손해설 by orbi 물리좋아.

어떤 해설강의도 일체 참고하지 않은 현장 풀이임을 알려드립니다.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f' = 4x$

3. $\sin(\pi-\theta)=\dfrac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta<0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\dfrac{12}{13}$ ② $-\dfrac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\dfrac{5}{12}$ ⑤ $\dfrac{12}{13}$

$\cos\theta = -\frac{12}{13}$

$\tan\theta = -\frac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x\le a)\\ ax-6 & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-2a+a = a^2-6$

$a^2+a-6=0$

$\Sigma a = -1$

by 근과계수.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 0 \\ a_1 + 9d = -3 \end{cases}$$

$\therefore d = -3, \ a_1 = 24$

$\Rightarrow a_2 = 24 - 3 = 21$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$x = 0, 2$ → $k = 9$, $2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9$

극대 극소

$= 8 - 12 + 9 = 5$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{7}{10}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

$S_0 \neq 0$ 이니 초항고려 X. 애초에 $S_1 = a_1$이라

$\therefore \displaystyle\sum_{k=2}^{10}(S_k - a_k)$

$S_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ $\quad a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k}$ $\quad (k \geq 2)$

$S_k - a_k = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = S_{k-1}$ 이걸로 구하면 사실상 끝임.

$\displaystyle\sum_{k=2}^{10} \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$3x^2-4\,|_{x=1} = -1$

접선 : $y=-(x-1)+2 = -x+3$

$x^4+3x+a = -x+3$

$x^4+4x = 3-a$

미분

$4x^3+4$ ($x=-1$에서 극)

즉 $(-1)^4-4 = 3-a$

∴ $a=6$

9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

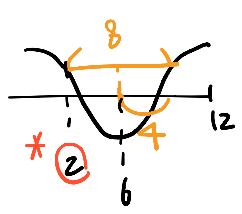
$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}, \quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

f의주기 12

①

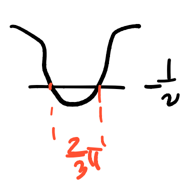


$k=\cos\frac{\pi}{6}(2) = \frac{1}{2}$

② $-3\cos\frac{\pi}{6}x-1=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{1}{2}$

일반각의 함수



$\frac{2}{3}\pi$ 이니

∴ $\frac{2}{3}\pi\times\frac{6}{\pi}=\boxed{4}$

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at \quad (a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x(t) = t^3+\frac{a}{2}t^2$ 이므로

$\left|t^3+\frac{a}{2}t^2-6\right| = 10$ when $t=2$.

$|8+2a-6| = 10$

$a=4$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3}^{\,f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

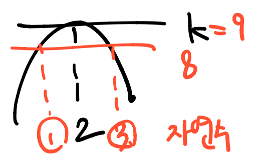
* cf 아마 ②, ⑤ 빼곤 자연수 불가.

→ ①, ③, ④ 택하면 안됨.

$\square^4 = 3^{\frac{f(n)}{2}}$

곱한값이 -9 → 음수 → $-3, +3$ 확정!

$4 = \frac{f(n)}{2} \Leftrightarrow f(n) = 8$

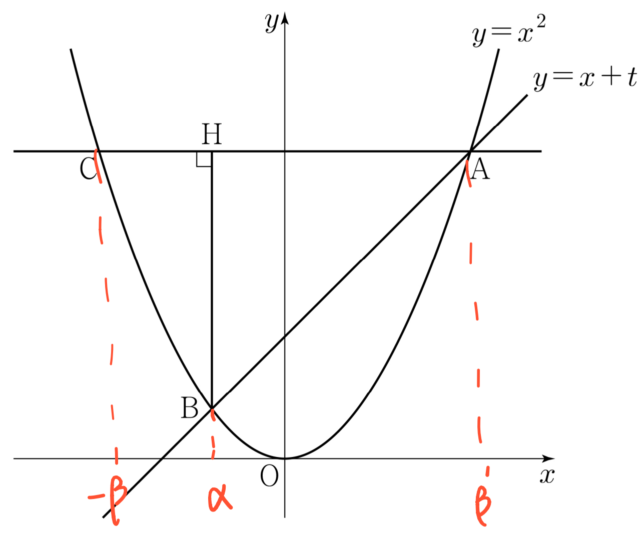


* 12일때는 자연수 불가 → 음수 나옴.

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



let. B의 x좌표 α. A의 x좌표 β라 하자

$x^2 = x+t$ (연립) 에 의해 $x^2-x-t=0$.

