ 에서 연속이므로

$f(a)+b = f(0)$

$f(a)+3 = 5$

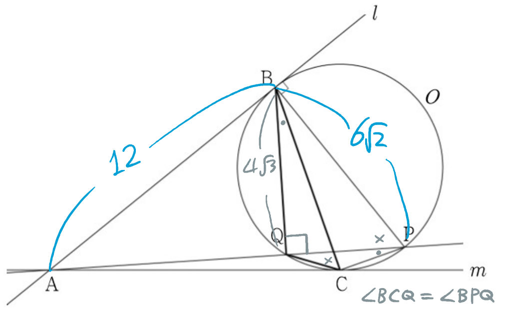
$f(a)=2$

$\Rightarrow a=1$ 또는 $a=3$

$a=1$이면 $x<0$에서 극값 없음

$g(-4) = f(-4+3)+3 = f(-1)+3 = 10+3 = 13$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 O의 외부에 있는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 원 O와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 O와 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P, 직선 AP가 원 O와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=12$일 때, $\sin(\angle \mathrm{BPQ}):\sin(\angle \mathrm{QPC})=3:1$이다. 삼각형 BQC의 넓이는? [4점]



$\angle BCQ = \angle BPQ$
$\angle QBC = \angle QPC$

① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

① $l \perp \overline{BP}$ 이므로 $\overline{BP}$는 지름 $\therefore \overline{BP} = 6\sqrt{2}$

② 원주각 성질에 의해 $\angle BCQ=\angle BPQ$이고 $\angle QBC=\angle QPC$

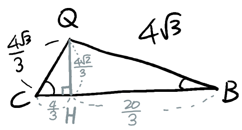
③ $\angle BQP$는 지름 $\overline{BP}$에 대한 원주각이므로 $\frac{\pi}{2}$

$\overline{AB}\times\overline{BP} = \overline{AP}\times\overline{BQ} \Rightarrow 12\times 6\sqrt{2} = 6\sqrt{6}\times\overline{BQ}$

$\therefore \overline{BQ} = 4\sqrt{3}$

④ $\sin(\angle BPQ) = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $\sin(\angle QBC) = \sin(\angle QPC) = \frac{1}{3}\sin(\angle BPQ) = \frac{\sqrt{6}}{9}$



$\sin(\angle QBC)=\frac{\sqrt{6}}{9}$, $\cos(\angle QBC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\sin(\angle QCB)=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos(\angle QCB)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle QBC = \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{QH}$

$= \frac{1}{2}\times 8\times\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

2025학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (15~22번)

2025년 7월 11일 금요일 오후 3:21

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x \le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $g(x)=0$은 음의 실근을 갖는다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$ ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

$x>0$일 때는 $g(x)$가 미분가능하지 않을 이유가 없으므로
(가) 조건에서 $b \le 0$

(i) $b=0$일 때

$a>0$이면 $g(x)$가 $x=-a$에서 미분 불능이므로 (가) 위배
$a=0$이면 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 (가) 위배
$a<0$이면 $g(x)=0$이 음의 실근을 갖지 않으므로 (나) 위배

$\Rightarrow b \ne 0$ 이다.

(ii) $b<0$일 때

(가) 조건에 의해 $x=0$에서는 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to0-} g(x) = \lim_{x\to0+} g(x) \Rightarrow -b=b^2 \quad \therefore b=-1$

$\lim_{x\to0-} g'(x) = \lim_{x\to0+} g'(x) \Rightarrow -a=2ab \quad \therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2-1$이다.

$g(-\frac{1}{2}) = |f(-\frac{1}{2})|-(-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$g(3)=\{f(3)\}^2+3^3 = 64+27=91$

$g(-\frac{1}{2})+g(3) = \frac{1}{2}+91 = \frac{183}{2}$

단답형

16. 방정식

$$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

2

진수 조건 : $x>-1$

$\log_3(x+1)^2 = \log_3(x+7)$

$(x+1)^2 = x+7$

$x^2+2x+1=x+7$

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>1$)

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+1$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

5

$f(x)=\int f'(x)\,dx = 2x^3+x+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$f(x)=2x^3+x+2$이므로

$f(1)=5$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)=150, \quad \sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)=330$$

이다. $a_1=3$일 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

163

$$\sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)=150$$

$$+\ \sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)=330$$

$$\sum_{k=1}^{19}3a_{k+1}=480$$

$3\sum_{k=1}^{19}a_{k+1} = 3\sum_{k=2}^{20}a_k = 480$ 이므로

$$\sum_{k=2}^{20}a_k = 160$$

$$\sum_{k=1}^{20}a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{20}a_k = 3+160 = 163$$

19. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

10

$f(x)=f(-x)$ 이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

따라서 $f'(x)=4x^3+2ax$

$f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가지므로

$$\begin{cases} f(2)=-6 & \rightarrow \quad 16+4a+b=-6 \\ f'(2)=0 & \rightarrow \quad 32+4a=0 \end{cases}$$

$\therefore a=-8, \quad b=10$

$f(x)=x^4-8x^2+10$

$\hookrightarrow f'(x)=4x^3-16x = 4x(x+2)(x-2)$

	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$\hookrightarrow f(0)=10$

20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=-2^{-x+a}+b$가 있다. 집합 $\{x \mid x\neq 4,\ x$는 실수$\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+2^x+\frac{|x-4|}{x-4}\{f(x)-2^x\}$$

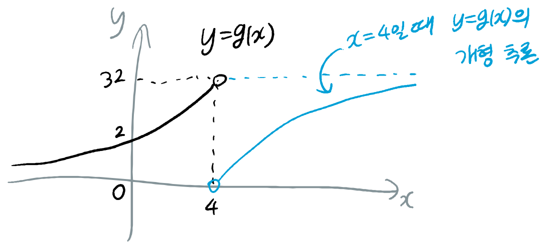
이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

24

> 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

$$g(x)=\begin{cases} 2f(x)=-2^{-x+a+1}+2b & (x>4) \\ 2^{x+1} & (x<4) \end{cases}$$

$x=4$에서는 정의되지 않음에 유의



위 그래프에 근거하면 $\lim_{x\to4+}g(x)=0$ 이므로

$-2^{a-3}+2b=0 \quad \cdots ㉠$

그리고 $\lim_{x\to\infty}g(x)=32$ 이므로

$2b=32 \quad \cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=8, \quad b=16$

따라서 $f(x)=-2^{-x+8}+16$ 이므로

$g(6)=2f(6)=2\times12=24$

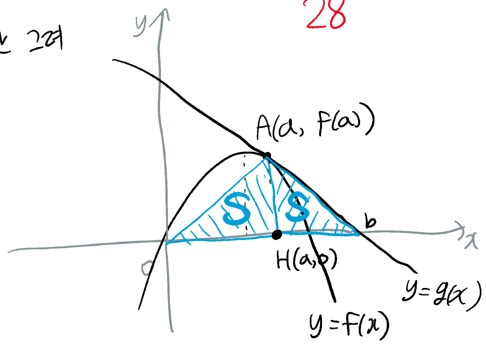
21. 함수 $f(x)=-x^2+kx\ (k>0)$ 의 그래프 위에 있는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))\ \left(a>\frac{k}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하고, 직선 $y=g(x)$ 의 x 절편을 b 라 하자. 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 삼각형 AOH 의 넓이를 S 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$
(나) $\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx=\frac{32}{3}$

$g(-k)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.) [4점]

28

일단 그려



$\int_a^b g(x)\,dx = S$ 이므로 위 그림에 근거하면 $b=2a$

$g(x)=\underset{(-2a+k)}{f'(a)}(x-a)+\underset{(-a^2+ka)}{f(a)}$ 에서 $g(2a)=0$ 이므로

$g(2a)=-2a^2+ka-a^2+ka$

$=-3a^2+2ka=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}a$

(나)에서

$\int_0^a\left(-x^2+ax\right)dx=\frac{32}{3}$ 이므로 $\quad \frac{a^3}{6}=\frac{32}{3}$

$\therefore a=4,\quad k=6$

따라서 $g(x)=-2x+16$ 이므로

$g(-k)=g(-6)=28$

22. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=6$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

76

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$ 이다.
(나) 네 항 $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 짝수인 항의 개수는 1이다.

(i) a_4가 홀수일 때

$a_6=a_5+a_4=6$ 이므로

$(a_5,\ a_4)=(1,5)$ 또는 $(3,3)$ 또는 $(5,1)$

$a_5=1,\ a_4=5$ → $a_3=2,\ a_2=3$ → $a_1=4$

$a_5=3,\ a_4=3$ → $a_3=6,\ \cancel{a_2=-3}$

$a_5=5,\ a_4=1$ → $a_3=10,\ \cancel{a_2=-9}$

$\therefore a_1=4$

(ii) a_4가 짝수일 때

$a_6=6$이면 $a_4=12$이고 a_5는 뭐가 돼도 노상관

$(a_3,\ a_2)=$ $(1,\ 11)$일 때 $a_1=2$

a_4가 짝수이므로 (나)에 의해 둘 다 홀수

$(3,\ 9)$일 때 $a_1=6$

$(5,\ 7)$일 때 $a_1=10$

$(7,5)$일 때 $a_1=14$

$(9,3)$일 때 $a_1=18$

$(11,1)$일 때 $a_1=22$

$4+2+6+10+14+18+22=76$

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2025학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (확률과 통계)

