제 2 교시

수학 영역 (미적분)

25. [2025년 6월 (미적분) 25번]

양수 a에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{a}{n}-3}{1}+\frac{a+\frac{6}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)$$

$$=-3+a$$

$$\therefore\ a=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)=S$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n}-3+\frac{3(n+3)-3}{n+3}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{3}{n+3}\right)=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=3\times\frac{6+3+2}{6}=\frac{11}{2}$$

$$\therefore\ a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$$

26. [2025년 6월 (미적분) 26번]

함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $a+f'(g(a))$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

역함수의 미분 개념에 의하여

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ f'(g(a))=8$$

$$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}=8$$

$$\Leftrightarrow\ 3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}-8=0$$

$$\Leftrightarrow\ (e^{x}-2)(3e^{2x}+4)=0$$

$$\therefore\ e^{x}=2,\ x=\ln 2$$

$$\therefore\ g(a)=\ln 2$$

역함수 개념에 의해 $f(\ln 2)=a$

$$\therefore\ f(\ln 2)=(e^{\ln 2})^{3}-3(e^{\ln 2})^{2}+4e^{\ln 2}$$

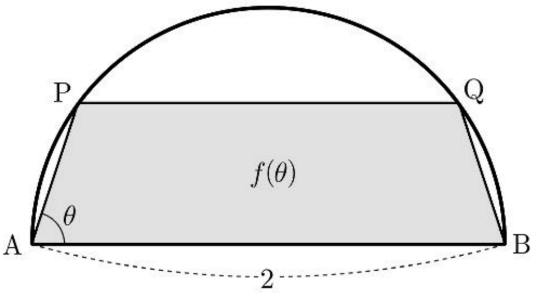
$$=2^{3}-3\cdot 2^{2}+4\cdot 2=4=a$$

$$\therefore\ a+f'(g(a))=4+8=12$$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

27. [2025년 6월 (미적분) 27번]
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1 : 3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]

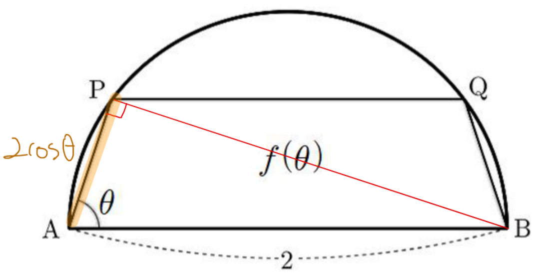


① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$
④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

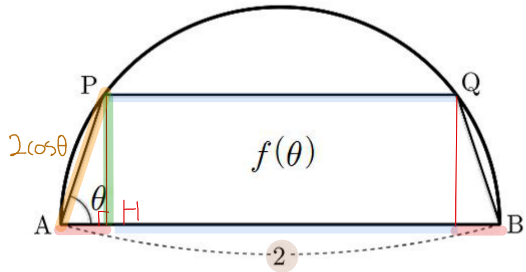
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

□ABQP이 등변사다리꼴이므로
$f(\theta) = \frac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{PQ}}) \times \overline{\mathrm{PH}}$

(step1) 변의 길이 구하기



$\overline{\mathrm{AB}}$는 지름이므로 $\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$



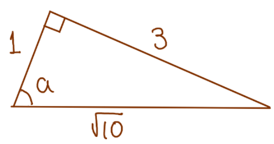
점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때
$\overline{\mathrm{PH}} = 2\cos\theta \times \sin\theta$
$\overline{\mathrm{AH}} = 2\cos\theta \times \cos\theta = 2\cos^2\theta$

□ABQP는 등변사다리꼴이므로
$\overline{\mathrm{PQ}} = 2 - 2 \times 2\cos^2\theta = 2 - 4\cos^2\theta$

(step2) $f'(\theta)$ 구하기
□ABQP의 넓이
$f(\theta) = \frac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{PQ}}) \times \overline{\mathrm{PH}}$
$= \frac{1}{2} \times (2 + 2 - 4\cos^2\theta) \times 2\cos\theta\sin\theta$
$= 4(1 - \cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta$
$= 4\sin^3\theta\cos\theta$

$f'(\theta) = 12\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^4\theta$

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1 : 3$일 때 $\theta = a$



$\therefore \sin a = \frac{3}{\sqrt{10}}, \ \cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\therefore f'(a) = 12\sin^2 a\cos^2 a - 4\sin^4 a$
$= 12 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} - 4 \times \frac{81}{100} = -\frac{54}{25}$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