$\alpha+\beta=1$. $\alpha\beta=-t$

$\overline{AH} = \beta-\alpha$. $\overline{HC} = \alpha+\beta$

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{AH}-\overline{HC}}{t} = \lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\beta-\alpha-\alpha-\beta}{t} = \lim \dfrac{-2\alpha}{t}$

by 근의공식. $\dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2} = \alpha$ 이니

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sqrt{1+4t}-1}{t} = 4\times\frac{1}{2} = \boxed{2}$

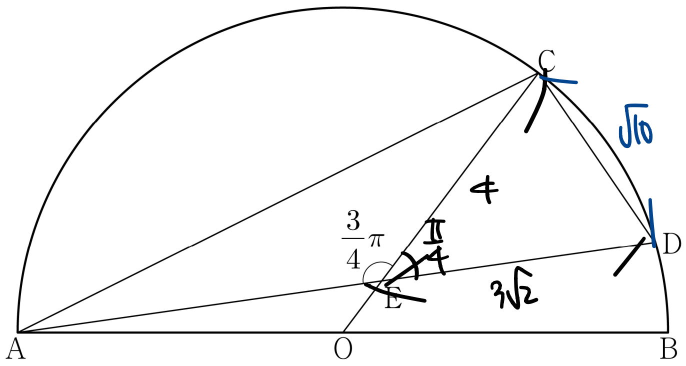
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

중하하 문항

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]



① ~~$6\sqrt{10}$~~ ② ~~$10\sqrt{5}$~~ ③ $16\sqrt{2}$
④ ~~$12\sqrt{5}$~~ ⑤ $20\sqrt{2}$

↑ 찍기!

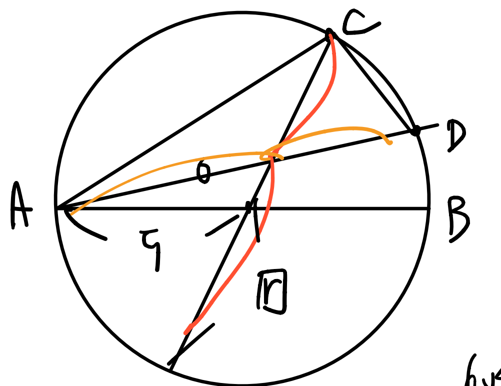
* 야매. $\sqrt{10}$? 정도는 그림이 표시된 각도상 나올 수 없는 답임.

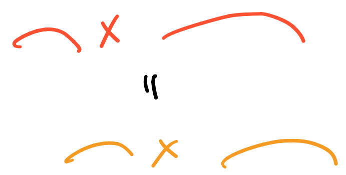
$\triangle CED$ → 확정상태.

1st $\overline{CD}^2 = 16+18-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -24+34=10$

$\therefore \overline{CD}=\sqrt{10}$

2nd 방멱정리 (원주각에 의한 닮음) → 중2 교과

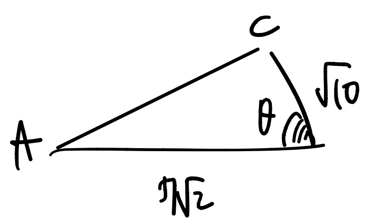




$6\times4=3\sqrt{2}\times\overline{AE}$

$\overline{AE}=4\sqrt{2}$

⇒ 반지름 5인 원.



$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-16}{2\times3\times2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\cancel{18+10-16}\ 12}{6\times2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

즉 $\overline{AC}^2 = 49\times2+10-2\times7\sqrt{2}\times\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= 98+10-28=\boxed{80}$ → $4\sqrt{5}$ $\therefore 4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

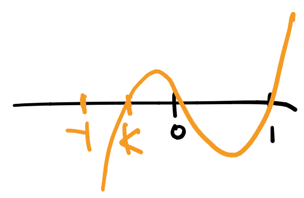
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 대입하면 나옴.

ㄴ. $g(-1)>0$ $\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx>0$

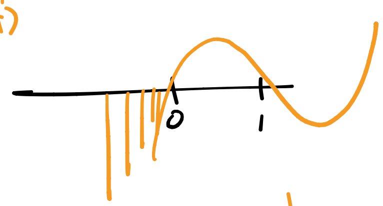
graph

i)



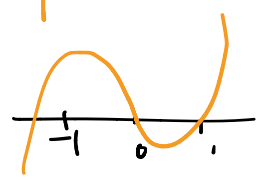
→ 옳음.

ii)



$\int_{-1}^0<0$ $\int_0^1||>0$ 이니 모순

∴



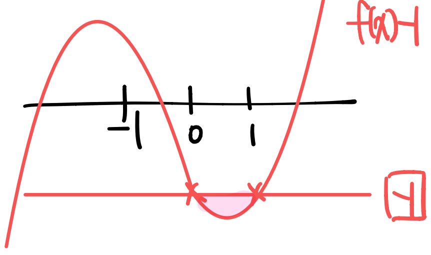
→ 참.

