제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[4]{3} \times 3^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 3^1$

2. 함수 $f(x) = x^3 + x$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$f'(1) = (3x^2+1)|_{x=1} = 4$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 \times a_{13} = 64, \quad \frac{a_5}{a_2} = 2$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$(a_7)^2 = 64, \quad a_7 = 8$

$r^3 = 2$

$\therefore a_4 = 4$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 5 & (x < 2) \\ ax + 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$8a-5 = 2a+1$

$6a = 6$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=5$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1)f(x) = 2f(1)=10$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$c^2+s^2+2sc=\frac{1}{5}$ $sc=-\frac{2}{5}$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

① 값대입 $f(1)=1$ …ⓐ

② 미분 $\cancel{f(x)}=\cancel{f(x)}+xf'(x)-3x^2$

$f'(x)=3x$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ (∵ⓐ)

$f(2)=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

8. 1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여

$$\log_2 a+\log_4 ab=\frac{5}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\log_4(a^3b)=\frac{5}{2}$

$a^3b=32$

$a=2,\ b=4$

9. 이차함수 $f(x)$가 $\int_{-1}^{1}f'(x)dx=0$을 만족시킬 때,

$$f(0)-f(-1)+\int_0^1\{x^2+2x+f'(x)\}dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$f(1)=f(-1)$

∴답 $\cancel{f(0)}-\cancel{f(-1)}+\frac{4}{3}+\cancel{f(1)}-\cancel{f(0)}=\frac{4}{3}$

10. 다음과 같이 $0\le x<2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

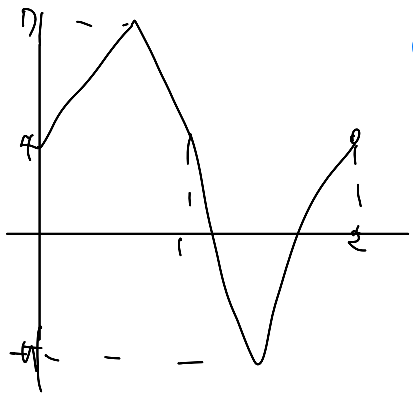
> $n-1\le x<n$일 때, $f(x)=3^n\sin\pi x+4$이다.
> (단, $n=1,\ 2$)

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는? [4점]

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

$0\le x<1$ $f(x)=3\sin\pi x+4$

$1\le x<2$ $f(x)=-9\sin\pi x+4$



$2\times 6+1=13$
$1\le y\le 6$ $k=7$

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치가 각각

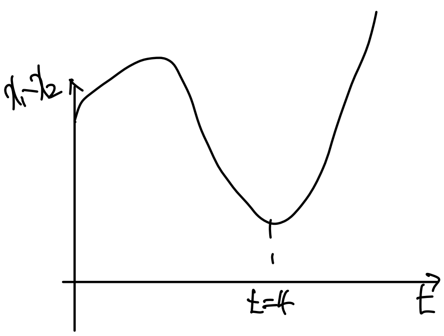
$$x_1 = t^3 - 5t^2 + 10t, \quad x_2 = \frac{5}{2}t^2 - 2t - 10$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

$x_1 - x_2$: $t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 10$

$v_1 - v_2$: $3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4)$



∴ 이외해 순간 : $t=4$

$v_1 = 3t^2 - 10t + 10$

$a_1 = 6t - 10 \quad a_1(4) = 14$

12. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + b_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $b_9 - b_3 = 27$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 100 ② 145 ③ 190 ④ 235 ⑤ 280

b_n : $b_3 \to b_4$ 갈때 a_3
$b_6 \to b_7$ 갈때 a_6 을 더함
나머지 1

$b_9 - b_3 = 4 + a_3 + a_6 = 6 + 7d = 27 \quad d = 3$

$a_1 = 1 \quad a_{10} = 28 \quad S_{10} = 145$

13. 함수 $f(x)=x^2-4x+5$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

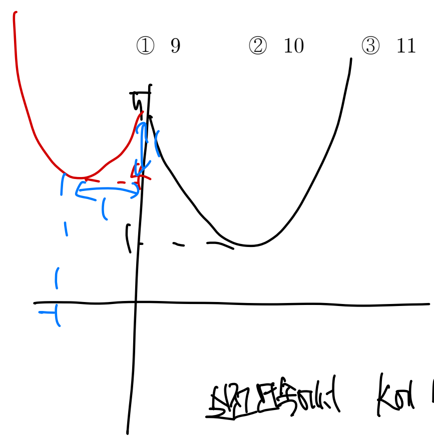
$$g(x)=\begin{cases} f(x+a)+b & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t)-\lim_{t\to k-} h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 1, 4, 5일 때, $g(-4)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13 ✓