2025년 7월 11일 금요일 오후 3:21

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_4\Pi_3$의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

$4^3 = 64$

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{9}{10}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

A와 B가 서로 배반사건이면

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 이므로

$P(B) = P(A \cup B) - P(A)$

$= \frac{9}{10} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$

25. 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수 중 적어도 하나가 8의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{17}{33}$ ③ $\frac{19}{33}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{23}{33}$

1 2 4 8

적어도 하나가 8의 약수인 사건 : A

↳ 둘 다 8의 약수가 아닌사건 : A^c

$$P(A^c) = \frac{{}_8C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{8\times7}{12\times11} = \frac{14}{33}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

26. 다항식 $(1+ax)(2+x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 x^4의 계수의 합이 290일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(2+x)^5$의 일반항 : ${}_5C_k \cdot 2^{5-k} \cdot x^k$

$(1+ax)(2+x)^5$

$= \underbrace{(2+x)^5}_{㉠} + \underbrace{ax(2+x)^5}_{㉡}$

에서 x^3 항이 나오는 경우는

㉠에서 $k=3$일 때 ${}_5C_3 \cdot 2^{5-3} \cdot x^3 = 40x^3$

㉡에서 $k=2$일 때 $ax \cdot {}_5C_2 \cdot 2^{5-2} \cdot x^2 = 80ax^3$

∴ x^3의 계수 : $40+80a$

이에서 x^4항이 나오는 경우는

㉠에서 $k=4$일 때 ${}_5C_4 \cdot 2^{5-4} \cdot x^4 = 10x^4$

㉡에서 $k=3$일 때 $ax \cdot {}_5C_3 \cdot 2^{5-3} \cdot x^3 = 40ax^4$

∴ x^4의 계수 . $10+40a$

$(40+80a)+(10+40a) = 50+120a$

이고 이 값이 290이므로 $a=2$

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 1부터 4까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(X=k+2)-\mathrm{P}(X=k)=\frac{(-1)^k}{4}\ (k=1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{21}{8}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{11}{32}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{13}{32}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

$P(X=3)=P(X=1)-\frac{1}{4}$

$P(X=4)=P(X=2)+\frac{1}{4}$

$P(X=1)+P(X=2)+\underbrace{P(X=3)}_{P(X=1)-\frac{1}{4}}+\underbrace{P(X=4)}_{P(X=2)+\frac{1}{4}}=1$ 이므로

$2\{P(X=1)+P(X=2)\}=1 \quad \therefore P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}\cdots$ ㉠

$E(X)=P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)=\frac{21}{8}$ 이므로

$P(X=1)+2P(X=2)+3\{P(X=1)-\frac{1}{4}\}+4\{P(X=2)+\frac{1}{4}\}=\frac{21}{8}$

$\therefore 4P(X=1)+6P(X=2)=\frac{19}{8}\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $P(X=1)=\frac{5}{16}$, $P(X=2)=\frac{3}{16}$

28. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 5$
> (나) $n=4,5,6$일 때, $f(f(n))=n$이다.

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

$f(f(6))=6$인데 $f(1)\sim f(4)$는 6이 못 되므로

$f(6)=5$, $f(5)=6$ 또는 $f(6)=6$

(i) $f(6)=5$, $f(5)=6$일 때

$f(f(6))=6$과 $f(f(5))=5$는 만족하므로

$f(f(4))=4$만 만족시키면 된다.

그런데 이를 만족시키려면 $f(4)=4$여야만 한다.

만약 $f(4)=3$이고 $f(\underbrace{f(4)}_{3})=4$라면

$f(3)>f(4)$가 되므로 (가) 조건에 위배된다.

