

1~4 부모님과 손잡고 풀어보세요.

5.

$$\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5} = \log_2 5 \times \frac{4}{5} = \log_2 4 = 2$$

6.

성분의 합이 3이라는 말은 꼭짓점에서 연결된 변의 개수가 3인 것의 개수와 동일하므로 답은 4

7.

$\lim_{x \rightarrow 1} (4x - a) = 0$ 이므로 $a = 4$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x - 1} = 4 \text{이므로 } b = 4 \text{이다. 따라서 } a + b = 8 \text{이다.}$$

8.

$$\sum_{k=1}^{11} (5a_k + b_k) = 5 \sum_{k=1}^{11} a_k + \sum_{k=1}^{11} b_k = 20 + 24 = 44$$

9.

그래프를 통해서 확인하면 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 3$

10.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} \text{이므로 } A = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{임을 알 수 있고 } A \text{의}$$

모든 성분의 합이 3이므로 $\frac{a+2}{a} = 3$ 이다. 따라서 $a = 1$

11.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 = 2f'(1)$$

이다. 따라서 $f'(x) = 2x + 8$ 이다 따라서 $2f'(1) = 20$ 이다.

12.

$$S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{2} \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(3^n - 1)}{2 \times 3^n} = \frac{a_1}{2} = 5 \text{이므로 } a_1 = 10 \text{이다.}$$

13.

문제에 조건에 따라서 $g'(x) = f(x)$ 이다. 이때, $(2, g(2))$ 에서의 접선의 방정식을 구해보면 $y = f(2)(x - 2) + g(2)$ 이다. 이 접선의 y 절편이 -5 이고 $f(2) = 1$ 이므로 $-5 = -2 + g(2)$ 이다. 따라서 $g(2) = -3$ 이다. 따라서 접선의 방정식은 $y = x - 5$ 이다.

따라서 x 절편의 값은 5이다.

14. $f(x) = n$ 에 의하여 $(x - 3)^2 = n$ 의 두 근을 구해보면

$x = 3 \pm \sqrt{n}$ 이다. 따라서

$$|\alpha - \beta| = |\pm 2\sqrt{n}| = 2\sqrt{n} \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \{h(n+1) - h(n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}\}$$

이다. 위 식을 유리화 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 1$ 이다.

15. 함수 $y = \log_3 x$ 를 x 축방향으로 a 만큼 y 만큼 평행한 이동한

식을 찾아보면 $f(x) = \log_3(x - a) + 2$ 이다. 이 함수의

역함수를 찾으면 $f^{-1}(x) = 3^{x-2} + a$ 이다 따라서 $a = 4$ 이다.

16. 등차중항의 성질을 이용하면 $k = 5$ 임을 알 수 있다.

문제의 조건에 따라서 a_1, a_2, a_k 등비수열이므로 등비중항의

성질을 이용하면 $(a_1 + 6)^2 = a_1(a_1 + 4 \times 6)$ 이다. 이식을

$$\text{정리하면 } a_1^2 + 12a_1 + 36 = a_1^2 + 24a_1 \text{이므로}$$

$$12a_1 = 36 \text{이다. 따라서 } a_1 = 3 \text{이다. 따라서 } a_1 + k = 8$$

17.

두 함수

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 3x, \quad g(x) = x^3 - 4x^2 + 9x + a \text{에서}$$

$f(x) = g(x)$ 의 실근을 조사하는 것은

$$3x^3 - x^2 - 3x = x^3 - 4x^2 + 9x + a \text{를 보는 것과 같은데}$$

이식을 정리하면 $2x^3 + 3x^2 - 12x = a$ 이고

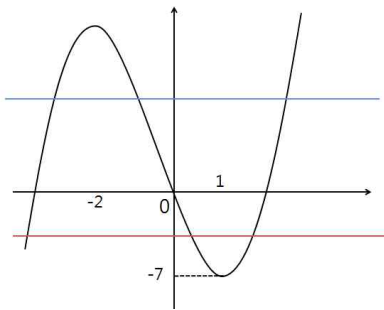
$2x^3 + 3x^2 - 12x$ 의 그래프와 a 의 교점이 두 교점은 양이고 한 실근은 음이면 된다.

이제 $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 에서

$$h'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1) \text{이 되고}$$

$x = -2$ 일 때 극대 $x = 1$ 에서 극소가 된다. 따라서 $h(x)$ 를 그려보면 아래 그림과 같다.

여기서 파란색의 경우에는 되지 않고 빨간색의 경우가 조건을 만족한다. 따라서 $-7 < a < 0$ 이다.



18.

