2025 고려대 수리논술 오후 풀이

orbi 컴싸한자루로수능보기

1-1

매계변수 미분을 통해서 $\frac{dy}{dx} = -2\tan(t)$ 을 얻는다.

이때, 어떤 t에 대해서 접선의 x절편을 구하는 공식은 $x(t) - \frac{y(t)}{\frac{dy}{dx}}$ 이다.

(#note: 일반적인 함수의 경우는 $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$)

그러므로 우리는

$a = \frac{1}{2} = \cos^3(t_0) - \frac{2\sin^3(t_0)}{-2\tan(t_0)}$ 를 만족하는

t_0 또는 그때의 삼각함수 값을 찾아야 한다.

위 식을 변형하면 $a = \cos^3(t_0) + \sin^2(t_0)\cos(t_0) = \cos(t_0)\ \left(\because \sin^2(t_0) = 1 - \cos^2(t_0)\right)$

$\cos(t_0) = \frac{1}{2}, \sin(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 얻는다.

$\therefore \ell_a : y = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

1-2

탄젠트가 결국 기울기를 의미함을 이용하면, $\tan(g(a)) =$ 접선 기울기 x -1 이다.

즉, $2\tan(t) = \tan(g(a))$ 이다.

1-1 에서 구한 $a = \cos(t)$ 를 이용하자, (#note: a 는 t 에 대한 함수이다.)

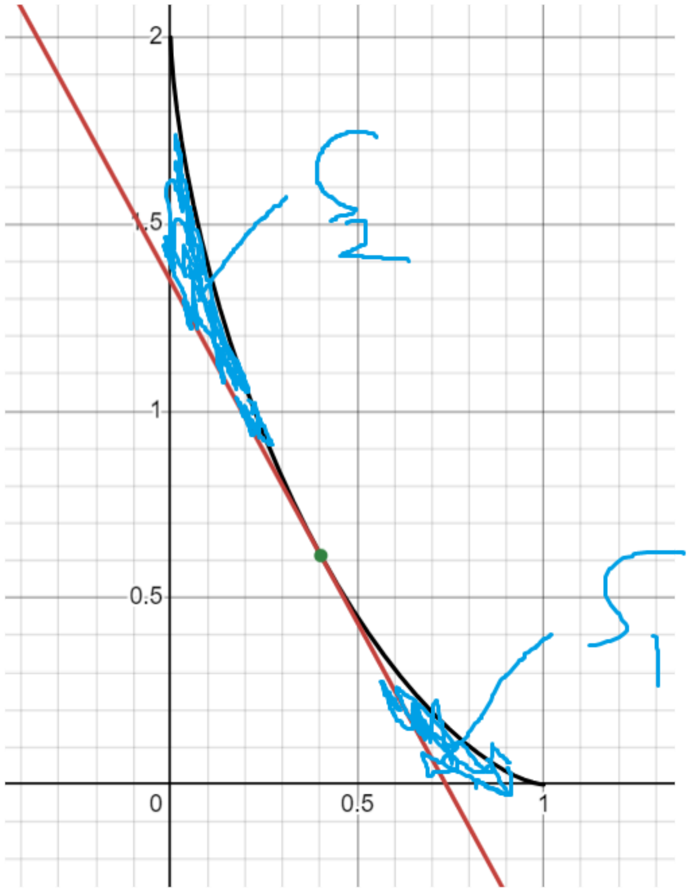
$a^3\tan(g(a)) = 2\cos^3(t)\tan(t) = 2\cos^2(t)\sin(t) = 2\sin(t) - \sin^3(t)$ 이다.

함수 $u(x) = 2x - x^3$ 을 생각하자, 이때 $\sin(t)$ 의 범위인 $0 \leq \sin(t) \leq 1$ 에 맞춰 생각하면

$u(\sin(t))$의 최대값은 극점인 $\sin(t) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일때이므로 정답은 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

1-3

ℓ_a 는 $(0, 2\sin(t)), (\cos(t), 0)$ 을 지나므로 삼각형의 넓이는 $\sin(t) \times \cos(t)$ 이다.