$f(4)=4$이면서 (가) 조건을 만족시키는 경우의 수는

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le 4$: ${}_4H_3=20$

(ii) $f(6)=6$일 때

① $f(4)=4$, $f(5)=5$인 경우

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le 4$: ${}_4H_3=20$

② $f(4)=5$, $f(5)=4$인 경우

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le 5$: ${}_5H_3=35$

따라서 전체 경우의 수는

$20+20+35=75$

단답형

29. 정규분포 $\mathrm{N}(80, 5^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포를 따르는 확률변수 Y가

$$2X + Y = a$$

를 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(b \le X \le 75) = 0.1359,$$
$$\mathrm{P}(a - 160 \le Y \le b) = 0.4332$$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

285

$\mathrm{P}(b \le X \le 75)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{b-80}{5} \le Z \le -1\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le -1) - \mathrm{P}\left(Z \le \frac{b-80}{5}\right)$

$= 0.1359$

에서 $\mathrm{P}(Z \le -1) = 0.1587$이므로

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{b-80}{5}\right) = 0.0228$이다.

따라서 $\frac{b-80}{5} = -2$이므로 $b = 70$

$2X + Y = a \Rightarrow Y = a - 2X$

$X \sim N(80, 5^2)$이므로 $Y \sim (a-160, 10^2)$이다.

따라서 $\mathrm{P}(a-160 \le Y \le 70)$

$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{230-a}{10}\right)$

$70-(a-160)$

$= 0.4332$이므로

$\frac{230-a}{10} = 1.5$이다. 따라서 $a = 215$

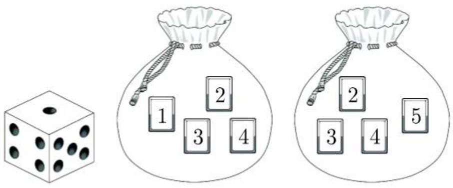
$\therefore a+b = 215+70 = 285$

30. 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 A와 2부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 3의 배수이면
>   주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 후
>   주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고,
> k가 3의 배수가 아니면
>   주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸 후
>   주머니 B에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있을 때, 꺼낸 카드 중 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

34



A B

(i) k가 3의 배수일 때 ($k = 3, 6$)

- 주사위 확률 : $\frac{1}{3}$
- 같은 카드가 나올 확률

A		B
(1, 2)	3	(2, 3)
(1, 3)	3	(2, 4)
(1, 4)	3	(2, 5)
(2, 3)	5	(3, 4)
(2, 4)	5	(3, 5)
(3, 4)	5	(4, 5)

합 : 24

파란색 숫자는 B와 같은 숫자가 나오는 경우의 수

$\frac{24}{6\times6} = \frac{2}{3}$

- A와 B에서 모두 4가 나올 확률 : $\frac{3\times3}{6\times6} = \frac{1}{4}$

(ii) k가 3의 배수가 아닐 때 ($k = 1, 2, 4, 5$)

- 주사위 확률 : $\frac{2}{3}$
- A와 B에서 같은 카드가 나올 확률 : $\frac{3}{4\times4} = \frac{3}{16}$
- A와 B에서 둘 다 4가 나올 확률 : $\frac{1}{4\times4} = \frac{1}{16}$

구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{3}{16}} = \frac{9}{25} \Rightarrow p=25,\ q=9$$

$\therefore p+q = 34$

2025학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (미적분)

2025년 7월 11일 금요일 오후 3:21

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{7x}\cdot 7 = 7$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t+\sin t,\quad y=-4\cos t+2\sin^2 t$$

에서 $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\sin t+4\sin t\cos t}{1+\cos t}$$

$t=\frac{\pi}{3}$이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$

25. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^{n}+1}$$

일 때, $f(k)=5$를 만족시키는 모든 양수 k의 값의 합은? [3점]

① $\frac{51}{2}$ ② $\frac{53}{2}$ ③ $\frac{55}{2}$ ④ $\frac{57}{2}$ ⑤ $\frac{59}{2}$

(i) $x>5$ 일 때

$f(x)=\frac{x^2}{5}$ 이므로 $f(25)=5$ $\therefore k=25$

(ii) $x=5$ 일 때

$f(x)=\frac{11}{2}$ (×)

(iii) $x<5$ 일 때

$f(x)=2x$ 이므로 $f(\frac{5}{2})=5$ $\therefore k=\frac{5}{2}$

$25+\frac{5}{2}=\frac{55}{2}$

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$와 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나는 직선의 기울기를 $f(t)$라 할 때, $\int_1^e f(t)dt$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$ ④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

$f(t)=\frac{\frac{\ln t}{t}-1}{t}=\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}$

$\int_1^e f(t)\,dt=\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$

$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{t^2}\,dt$

$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^e$

$=-\frac{2}{e}+1$

$\int_1^e \frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_1^e=1$

$\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^e\frac{\ln t}{t^2}\,dt-\int_1^e\frac{1}{t}\,dt$