먼저 첫째항을 구해보자 삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 정삼각형이다

여기서 원의 중심을 O 라고 하면 $\overline{OA_1} = 2$ 이다. 그리고 그림에서

θ 는 $\frac{2}{3}\pi$ 임을 알 수 있다. 따라서 정삼각형의 한변의 길이는

$2\sqrt{3}$ 임을 쉽게 할 수 있다. 이제 S_1 을 구해보자. 선분 A_1C_1 의

중심을 M 이라고 하면 O 가 삼각형의 무게 중심이므로

$\overline{OM} = 1$ 이 된다. 따라서 사각형의 높이는 반지름 길이에서

선분 OM_1 의 길이를 빼면 되므로 1이 된다. 따라서 우리가

구하고자 하는 넓이는 사각형에서 부채꼴에서 삼각형을 빼면

된다. 사각형의 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이고 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi \text{이 되고, 삼각형의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

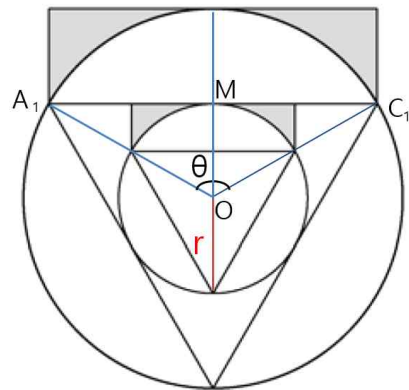
$$S_1 = 2\sqrt{3} - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \text{이다.}$$

이제 공비를 구해보자 안쪽의 원의 반지름을 r 이라 하면 r 은

선분 OM 이랑 같으므로 $r = 1$ 이다 따라서

넓이 비는 $2^2 : 1^2$ 이므로 $\frac{1}{4}$ 가 공비가 된다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi}{\frac{3}{4}} = 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi \text{이다.}$$



19.

$S_{n+1} + 1 = 2^n(S_n + 1)$ 에서 양변 $\log_2$ 를 하는 것이므로

$\log_2(S_{n+1} + 1) = n + \log_2(S_n + 1)$ 이 되고

$b_n = \log_2(S_n + 1)$ 이므로 위식에 넣어서 정리하면

$b_{n+1} = n + b_n$ 이 되므로 $\boxed{(가)} = n$ 이 된다.

따라서 $f(n) = n$

문제를 따라가면 $S_n = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 1$ ($n \geq 1$)이므로

우리가 구하고자하는 것은 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이다. 즉,

$a_n = \left(2^{\frac{n^2-n+1}{2}} - 1\right) - \left(2^{\frac{(n-1)(n-2)+1}{2}} - 1\right)$ 이 된다.

따라서 $\boxed{(나)} = \frac{(n-1)(n-2)+1}{2}$ 이다.

$g(n) = \frac{(n-1)(n-2)+1}{2}$ 이므로,

$f(12) = 12$, $g(5) = \frac{4 \times 3 + 2}{2} = \frac{14}{2} = 7$ 이다.

20.

a, b 가 20이하의 자연수 이므로 a 와 b 의 지표는 0 또는 1의 값을 가진다. 즉, $f(a) = 0$ or 1 , $f(b) = 0$ or 1 이때

$f(ab) = f(a) + f(b) + 2$ 에서 $a + b$ 의 최솟값을 구해야한다.

여기서 $f(ab)$ 가 될 수 있는 값을 찾아보면 $1 \leq a \leq 20$,

$1 \leq b \leq 20$ 에서 $1 \leq ab \leq 400$ 이므로

$f(ab) = 0, 1, 2$ 가능함을 알 수 있다.

여기서 $f(ab)$ 가 0과 1인 가질 수 없으므로 $f(ab) = 2$ 가 되어야 한다.

즉, $100 \leq ab \leq 400$ 임을 알 수 있다. 그리고

$f(a)f(b) = 0$ 이므로 a 와 b 중 하나는 한자리 자연수가

되어야한다. a 가 한자리 자연수라고 생각하면 $1 \leq a \leq 9$ 다

여기서 $10 \leq b \leq 20$ 이다. (a 와 b 를 바꾸어 생각해도

무방하다)

$b = 20$ 인 경우는 $a = 5$

$b = 19$ 인 경우는 $a = 6$

$b = 18$ 인 경우는 $a = 6$

$b = 17$ 인 경우는 $a = 6$

$\vdots$

계속하여 찾아가다 보면

$b = 12$ 인 경우에 $a = 9$ 가 나온다.

따라서 $a + b$ 의 최솟값은 21이 된다.

21.

(가) 조건에 의하여 n 은 $f(x)$ 의 근이 됨을 알 수 있다.

따라서 $f(x) = (x-n)(x^2+px+q)$ 의 꼴임을 문제를 통해서 유추할 수 있다.