즉, s1+s2 = 함수넓이 - 삼각형 넓이

상수

sin(t)*cos(t)

이거가 최소인 상황 =
sin(t)cos(t) 가 최대인
상황

이때 $\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$ 이므로 $0 \le 2t \le \pi$ 에서 $\frac{1}{2}\sin(2t)$ 가 최소인 상황은 $2t = \frac{\pi}{2}$ 일때이므로 $a = \cos(t)$ 에 의해 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

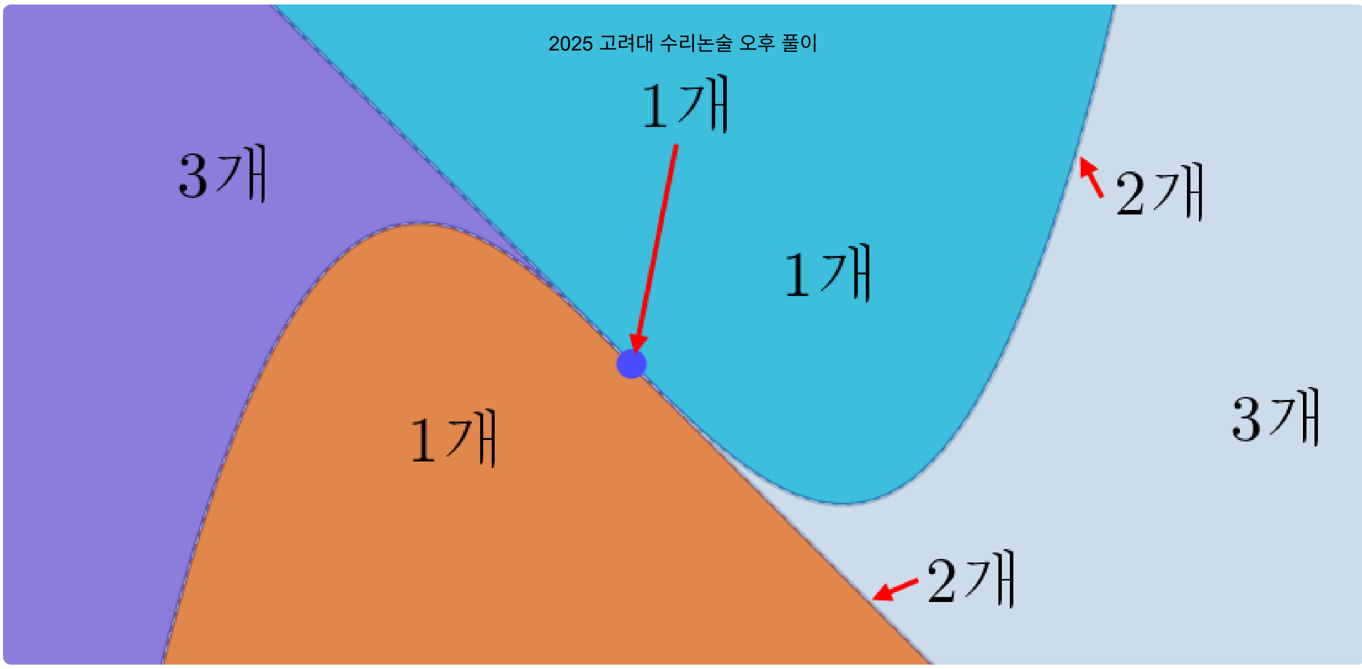
(#note: 함수넓이 $= \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} y\,dx = \int_{x=0(t=\frac{\pi}{2})}^{x=1(t=0)} y\frac{dx}{dt}\,dt$ 을 이용해서 함수넓이를 구하는 발상도 알아두자.)