28. [2025년 6월 (미적분) 28번]
실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^{b}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$(f(x))^5+(f(x))^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$
> 이다.
> (나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 사잇값의 정리 활용하기
[개념] 사잇값의 정리
$f(-3)f(3)<0$이므로 $f(\alpha)=0$을 만족시키는
실수 α가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$$g(x)=\{f(x)\}^5+\{f(x)\}^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

$$g'(x)=(5\{f(x)\}^4+3\{f(x)\}^2)f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$g''(x)=(20\{f(x)\}^3+6f(x))\{f'(x)\}^2+(5\{f(x)\}^4+3\{f(x)\}^2)f''(x)$$
$$=-\frac{2(x^2+x-2)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$g''(\alpha)=0=-\frac{2(\alpha^2+\alpha-2)}{\left(\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$\Leftrightarrow$ $\alpha^2+\alpha-2=0$
$\therefore$ $\alpha=1$ or -2

i) $\alpha=1$
$$g'(\alpha)=0+a=\frac{2\cdot1+1}{1+1+\frac{5}{2}}=\frac{2}{3}$$

ii) $\alpha=-2$
$$g'(\alpha)=0+a=\frac{2\cdot(-2)+1}{4-2+\frac{5}{2}}=-\frac{2}{3}$$

$\therefore$ $a=\frac{2}{3}$ or $-\frac{2}{3}$

(Step2) $f'(2)>0$ 활용하기
$$g'(2)=(5\{f(2)\}^4+3\{f(2)\}^2)f'(2)+a=\frac{4+1}{2+2+\frac{5}{2}}$$
⊕ ⊕
$$=\oplus+a=\frac{10}{17}$$

$\therefore$ $\frac{10}{17}-a>0$, $a<\frac{10}{17}$

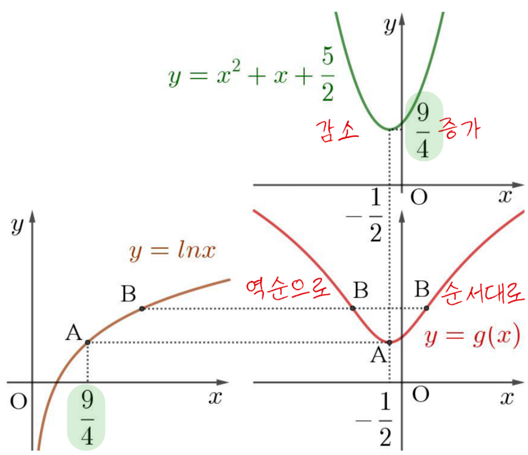
$\therefore$ $a=-\frac{2}{3}$, $\alpha=-2$

$\therefore$ $g(-2)=0+\left(-\frac{2}{3}\right)(-2)+b=\ln\left(4-2+\frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ $b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$

$\therefore$ $a\times e^{b}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times e^{\ln\frac{9}{2}}e^{-\frac{4}{3}}=-3e^{-\frac{4}{3}}$

[참고] $g(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$ 그래프 그리기
[그래프 테크닉] 합성함수 그래프
■ $x>0$ 속함수 증가
→ 합성함수는 겉함수 점 y좌표 순서대로
■ $x<0$ 속함수 감소
→ 합성함수는 겉함수 점 y좌표 역순으로
■ 속함수가 $x=-\frac{1}{2}$ 대칭이면
합성함수도 $x=-\frac{1}{2}$ 대칭



제 2 교시

수학 영역 (미적분)

[다른 풀이]

[개념] 사잇값의 정리

$f(-3)f(3)<0$이므로 $f(\alpha)=0$을 만족시키는

실수 α가 열린구간 $(-3,\,3)$에 적어도 하나 존재한다.

$h(x)=(f(x))^5+(f(x))^3$, $p(x)=ax+b$라고 하자.

$g(x)=h(x)+p(x)$이고

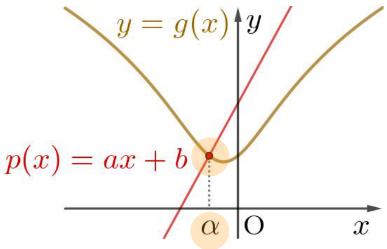
$h(\alpha)=h'(\alpha)=h''(\alpha)=0$이 성립한다.

(step1) $h(\alpha)=0$의 의미

직선 $p(x)=ax+b$는 $g(x)$와 $x=\alpha$에서 만난다.