$=\left(-\frac{2}{e}+1\right)-1=-\frac{2}{e}$

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 실수 $k\,(k \neq 0)$에 대하여 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\frac{f(x)+k}{e^{f(x)}}$$

가 $x=3$에서 극대이고 $g(3)=e$일 때, $g(k)$의 값은? [3점]

① $-2e^6$ ② $-3e^5$ ③ $-2e^5$ ④ $-3e^4$ ⑤ $-2e^4$

$g(x)$가 $x=3$에서 극댓값 e를 가지므로

$g(3)=e,\quad g'(3)=0$

$g(x)=\{f(x)+k\}e^{-f(x)}$

$g'(x)=f'(x)e^{-f(x)}-f'(x)\{f(x)+k\}e^{-f(x)}$

$=\{1-f(x)-k\}f'(x)e^{-f(x)}$

$g'(3)=0$이므로 $1-f(3)-k=0$ 또는 $f'(3)=0$

하지만 $f'(3)=0$이면 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시키는 k가 없다.

$\therefore f(3)=-k+1$

따라서 $g(3)=e^{k-1}$이고 이 값이 e이므로 $k=2$

$f(-1)=f(3)=-1$을 만족시키고

최고차항 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x+1)(x-3)-1$ 이다.

따라서

$$g(k)=g(2)=\frac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=\frac{(-4)+2}{e^{-4}}$$

$$=-2e^4$$

28. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(-x)}{x} & (x<0)\\ -x^2+2x+a & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(0<t<2)$에 대하여 $f'(x)=t$를 만족시키는 음수 x의 값을 $g(t)$라 하고, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 값을 $h(t)$라 하자.

$k\geq a$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

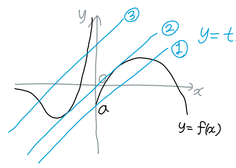
$g(1)+h'(1)$의 값은? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

$x<0$일 때 $f'(x)=\dfrac{1-\ln(-x)}{x^2}$이므로

$f(x)$는 $x<-e$일 때 감소하고 $-e<x<0$일 때 증가한다.

그리고 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



$y=tx+k$

①~③에서 모두 교점 2개

직선 $y=tx+k$가 박스 조건을 만족시키려면

$y=tx+k$가 $y=f(x)$와 $x>0$에서 접할 때, $x<0$에서도 동시에 접해야 한다.

$y=f(x)$ 위의 점 $(g(t),\ f(g(t)))$에서의 접선의 방정식은

$y=t(x-g(t))+f(g(t))\ \cdots$ ㉠

$y=f(x)$ 위의 점 $\left(1-\frac{t}{2},\ -\frac{t^2}{4}+1+a\right)$에서의 접선의 방정식은

$x>0$일 때 $f(x)$의 접선의 기울기가 t이려면 x좌표가 $1-\frac{t}{2}$가 되어야 함

$y=t\left(x-1+\frac{t}{2}\right)-\frac{t^2}{4}+1+h(t)\ \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$-tg(t)+f(g(t))=\frac{t^2}{4}-t+1+h(t)$

양변을 t에 대해 미분하면

$-g(t)-tg'(t)+g'(t)\underbrace{f'(g(t))}_{t}=\frac{t}{2}-1+h'(t)$

$-g(t)=\frac{t}{2}-1+h'(t)\qquad \therefore g(t)+h'(t)=1-\frac{t}{2}$

따라서 $g(1)+h'(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

단답형

29. 첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n+1|-a_n-1)=26$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 값을 구하시오. [4점] 16

$$\underbrace{|a_n+1|-a_n-1}_{\text{편의상 } b_n \text{ 이라 하자.}} = \begin{cases} 0 & (a_n \ge -1) \\ -2(a_n+1) & (a_n < -1) \end{cases}$$

n이 홀수이면 a_n이 양수이므로 b_n이 무조건 0 됨

(i) $a_2 < -1$ 이고 $a_4 \ge -1$ 인 경우

$b_2 = -2(a_2+1) = 26$ 이 되어야 하므로

$a_2 = -14$ 이다. 하지만 $a_4 = -\frac{7}{2}$ 이 되므로

$a_4 \ge -1$ 이라는 가정에 모순

(ii) $a_4 < -1$ 이고 $a_6 \ge -1$ 인 경우

$$\begin{aligned} b_2 + b_4 &= -2(a_2+1) - 2(a_4+1) \\ &= -2a_2 - 2a_4 - 4 \\ &= a_1 + \frac{a_1}{4} - 4 \\ &= \frac{5}{4}a_1 - 4 \end{aligned}$$