2-1

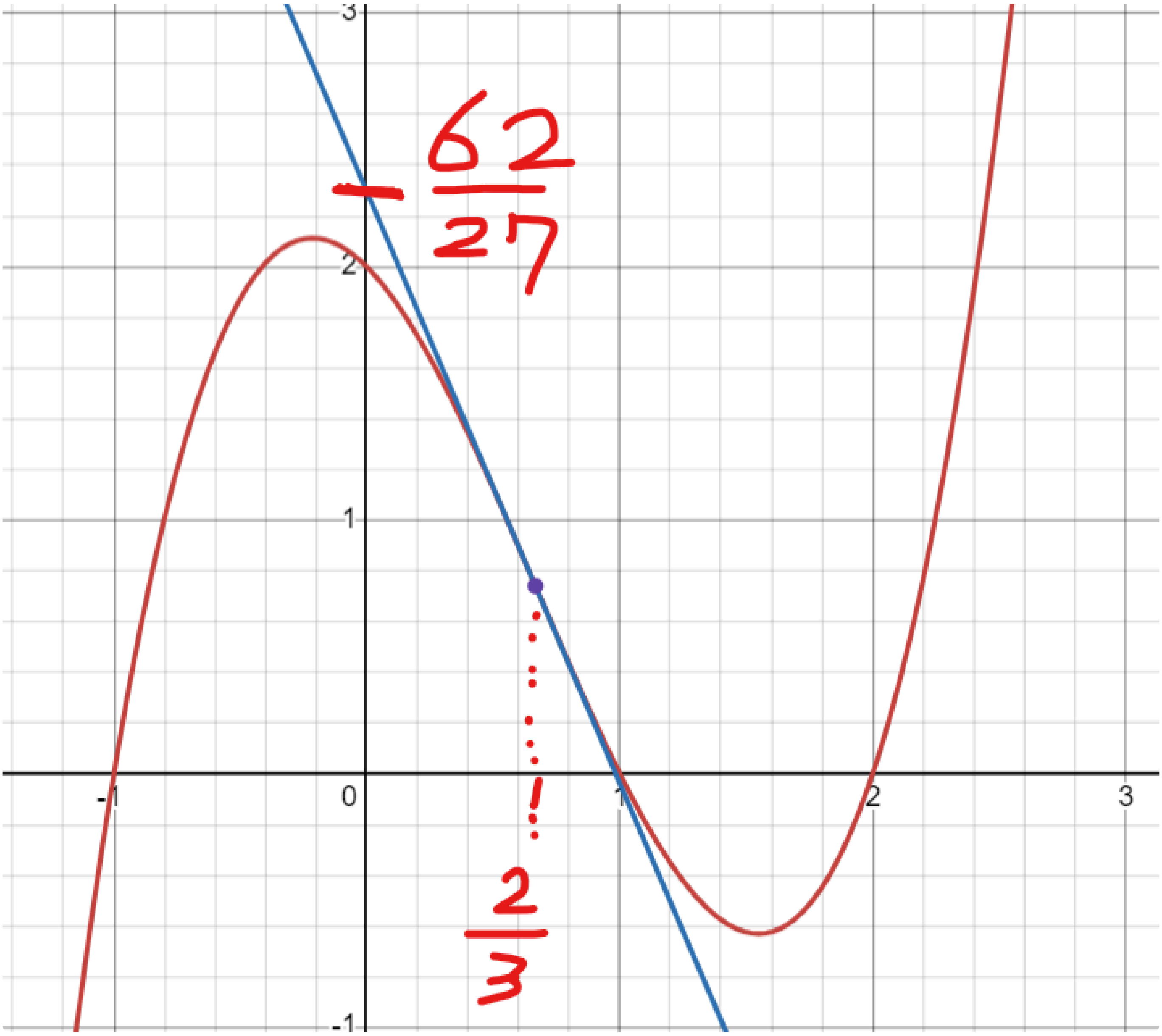
논술이고 뭐고 수능식으로 풀어버리자, (시간이 없다!)

by 가) and 나), $f(x) = a(x^3 - 2x^{2}) - x + 2$ 를 얻는다.

(#note: 대부분 나)를 풀때 $g'(x)$ 의 극한을 이용해 풀지만, **서술할때는 무조건 미분계수의 정의를 이용해서 푼 "척" 해야한다**)



3차함수의 접선개수를 이용하면,



해당 변곡접선을 가지려면 $a = 1$

$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

(#note: 결국 서술하려면 예시답안처럼 접선식을 세워 접점의 개수를 봐야하지만, 일반적인 곡선의 경우는 공통접점등으로 인해 문제가 생긴다, 이때는 "가능한 접선의 기울기의 개수"를 보면 그을수 있는 접선의 개수가 나온다.)

2-2

2-1 에서 구한대로, $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$ 이다.

정적분의 정의를 이용하면, $F'(x) = |f(x)|$ 이다,

즉, $\int_0^2 f(x)e^{F(x)}\,dx = \int_0^1 e^{F(x)}\frac{dF}{dx}\,dx + \int_1^2 -e^{F(x)}\frac{dF}{dx}\,dx$