$g(\alpha)=h(\alpha)+p(\alpha)$

⇔ $g(\alpha)=p(\alpha)$ ($\because$ $h(\alpha)=0$)

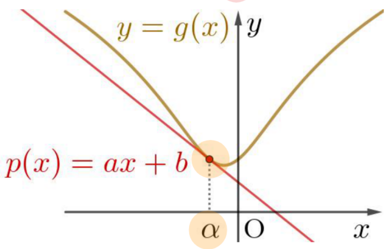


(step2) $h'(\alpha)=0$의 의미

직선 $p(x)=ax+b$는 $g(x)$와 $x=\alpha$에서 접한다.

$g'(\alpha)=h'(\alpha)+p'(\alpha)$

⇔ $g'(\alpha)=p'(\alpha)=a$ ($\because$ $h'(\alpha)=0$)



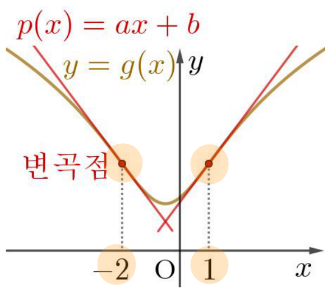
(step3) $h''(\alpha)=0$의 의미

직선 $p(x)=ax+b$는 $g(x)$의 변곡접선이다.

$g''(\alpha)=h''(\alpha)+p''(\alpha)$

⇔ $g''(\alpha)=0$ ($\because$ $h''(\alpha)=0$, $p''(\alpha)=0$)

(식 계산으로 $x=\alpha$에서 $g''(x)$의 부호변화 발생 확인)



$$g(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

$$g'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$g''(x)=-\frac{2(x^2+x-2)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}=-\frac{2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$\therefore$ $\alpha=1$ or -2

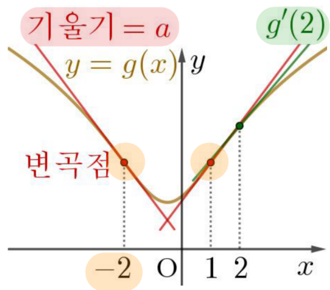
(step4) $f'(2)>0$ 활용하기

$h'(2)=(5\{f(2)\}^4+3\{f(2)\}^2)f'(2)>0$

$g'(2)=h'(2)+p'(2)$

⇔ $p'(2)<g'(2)$ ($\because$ $g'(2)-p'(2)=h'(2)>0$)

⇔ $a<g'(2)$



$\therefore$ $\alpha=-2$

$$\therefore\ a=g'(-2)=\frac{2\cdot(-2)+1}{4-2+\frac{5}{2}}=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ g(-2)=0+\left(-\frac{2}{3}\right)(-2)+b=\ln\left(4-2+\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore\ b=\ln\frac{9}{2}-\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ a\times e^b=\left(-\frac{2}{3}\right)\times e^{\ln\frac{9}{2}}e^{-\frac{4}{3}}=-3e^{-\frac{4}{3}}$$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

29. [2025년 6월 (미적분) 29번]
두 정수 α, β $(\alpha > \beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n = \alpha \times \sin\frac{n}{2}\pi + \beta \times \cos\frac{n}{2}\pi$$
> 이고, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1 > 0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n}) = 6$$

일 때, $b_1 \times b_3 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Analysis

"자연수, 정수" 조건이 나오면
→ 케이스 나열
→ 소거법 (약수배수 관계, 부등식 활용)

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

109

(Step1) 수열 a_n 파악하기

$a_n = \alpha \times \sin\frac{n}{2}\pi + \beta \times \cos\frac{n}{2}\pi$

$a_1 = \alpha \times \sin\frac{1}{2}\pi + \beta \times \cos\frac{1}{2}\pi = \alpha$

$a_2 = \alpha \times \sin\pi + \beta \times \cos\pi = -\beta$

$a_3 = \alpha \times \sin\frac{3}{2}\pi + \beta \times \cos\frac{3}{2}\pi = -\alpha$

$a_4 = \alpha \times \sin 2\pi + \beta \times \cos 2\pi = \beta$

$\therefore\ a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = \alpha^2\beta^2 = 4$

α, β가 정수이고 $\alpha > \beta$이므로 가능한 케이스는
ⅰ) $\alpha = 2,\ \beta = 1$
ⅱ) $\alpha = 2,\ \beta = -1$
ⅲ) $\alpha = 1,\ \beta = -2$
ⅳ) $\alpha = -1,\ \beta = -2$

또한 a_n은 주기가 4인 수열이다.