이 값이 26이 되도록 하는 a_1의 값은 24

$a_2 = -12$, $a_4 = -3$, $a_6 = -\frac{3}{4}$

이므로 가정에 모순되지도 않음

따라서 $\{a_n\}$은 첫째항이 24이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 16$$

30. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}dt$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$h(g(x)+2)=2x^3+6f(1)x^2+1 \qquad f(2)$$

을 만족시킨다. $\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx = k \times \{f(1)\}^2$ 일 때, 실수 k 의 값을 구하시오. [4점] 72

주어진 등식의 양변에 x 대신 $f(x)$를 대입하면

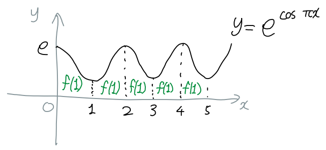
$$h(x+2) = 2\{f(x)\}^3 + 6f(1)\{f(x)\}^2 + 1$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(x+2) = 6\{f(x)\}^2 f'(x) + 12f(1)f(x)f'(x)$$

$\frac{h'(x)}{f(x)}$ 꼴이 나오도록 하기 위해 양변을 $f(x+2)$로 나눠주면

$$\frac{h'(x+2)}{f(x+2)} = \frac{6\{f(x)\}^2 f'(x) + 12f(1)f(x)f'(x)}{f(x+2)}$$



여기서 $y=e^{\cos\pi x}$의 그래프를 그려보면 몇 가지 특징을 발견할 수 있다.

① 정수 n에 대하여 $f(n) = nf(1)$

② $y=e^{\cos\pi x}$가 주기가 2인 주기함수이므로

$$f(x+2) = f(x) + \underbrace{f(2)}_{\text{특징 ①에 의함}} = f(x) + 2f(1)$$

이 특징들을 이용해서 $\frac{h'(x+2)}{f(x+2)}$의 수식을 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{h'(x+2)}{f(x+2)} &= \frac{6\{f(x+2)-2f(1)\}^2 f'(x) + 12f(1)\{f(x+2)-2f(1)\}f'(x)}{f(x+2)} \\ &= 6f(x+2)f'(x) - 12f(1)f'(x) \end{aligned}$$

이때, $f'(x) = e^{\cos\pi x}$는 주기가 2인 주기함수이므로 $f'(x) = f'(x+2)$

$$\begin{aligned} \int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx &= \int_1^5 \frac{h'(x+2)}{f(x+2)}dx = \int_1^5 \{6f(x+2)f'(x+2) - 12f(1)f'(x)\}dx \\ &= \Big[3\{f(x+2)\}^2 - 12f(1)f(x)\Big]_1^5 \\ &= 3\{f(7)\}^2 - 12f(1)f(5) - 3\{f(3)\}^2 + 12\{f(1)\}^2 \\ &= 3\{7f(1)\}^2 - 12f(1)\cdot 5f(1) - 3\{3f(1)\}^2 + 12\{f(1)\}^2 \\ &= (147 - 60 - 27 + 12)\{f(1)\}^2 = \underset{=k}{72}\{f(1)\}^2 \end{aligned}$$

2025학년도 7월 고3 학평 수학 풀이 (기하)

2025년 7월 11일 금요일 오후 3:20

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(-6,0)$, $\vec{b}=(k,2)$에 대하여 $\vec{a}+2\vec{b}=(0,4)$일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-6+2k=0$ $\therefore k=3$

24. 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$\frac{1\cdot x}{2}+\frac{2\cdot y}{8}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

$x=0$일 때 $y=4$

25. 좌표평면 위의 세 점 O$(0,0)$, A$(3,4)$, B$(-3,6)$에 대하여 점 P가

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

P(x,y) 라고 하면

$(x-3,\ y-4)\cdot(-3,6)=0$

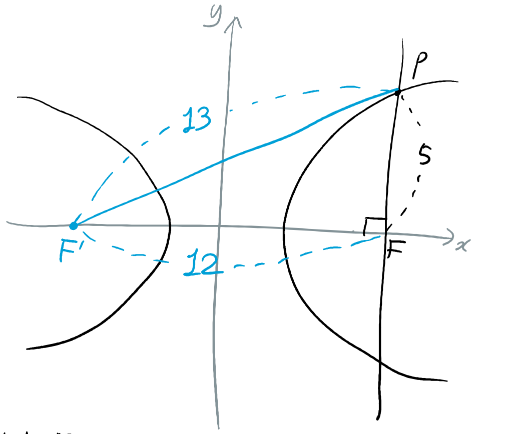
$-3x+6y-15=0 \Rightarrow x-2y+5=0$

$|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값 : 원점 O와 직선 $x-2y+5=0$ 사이의 거리