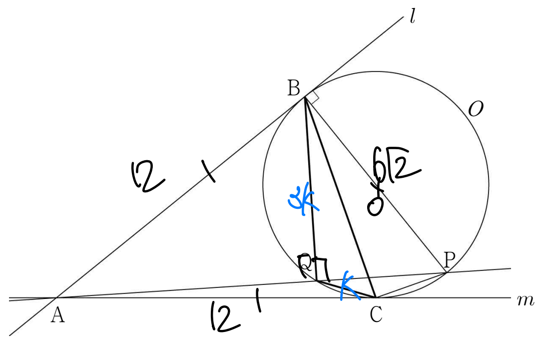
실제 연속에서 k에 4가 추가로 존재하려면

f(x+a)+b의 극값이 4여야 한다.

at x<0

$g(x)=(x+1)^2+4$ $g(-4)=13$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 O의 외부에 있는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 원 O와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 O와 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P, 직선 AP가 원 O와 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 $\overline{AB}=12$일 때, $\sin(\angle BPQ):\sin(\angle QPC)=3:1$이다. 삼각형 BQC의 넓이는? [4점]



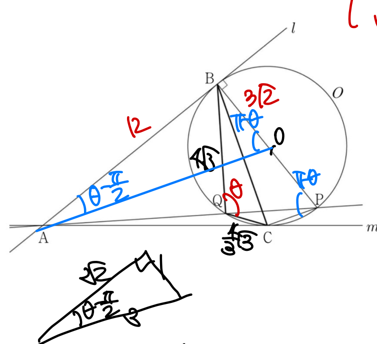
① $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ✓ ③ $6\sqrt{2}$
④ $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{22\sqrt{2}}{3}$

원 접선 수직직선 → 중심지남. $\angle BQC=\frac{\pi}{2}$

닮음에 의해 $3k=4\sqrt{3}$, $k=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

sin(∠BPQ):sin(∠QPC)=3:1이다. 삼각형 BQC의 넓이는? [4점]

Agenda: "sinθ"



$\sin(\theta-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$S=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

15. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-x^2 & (x\le 0) \\ \{f(x)\}^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 음의 실근을 갖는다.

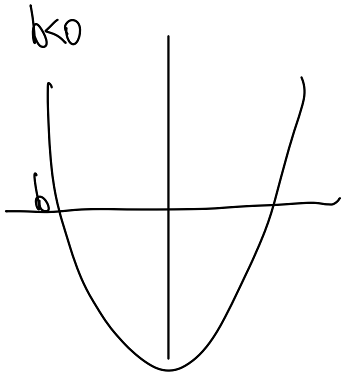
$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

V ① $\frac{183}{2}$ ② $\frac{187}{2}$ ③ $\frac{191}{2}$ ④ $\frac{195}{2}$ ⑤ $\frac{199}{2}$

$(f(x))^2+x^3$은 t_x 미가이므로 $b\le 0$

$b=0$이면 $|x^2+ax|-x^2$가 $x<0$에서 실근가짐 and (나)(가) 동시충족X

$b<0$



$ax+b$ $x\le b$

$-2x^2-ax-b$ $b\le x\le 0$

$(f(x))^2+x^3$ $x>0$

V 0에서 연속

$-b=b^2$. $b=-1$ $(b<0)$

V 0에서 미가

$-a=2f(0)f'(0)$

$a=0$ (b에의 결정됨)

단답형

16. 방정식

$$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>-1$ ··⑦

$x^2+2x+1=x+7$

$(x+3)(x-2)=0$ $x=2$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+1$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3+x+2$ $f(1)=5$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & x\le -1 \\ -2x^2+1 & -1\le x\le 0 \\ (x^2-1)^2+x^3 & x>0 \end{cases}$$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $g(3)=64+27=91$ 답: $\frac{183}{2}$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)=150,\quad \sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)=330$$

이다. $a_1=3$일 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=2}^{20} a_k = A$