ㄷ. $g(-1)>1$

필요충분조건

$\boxed{\int_{-1}^0 f(x)-1\,dx} > \int_0^1|f(x)|dx$

얘가 크려면 이렇게 되어야 함.



즉 $g(0)=\int_0^1 f(x)dx$
$-\int_0^1|f(x)|dx$

↳ (0,1)에서 음수

$2\int_0^1 f(x)dx<-1$

$\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1}{2}$

⊥

계산 → (참)

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
> (단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
>
> (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\ge 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m|\ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

연쇄배열

n	4	5	6	7	8
a_n	r	$r+3$	$\boxed{r+6}$	$-3-\frac{1}{2}r$	r^2

$|a_n|\ge 5$ 인지점

반복

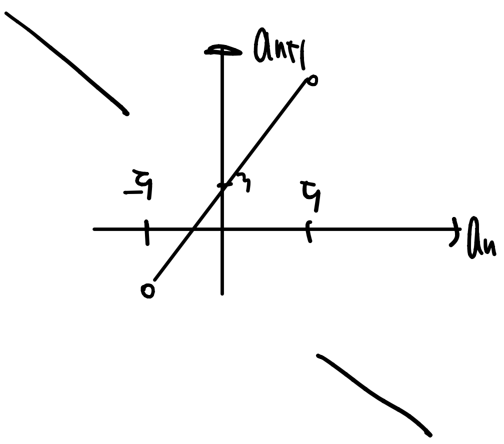
$r^2 \quad r^2+3 \quad r^2+6 \quad -3-\frac{1}{2}r^2 \quad r^3 \quad \dots$

이므로 $-3-\frac{1}{2}r-3=r^2$ 즉 $r=-\frac{1}{2}$

<a_1 구하기> → 역추적

$a_4=-\frac{1}{2} \to a_3=-\frac{7}{2},\ a_2=7,\ a_1=-14\ (\because a_1<0)$

그래프로 확인하면 편하다.



a_1부터 4개씩 나열해보자

-14	7	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$

⋮

이중에서 $|a_n|\ge 5$ 인 점들이 나옴.

→ 100까지니 25개 확정 + (-14) 하나 → $p=26$

$26+(-14)=12$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\therefore x=7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$

$f(2)=16-8+6+2=16$ $\quad \therefore 16$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

$10c = 65 + 5c$

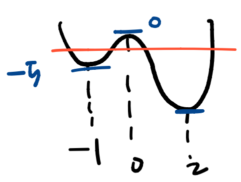
$\therefore\ c = 13$

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -k$

$12x^3 - 12x^2 - 24x$ 이므로

$x = 2,\ x = -1$ 사이



$\therefore k = 1, 2, 3, 4$ $\boxed{\therefore 4개}$

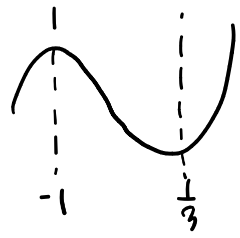
20. 상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x,\quad g(x) = 4|x| + k$$

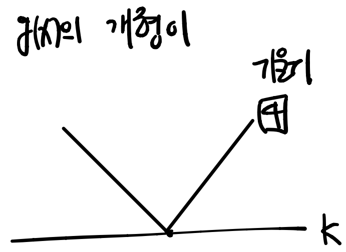
의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$x = \frac{1}{3},\ x = -1$



g(x)의 개형이



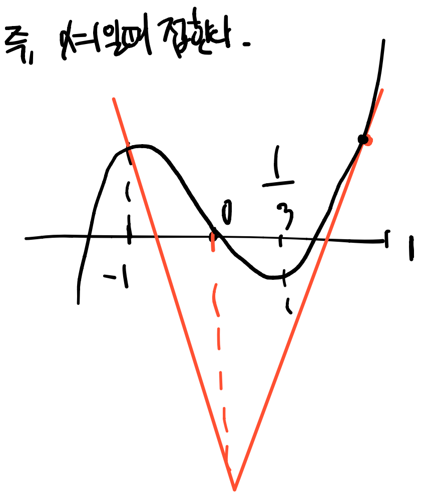
이때니 $f'(x) = 4$ 인지 정확인

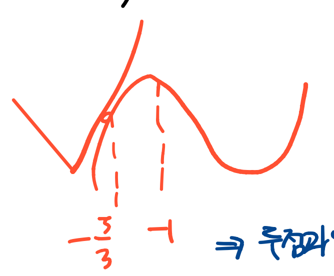
$3x^2 + 2x - 5 = 0$

↳ $x = 1$ 일때만 성립

cf. $x = -\frac{5}{3}$일때

즉, $x=1$일때 접한다.