$\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 F$(c,0)$ $(c>0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=5$일 때, b^2의 값은? (단, b는 양수이다.) [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24



쌍곡선의 두 초점 중 F가 아닌 것을 F'이라 하면

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\times4=8$이므로 $\overline{PF'}=13$

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{F'F}=12$

따라서 $c=\frac{12}{2}=6$이므로 $4^2+b^2=6^2$

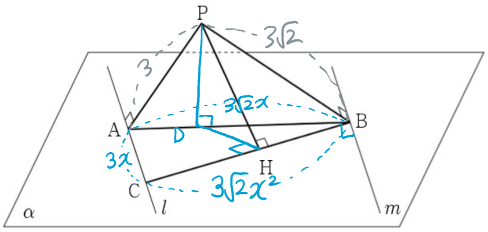
$\therefore b^2=20$

27. 공간에 서로 평행한 두 직선 l, m을 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 두 직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 직선 l 위의 점 C에 대하여 네 점 A, B, C, P가

$$\overline{\mathrm{AP}}=3,\quad \overline{\mathrm{BP}}=3\sqrt{2},\quad \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BA}}}=\frac{\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$$

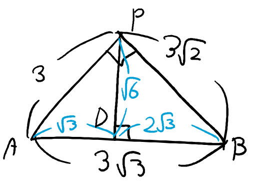
를 만족시킨다. 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ 4

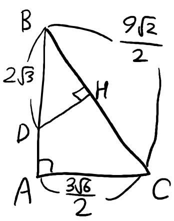


$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{CA}}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{x}$로 두면 위와 같다.

두 직선 l과 m은 직선 AP에 직교하고
직선 BP에도 직교하므로
l과 m은 평면 ABP에 직교한다.
따라서 l과 m은 직선 AB에 직교한다.
삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해
$9x^2+18x^2=18x^4 \quad \therefore x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 D는 선분 AB에 존재 (삼수선의 정리)

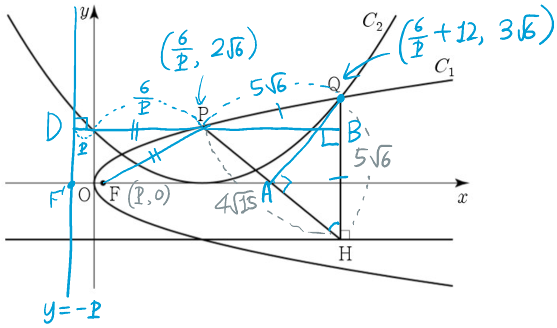


닮음의 성질에 의해
$\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{DH}:\overline{CA}$ 이므로
$\overline{DH}=2$

$\overline{PH}=\underbrace{\sqrt{\overline{PD}^2+\overline{DH}^2}}_{\text{삼수선의 정리}}=\sqrt{6+4}=\sqrt{10}$

28. 양수 p에 대하여 점 F를 초점으로 하는 포물선 $C_1: y^2=4px$가 있다. 포물선 C_1 위에 있는 제1사분면 위의 점 P를 초점으로 하고 꼭짓점이 x축 위에 있는 포물선을 C_2라 하자. 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 Q라 하고, 점 Q에서 포물선 C_2의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{15}$, $\overline{\mathrm{QH}}=5\sqrt{6}$일 때, 선분 PF의 길이는?
(단, 점 P의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.) [4점]

① $\dfrac{389}{40}$ ② $\dfrac{197}{20}$ ③ $\dfrac{399}{40}$ ④ $\dfrac{101}{10}$ ⑤ $\dfrac{409}{40}$



포물선의 성질에 의해 $\overline{PQ}=\overline{QH}=5\sqrt{6}$
삼각형 PQH는 이등변삼각형이므로
점 Q를 선분 PH에 내린 수선의 발 A에 대하여
$\cos(\angle QHP)=\dfrac{\overline{HA}}{\overline{QH}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$
점 P를 선분 QH에 내린 수선의 발 B에 대해
$\overline{BH}=\overline{PH}\cos(\angle QHP)=4\sqrt{15}\times\dfrac{\sqrt{10}}{5}=4\sqrt{6}$
따라서 (점 P의 y좌표) = (점 B의 y좌표) = $2\sqrt{6}$ 이고
점 P는 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로
점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{6}{p},\ 2\sqrt{6}\right)$ 이다.
$\overline{QB}=\overline{QH}-\overline{BH}=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}=\sqrt{6}$ 이고
$\overline{PB}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QB}^2}=\sqrt{(5\sqrt{6})^2-\sqrt{6}^2}=12$ 이므로
점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{6}{p}+12,\ 3\sqrt{6}\right)$ 이다.
이것도 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로 $p=\dfrac{5}{8}$ 이다.
점 P에서 포물선 C_1에 내린 수선의 발 D에 대해
$\overline{PF}=\overline{PD}=p+\dfrac{6}{p}=\dfrac{5}{8}+6\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{409}{40}$