$\sum_{k=1}^{19} b_k = B$

$2A-B=150$

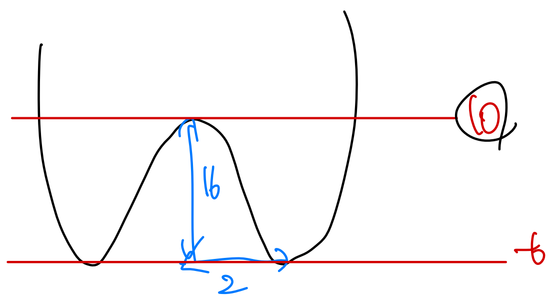
$A+B=330$

$3A=480$

$A=160$

$3+160=163$

19. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]



10

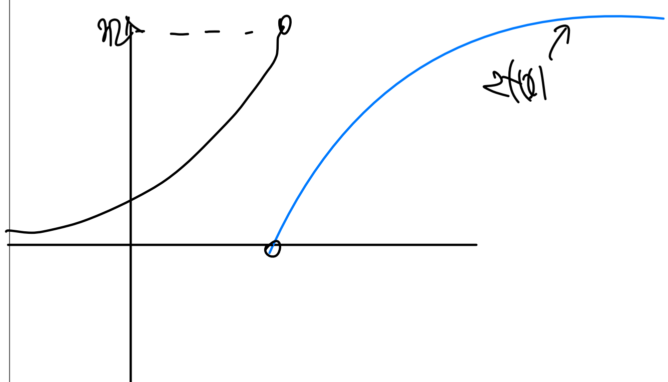
20. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=-2^{-x+a}+b$가 있다. 집합 $\{x \mid x\neq 4,\ x\text{는 실수}\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+2^x+\frac{|x-4|}{x-4}\{f(x)-2^x\}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 0 또는 2이다.

$g(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & x>4 \\ 2f(x) & x<4 \end{cases}$



at $x>4$. $g(x)=2f(x)=-2^{-x+k}+32$

극한에서 $f(4)=0$. $k=9$

$g(x)=-2^{-x+9}+32$ $(x>4)$

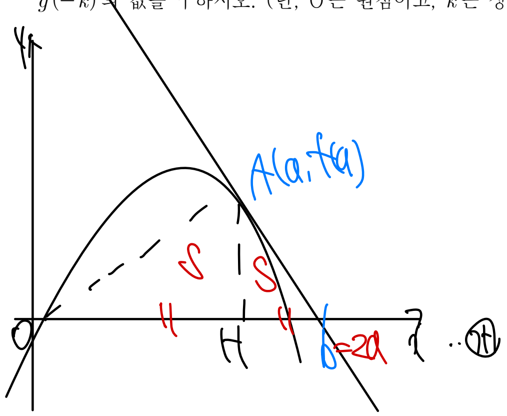
$g(6)=-2^3+32=24$

21. 함수 $f(x)=-x^2+kx\ (k>0)$ 의 그래프 위에 있는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))\ \left(a>\dfrac{k}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하고, 직선 $y=g(x)$ 의 x 절편을 b 라 하자. 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 삼각형 AOH 의 넓이를 S 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$

(나) $\displaystyle\int_0^a \left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx=\frac{32}{3}$

$g(-k)$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, k 는 상수이다.) [4점]



접선: $y=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka$ ✓ $(2a, 0)$

$0=-2a^2+ka-a^2+ka \quad 3a^2=2ka \quad k=\frac{3}{2}a$

$\int_0^a -x^2+kx-\frac{1}{2}ax = \frac{32}{3}$

$-\frac{1}{3}a^3+\frac{k}{2}a^2-\frac{1}{4}a^3=\frac{32}{3}$

$-\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{4}a^3-\frac{1}{4}a^3=\frac{1}{6}a^3=\frac{32}{3} \quad a=4\ \ k=6$

$g(x)=-2(x-4)+8=-2x+16 \quad g(-6)=28$

22. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6=6$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) 네 항 a_2, a_3, a_4, a_5 중 짝수인 항의 개수는 1 이다.