$a_{4n-2} = a_2 = -\beta$, $a_{4n-3} = a_1 = \alpha$

(Step2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n}) = 6$ 활용하기

급수가 수렴하므로
등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b $(b>0)$,
공비를 r $(-1<r<1)$이라 하면
수열 $\{b_{2n}\}$은 첫째항이 br이고 공비가 r^2인 등비수열

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n) = -\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n = -\beta \times \frac{b}{1-r} = 6$

$\therefore\ b>0$, $1-r>0$이므로 $\beta<0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n}) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n} = \alpha \times \frac{br}{1-r^2} = 6$

$= \frac{\alpha}{-\beta} \times \frac{-\beta \cancel{b}}{\cancel{1-r}} \times \frac{r}{1+r} = \cancel{6}$

$\therefore\ \frac{\alpha}{-\beta} \times \frac{r}{1+r} = 1$

$\therefore\ \frac{r}{1+r} = -\frac{\beta}{\alpha}$

ⅰ) $\alpha = 2,\ \beta = 1$
$\beta < 0$에 모순

ⅱ) $\alpha = 2,\ \beta = -1$
$\frac{r}{1+r} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2r = 1 + r \Leftrightarrow r = 1$
$-1<r<1$에 모순

ⅲ) $\alpha = 1,\ \beta = -2$
$\frac{r}{1+r} = -\frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow r = 2 + 2r \Leftrightarrow r = -2$
$-1<r<1$에 모순

ⅳ) $\alpha = -1,\ \beta = -2$
$\frac{r}{1+r} = -\frac{\beta}{\alpha} = -2 \Leftrightarrow r = -2r - 2 \Leftrightarrow r = -\frac{2}{3}$

$-\beta \times \frac{b}{1-r} = 6$

$\Leftrightarrow\ -(-2) \times \frac{b}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = 6$

$\Leftrightarrow\ b = 5$

$\therefore\ b_1 \times b_3 = b \times br^2 = 25 \times \frac{4}{9} = \frac{100}{9}$

$\therefore\ p + q = 9 + 100 = 109$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

30. [2025년 6월 (미적분) 30번]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
> (나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

25

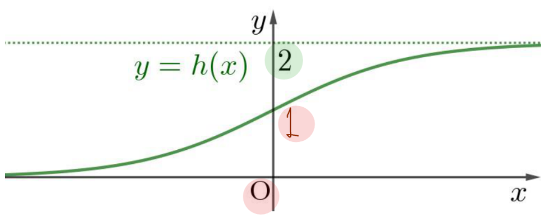
$h(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$, $p(x)=|f(x)|$라고 하자.
$\therefore\ g(x)=p(h(x))$

(step1) 속함수 $h(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 그래프 파악하기

분모 $1+e^{-x}$가 감소함수 → 분수 $\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 증가함수

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=2$이므로

함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(step2) 겉함수 $p(x)=|f(x)|$ 그래프 파악하기

[그래프 테크닉] 합성함수 그래프

속함수 $h(x)$가 단조 증가하고

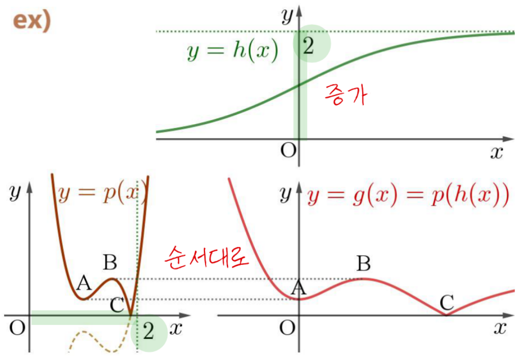
치역이 구간 (0, 2)이므로

합성함수 $g(x)$의 그래프는

겉함수 $p(x)$의 정의역 (0, 2)에 해당하는 점을

순서대로 옮겨 그리면 된다.

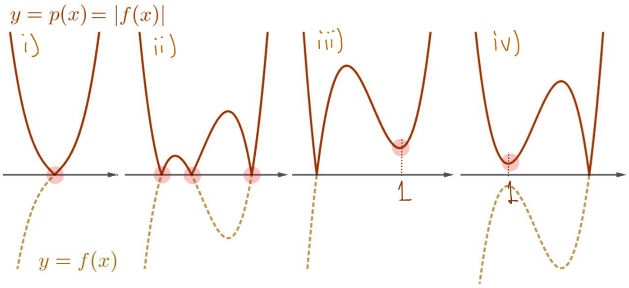
ex)



(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.

⇔ $p(x)$는 $x=1$에서 극소이고 $p(1)>0$이다.