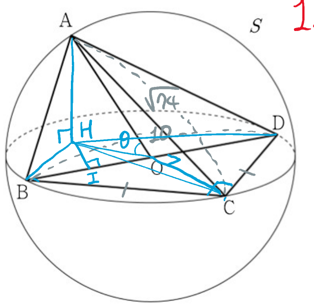
단답형

29. 공간에 점 O가 중심이고 반지름의 길이가 5인 구 S가 있다. 구 S 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가

$$\overline{BC}=\overline{CD},\quad \overline{BD}=10,\quad \overline{AC}=\sqrt{74},\quad \overline{AB}<\overline{AD}$$

를 만족시킨다. 직선 OA와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. 삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. [4점]

12



점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 구하고자 하는 것은 삼각형 HBD의 넓이이다.

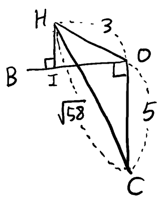
Happy Birthday 아님 >_<

$\overline{OH}=\overline{OA}\cos\theta=5\times\frac{3}{5}=3,$

$\overline{AH}=\overline{OA}\sin\theta=5\times\frac{4}{5}=4$ 이다.

그리고 피타고라스 정리에 의해

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{74-16}=\sqrt{58}$ 이다.



제2코사인법칙에 의해

$\overline{CH}^2=\overline{OH}^2+\overline{OC}^2-2\cdot\overline{OH}\cdot\overline{OC}\cdot\cos(\angle HOC)$

$58=34-30\cos(\angle HOC)$

$\therefore\ \cos(\angle HOC)=-\frac{4}{5}$

따라서

$\sin(\angle HOB)=\sin\left(\angle HOC-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(\angle HOC)=\frac{4}{5}$ 이다.

점 H를 직선 BD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{HI}=\overline{OH}\times\cos(\angle HOB)=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$

이므로 삼각형 HBD의 넓이는

$\triangle HBD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{HI}=\frac{1}{2}\times10\times\frac{12}{5}=12$

30. 좌표평면에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{4}$인 평행사변형 ABCD가 있다.

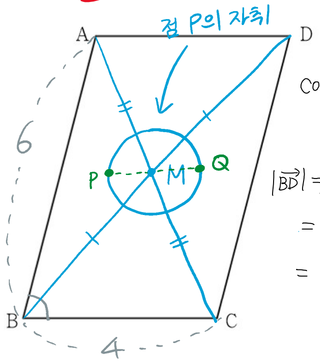
$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$$

를 만족시키는 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$$

를 만족시키는 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 최댓값을 구하시오. [4점]

25



$\cos(\angle BCD)=\cos(\pi-\angle ABC)$
$=-\cos(\angle ABC)=-\frac{1}{4}$

$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2-2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CD}|\cos(\angle BCD)}$
$=\sqrt{4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}$
$=\sqrt{64}=8$

평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점(무게중심)을 M이라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PD}\right)$

$=4\overrightarrow{PM}$ 이다.

즉, $4|\overrightarrow{PM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$ 이므로 $|\overrightarrow{PM}|=\frac{1}{8}|\overrightarrow{BD}|$ 인데,

$|\overrightarrow{BD}|$를 제2코사인법칙으로 구하면 8이다.

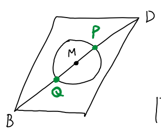
따라서 점 P의 자취는 중심이 M이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})-\overrightarrow{MP}$

$=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MP}$

이므로 $\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MP}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{MQ}=-\overrightarrow{MP}$ 이다.

즉, 점 Q도 점 P와 같은 자취를 갖지만, 점 P와는 반대편에 있다.



$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값이 최대가 되기 위해서는 점 P와 Q가 왼쪽 그림처럼 있으면 된다.

$|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{DQ}|=\underbrace{4}_{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|}+\underbrace{1}_{\text{원 반지름}}=5$ 이며,

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}$가 이루는 각의 크기는 0이므로

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}=5\times5\times\cos0=25$