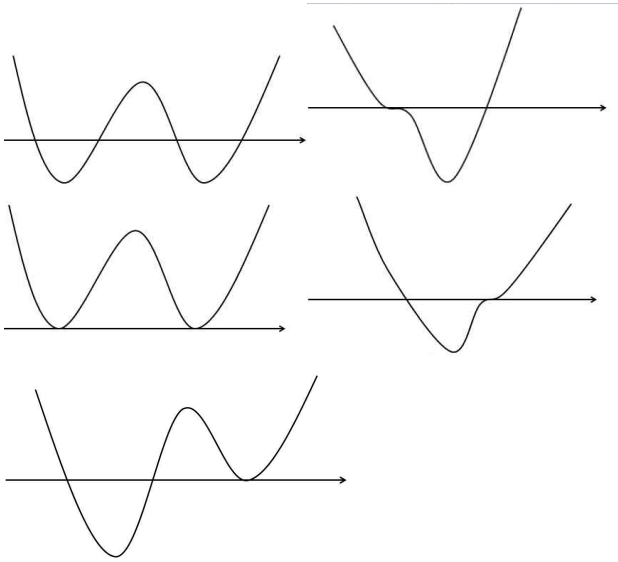
(나) 조건이 모든 실수 x 에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$ 가 성립한다는 것이다. 이를 (가) 조건에서 구한 $f(x)$ 를 대입하여 생각해보면 $(x+n)(x-n)(x^2+px+q) \geq 0$ 이다.

아래 그림을 통해서 보면

$$g(x) = (x-n)(x+n)(x^2+px+q) \text{ 이면}$$

$g(x)$ 는 사차함수이고 근을 최소 2개 최대 4개를 가질 수 있다.

그 경우를 다 그려보면



여기서 조건에 만족하는 식은 중근 2개를 갖은 꼴이다.

$$\text{즉 } g(x) = (x-n)^2(x+n)^2 \text{이 되어야 한다.}$$

그러므로 $f(x) = (x+n)(x-n)^2$ 이 되어야 한다.

여기서 $f'(x) = (x-n)(3x+n)$ 이 되고 극댓값을 가지는

$$x \text{ 값은 } -\frac{n}{3} \text{이다. 따라서 } a_n = f\left(-\frac{n}{3}\right) = \frac{32}{27}n^3 \text{이다.}$$

이때 a_n 이 자연수가 되도록 하는 n 의 값은 $n = 3k$ 꼴이다.

여기서 최솟값은 3임을 알 수 있다.

22. 부모님과 함께 ^^

$$23. f'(x) = 3x^2 + 10 \text{이므로 } f'(0) = 10 \text{이다.}$$

$$24. \sum_{k=1}^{10} (2k+a) = 110 + 10a = 300 \text{이므로 } a = 19$$

25. 연립방정식이 무수히 많은 해를 가지므로 $\begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 8 & a-4 \end{pmatrix}$ 이 역행렬을 가지지 않는다. 따라서 $2a(a-4) + 8 = 0$ 이다.

$$\text{이식을 정리하면 } (a-2)^2 = 0 \text{이다. 따라서 } a = 2$$

26. 무한급수가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ 임을 알 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 9n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 9}{1} = 9 \text{이다.}$$

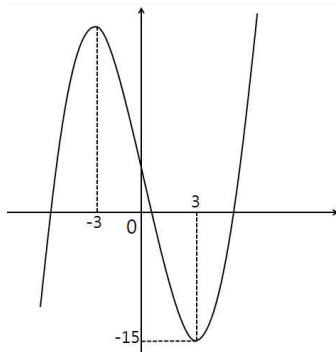
27.

삼차함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-a, a)$ 에서 감소해야 하므로,
 $(-a, a)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이다.

즉, $f'(x) = x^2 - 9 < 0$ 이고, 따라서 $-3 < x < 3$

$\therefore a$ 의 최댓값은 3이다.

그림을 그려서 확인 해봐도 무방하다.



28.

$f(x)$ 가 일차함수이고, x 절편 $(-5, 0)$ 을 지나므로
 기울기를 a 라고 두면

$f(x) = a(x+5)$ 라고 둘 수 있다.

따라서, $2^{f(x)} \leq 8$

$\Leftrightarrow 2^{a(x+5)} \leq 8$

$\Leftrightarrow a(x+5) \leq 3$

의 해가 $x \leq -4$ 이다.

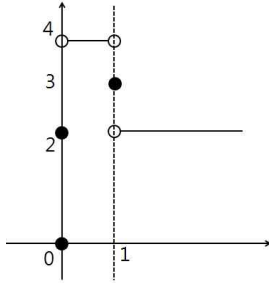
$\therefore a = 3$ 이고, $f(x) = 3x + 5$ 이다.

$f(0) = 15$

29.

문제에 조건에 따라서 $f(t)$ 의 그래프를 그려보자.

일단, $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프에서 $x = 1$ 일 때 $y = 1$ 이다.
따라서 이점을 기점으로 $f(t)$ 값이 변화한다. 따라서 아래와 같은 그래프를 그릴 수 있다.



따라서 $f(3)=2$ 임을 알 수 있다.

여기서 $f(t)g(t)$ 가 모든 실수 t 에 대하여 연속이어야 하므로
 $x = 0$ 일 때와 $x = 1$ 일 때 모두에서 $g(t)$ 의 값이 0이어야 한다.

따라서 $g(x) = x(x-1)$ ($\because g(x)$ 의 최고차항이 1)

그러므로 $g(3)=6$ 이다

30.

엄마가 없어서 해설지를 못 써요ㅠㅠ

해설강의를 참고하세요