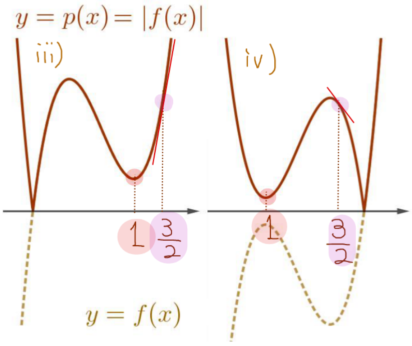
($\because$ $h(0)=1$)



극소=0 ↳ 모순 | 극소=0 ↳ 모순 | 극소>0 존재 | 극소>0 존재

(나) $g'(\ln 3)<0$

⇔ $p'\left(\frac{3}{2}\right)<0$ ($\because$ $h(\ln 3)=\frac{3}{2}$)



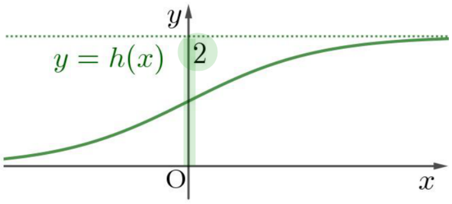
$p'\left(\frac{3}{2}\right)>0$ → 모순　$p'\left(\frac{3}{2}\right)<0$ → 가능

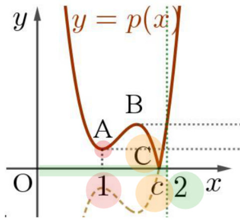
제2교시

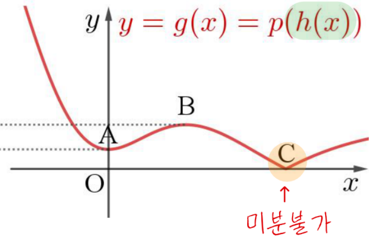
수학 영역 (미적분)

$p(c)=0$을 만족하는 c에 대하여
$c \ge 2$이다 (∵ $g(x)$는 미분가능)

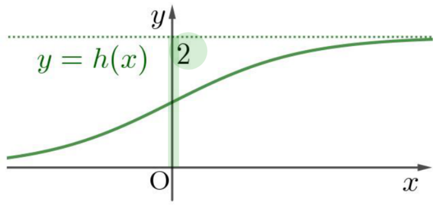
ⅰ) $c<2$인 경우

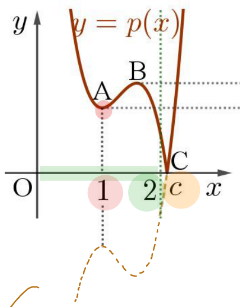


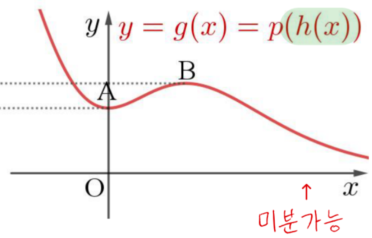




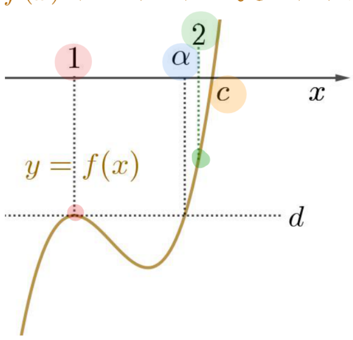
ⅰ) $c \ge 2$인 경우







$p(x)=|f(x)|$의 그래프의 개형을 통해 파악한
$f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



∴ $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)+d$

$g(0)=|f(1)|=-d$

$f(2)=2-\alpha+d\le 0$

(step3) (나) $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$ 활용하기

$g(x)=|f(h(x))|=-f(h(x))$ (∵ $0<h(x)<2$)

∴ $\frac{3}{8}g(-\ln 3)=-\frac{3}{8}f\left(\frac{1}{2}\right)$

$g'(x)=-f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\times\frac{-2e^{-x}(-1)}{(1+e^{-x})^2}$

$g'(-\ln 3)=-f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{8}$

∴ $|g'(-\ln 3)|=f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{8}$ (∵ $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$)

$|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

⇔ $f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}f\left(\frac{1}{2}\right)$

∴ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'(x)=2(x-1)(x-\alpha)+(x-1)^2$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+d$

$-f'\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

⇔ $\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+d$

⇔ $\alpha=-\frac{4}{3}d+\frac{1}{6}$

$f(2)=2-\alpha+d\le 0$

$=2-\left(-\frac{4}{3}d+\frac{1}{6}\right)+d\le 0$

⇔ $d\le-\frac{11}{14}$

∴ $g(0)=|f(1)|=-d\ge\frac{11}{14}$

∴ $p+q=14+11=25$