$a_6=6$을 만드는 앞항을 기준으로 Case분류

i)

1	2	3	4	5	6
	홀	짝	홀	홀	6
	x	10	1	5	
	x	6	3	3	
4	3	2	5	1	

ii)

1	2	3	4	5	6
	홀	홀	12	홀	6
22	1	11	12		
18	3	9			
14	5	7			
10	7	5			
6	9	3			
2	11	1			

모든 a_1합: $4+24\times3=76$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \sin t, \quad y = -4\cos t + 2\sin^2 t$$

에서 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\sin t + 4\sin t \cos t}{1+\cos t} = 4\sin t$

$(4\sin t)\big|_{t=\frac{\pi}{3}} = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

25. $x>0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^{n}+1}$$

일 때, $f(k)=5$ 를 만족시키는 모든 양수 k 의 값의 합은? [3점]

① $\frac{51}{2}$ ② $\frac{53}{2}$ ③ $\frac{55}{2}$ ④ $\frac{57}{2}$ ⑤ $\frac{59}{2}$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x<5 \\ 10 & x=5 \\ \frac{x}{5} & x>5 \end{cases}$$

$k=\frac{5}{2},\ 25$ 합 $\frac{55}{2}$

26. 양수 t 에 대하여 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$ 와 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기를 $f(t)$ 라 할 때, $\int_1^e f(t)dt$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$ ④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

$f(t)=\frac{\frac{\ln t}{t}-1}{t}=\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}$

$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}$

$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^e+\int_1^e \frac{1}{t}\times\frac{1}{t}+\left[-\ln t\right]_1^e$

$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^e-1$

$=-\frac{2}{e}$

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 실수 $k\,(k \neq 0)$에 대하여 $f(3-2k)=f(3)$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\frac{f(x)+k}{e^{f(x)}}$$

가 $x=3$에서 극대이고 $g(3)=e$일 때, $g(k)$의 값은? [3점]

① $-2e^6$ ② $-3e^5$ ③ $-2e^5$ ④ $-3e^4$ ⑤ $-2e^4$

V

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}-f'(x)e^{f(x)}(f(x)+k)}{e^{2f(x)}}$$

$$=\frac{f'(x)e^{f(x)}}{e^{2f(x)}}(1-f(x)-k)$$

$f(3)=1-k$

$g(3)=\frac{\cancel{f(3)+k}}{e^{f(3)}}=e \quad f(3)=-1,\ k=2$

$f(-1)=f(3)=-1 \quad f(x)=(x+1)(x-3)-1$

$g(2)=\frac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=\frac{-2}{e^{-4}}=-2e^4$

접점: S (t에 대한 함수)

v $-s^2+2s+h(t)=ts+k$ ⇒ $h(t)=-s^2+f(g(t))-tg(t)$

v $-2s+2=t$ ⇒ $h'(t)=-2s\frac{ds}{dt}+\cancel{f'(g(t))g'(t)}$ $\cancel{-tg'(t)}-g(t)$

v $f(g(t))=tg(t)+k$

v $f'(g(t))=t$

⇒ $h'(1)+g(1)=\frac{1}{2}$

$t=1 \quad s=\frac{1}{2}$

$-2ds=dt$

$\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{2}$

28. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(-x)}{x} & (x<0)\\ -x^2+2x+a & (x \geq 0)\end{cases}$$

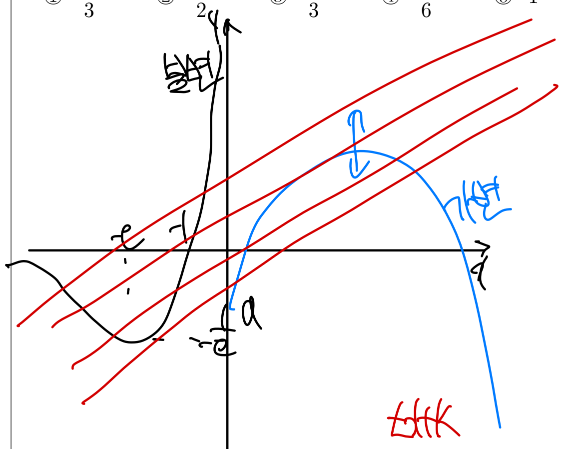
이다. 실수 $t\,(0<t<2)$에 대하여 $f'(x)=t$를 만족시키는 음수 x의 값을 $g(t)$라 하고, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a의 값을 $h(t)$라 하자.