by 치환적분, 구해야 하는 값은,

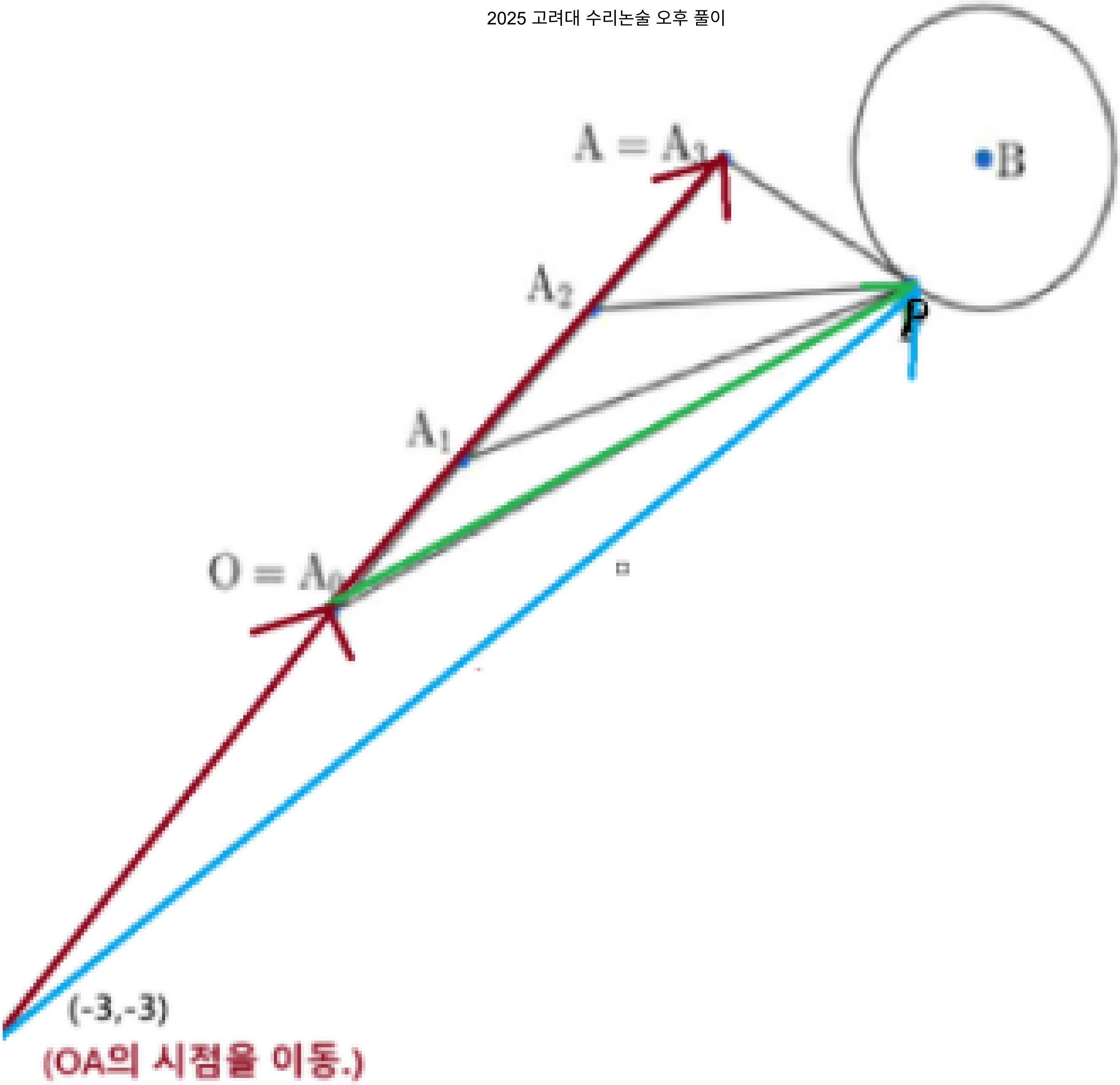
$[e^{F(x)}]_0^1 - [e^{F(x)}]_1^2 = 2e^{F(1)} - e^{F(2)} - 1$ ($\because F(0) = 0$)

이때, $F(1) = \frac{13}{12}, F(2) = \frac{3}{2}$ 이므로,

정답은 $2e^{\frac{13}{12}} - e^{\frac{3}{2}} - 1$

(#note: 빨리 풀려면 넓이 공식을 사용해야 한다, 하지만 서술시에는 정직하게 구간을 나눠 적분을 계산한 "척" 해야한다.)

3-1



해당 그림처럼 tip-to-tail 으로 백터를 더하니까, 결국 구해야 하는 값은 (-3,-3)에서 P 까지 거리의 최소의 제곱이다.
점 B(5,3) 과 (-3,-3) 사이의 거리는 10이고, 원의 반지름이 1 이므로, 최소거리는 9이다, 그러므로 정답은 81 이다.

(#note: 예시답안처럼 내적으로 풀면 계산파티로 장렬히 사망할수 있다.)