$k \geq a$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$g(1)+h'(1)$의 값은? (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$) [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

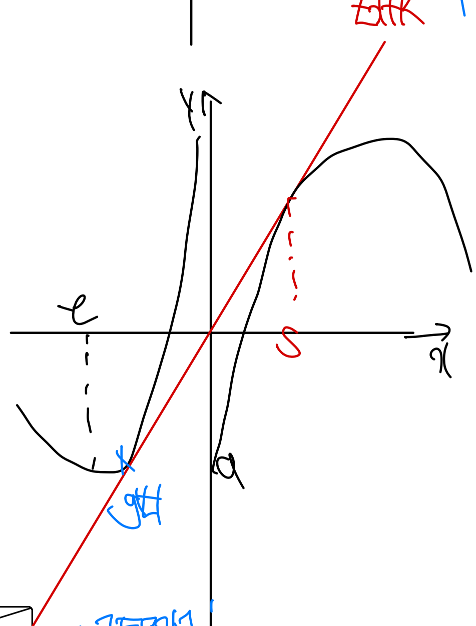
V



y절편이 a 이상인

모든 기울기 t인 직선

∴ 교점 2



#Note

한편, $f'(x)=\frac{1-\ln(-x)}{x^2}$ $(x<0)$

이때 $\frac{1-\ln(-x)}{x^2}=1$ 만족 실근은

$x=-1$로 유일 ⋯ $g(1)=-1$

$h(1)=\frac{3}{2}$

조절 가능하다.

v 공통접선

t변화 → S변화 → a변화

#t에 대한 함수

단답형

29. 첫째항이 자연수이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n+1|-a_n-1)=26$$

16

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

|A|-A는 A의 음수부분의 크기×2 로 이해할 수 있다. (feat: 250619(112a))

따라서 "a_n+1" 의 음수부 합이 -13이다.

1	2	3	4	5
A	$-\frac{A}{2}$	$\frac{A}{4}$	$-\frac{A}{8}$	
	$-\frac{A}{2}+1$		$-\frac{A}{8}+1$	

이때 음수부합이 -8보다 작은 정수이므로 A은 8의 배수여야 한다.

1	2	3	4	5
8	-4	2	-1	
	-3			

-3

16 -8 4 -2 1 -8

-7 -1

24 -12 6 -3 -13

-11 -2

A이 더 커지면 음수합은 증가한다.

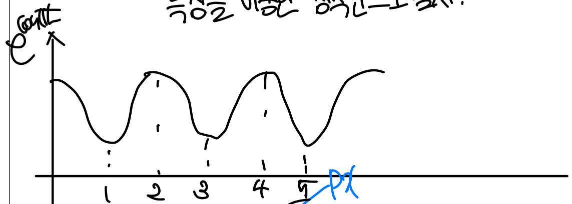
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1+\frac{1}{2}} = 16$

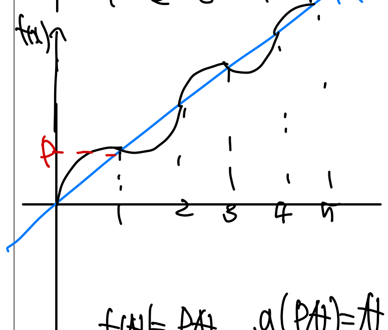
30. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{\cos \pi t}dt$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$h(g(x)+2)=2x^3+6f(1)x^2+1$$

을 만족시킨다. $\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=k\times\{f(1)\}^2$ 일 때, 실수 k 의 값을 구하시오. [4점]

#Guide $e^{\cos\pi t}$를 적분하는 것이 마땅치 않으니 식의 의미를 잘 살려 특징을 이용한 정적분으로 풀자.





$f(A)=PA$, $g(PA)=A$

따라서 $h'(g(x)+2)\times g'(x)=6x^2+12Px$

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=\int_P^{5P}\frac{h'(g(t)+2)\times g'(t)}{f(g(t)+2)}dt$$

$x=g(t)+2$

이때 $f(x+2)=f(x)+2P$ 이므로

$f(g(x)+2)=f(g(x))+2P=x+2P$

$$\int_3^7 \frac{h'(x)}{f(x)}dx=\int_P^{5P}\frac{6t^2+12Pt}{t+2P}dt=\int_P^{5P}6t\,dt=\left[3t^2\right]_P^{5P}=72P^2=kP^2$$

$k=72$