이 순간의 P의 좌표도 쉽게 구할수 있다. (-3,-3)과 점 B를 이은 직선과 원의 교점 중 가까운 점을 구한다.

해당 직선은 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ 이므로, $(x-5)^2+(y-3)^2$=1 과의 교점을 찾으면,

P의 좌표는 $(\frac{21}{5},\frac{12}{5})$ 이다.

3-2

$A_1 : (1,1)$, $A_2 : (2,2)$ 이다.

일단 구하라는 값의 백터들의 시점을 통일하자,

$$\overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_1} + 4(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_2}) + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_3}$$

이를 좌표를 이용해 정리하면,

$$= 6\overrightarrow{OP} - (12,12) = 6\left(\overrightarrow{OP} - (2,2)\right)$$

즉, 우리는 점 (2,2) 와 점 P 사이의 거리의 최소를 찾으면 된다.

점 B와 (2,2) 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이고, 원의 반지름은 1 이므로,

최소 거리는 $\sqrt{10} - 1$ 이다 이에 6을 곱하고 제곱하면

$396 - 72\sqrt{10}$ 이므로, 정답은 $(396, -72)$ 이다.

4-1

일단 파랑 2, 노랑 3, 진홍 6개 중에서 4개 뽑는 경우의 수를 찾아야 한다.

우선 파랑, 노랑, 진홍이 얼마나 있냐를 생각하지 말고, 4개를 뽑는 경우의 수는

파랑 α ,노랑 β, 진홍 γ 개 뽑는다고 생각하면,

$\alpha + \beta + \gamma = 4$ (α, β, γ 는 범자연수) 에서 가능한 순써상 (α, β, γ) 의 수와 같으므로,

${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$ 이다.

하지만 여기서는 (3,1,0) 같은 불가능한 경우(파랑이 2까지니까) 들도 포함했으므로.

파랑 $3 + \alpha'$ 개 뽑거나 , (0,4,0) 인 경우만 제거하면 된다.

그러므로, $3 + \alpha' + \beta + \gamma = 4$ (α', β, γ 는 범자연수) 인 경우의 수는

${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$ 이고, 여기서 (0,4,0) 인 경우도 추가하면 4개의 경우를 빼야한다는 결과가 나온다.

그러므로 정답은 15-4=11

4-2

결국 위의 문제를 풀면서 했던 사고를 이용해야 한다.

일단 파랑 n, 노랑 $2n-1$, 진홍 $2n+2$ 개 중에서 $2n$ 개 뽑는 경우의 수를 찾아야 한다.

우선 파랑, 노랑, 진홍이 얼마나 있냐를 생각하지 말고, $2n$ 개를 뽑는 경우의 수는

파랑 α ,노랑 β, 진홍 γ 개 뽑는다고 생각하면,

$\alpha+\beta+\gamma=2n$ (α,β,γ 는 범자연수) 에서 가능한 순써상 (α,β,γ) 의 수와 같으므로,

${}_3H_{2n} = {}_{2+2n}C_{2n} = {}_{2+2n}C_2$ 이다.

하지만 여기서는 $(n+1,1,n-2)$ 같은 불가능한 경우(파랑이 n 까지니까) 들도 포함했으므로.

파랑 $n+1+\alpha'$ 개 뽑거나 , $(0,2n,0)$ 인 경우만 제거하면 된다.

그러므로, $n+1+\alpha'+\beta+\gamma=2n$ (α',β,γ 는 범자연수) 인 경우의 수는

${}_3H_{n-1} = {}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+1}C_2$ 이고, 여기서 $(0,2n,0)$ 인 경우도 추가하면 ${}_{n+1}C_2+1$개의 경우를 빼야 한다는 결과가 나온다.

그러므로 $a_n = {}_{2+2n}C_2 - {}_{n+1}C_2 - 1 = \frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n$ 이다.
(#note: $n=1$ 일 때 해당 식이 성립하는지 확인해 보자.)

4-3

$a_n+8n+15=\frac{3}{2}n^2+\frac{21}{2}n+15$ 이다.

(#note: $\frac{1}{이차식}$ 의 합은 결국 텔래스코핑이다.)

$a_n+8n+15=\frac{3}{2}n^2+\frac{21}{2}n+15=\frac{3}{2}(n+2)(n+5)$

$\frac{1}{a_n+8n+15}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+5}\right)$ 이다.

즉, 구해야 하는 값은, $\frac{2}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+5}\right)$ 이다.

그러므로 정답은 $\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{47}{270}$