⇒ 두점과만 만남
⇒ 2순

(-1,1)은 g가 ($x=0$) 대칭임을 바탕으로 교점구해보면 나온다.

$f(1) = 1$ 이니 접선 ⇒ $4(x-1)+1$ 에서 y절편 $= k = -3$

즉, 적분하면 됨.

* 적분 과정

$$\int_{-1}^{0} x^3 + x^2 - x + 4x + 3\,dx + \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - x - 4x + 3\,dx$$

* y축에 대해 구간, 함수 대칭시키기

$$= \int_{0}^{1} -x^3 + x^2 + x - 4x + 3\,dx + \quad ''$$

$$= \int_{0}^{1} 2x^2 - 8x + 6\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$\therefore\ 30 \times \frac{8}{3} = 80$

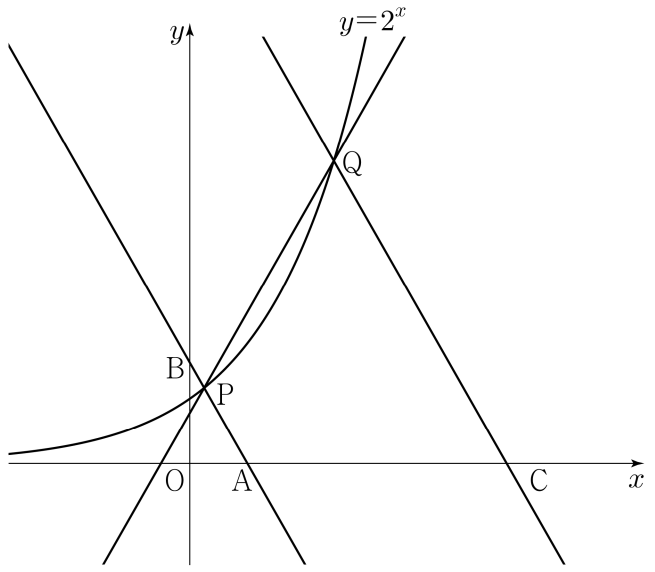
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

비율따지기 문제!

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]

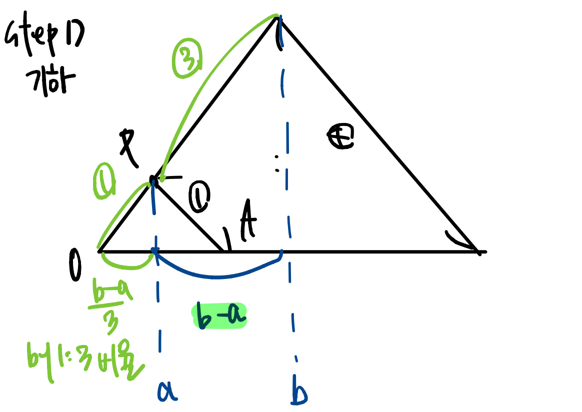


P의 x좌표 a, Q의 x좌표 b 이므로.

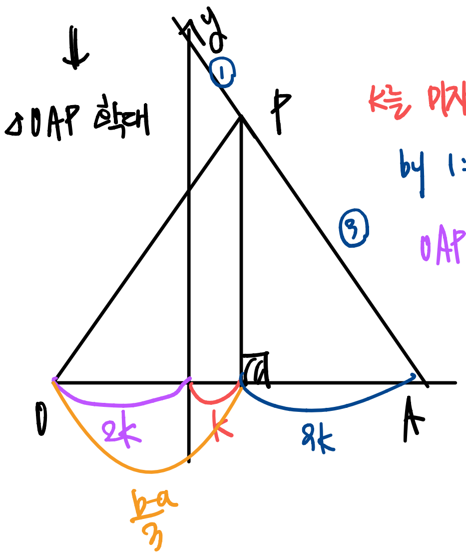
$\overline{PB} : \overline{PA} = 1:3$이고 $\overline{CQ} = 3\overline{AB}$ 이므로.

$\overline{CQ} = 4\overline{AP}$ 이다. ... ①

step1) 기하



↓ △OAP 확대



k는 미지수로 설정하자 (왼쪽하단그림 참고)

비 1:3 비율 → 9k

OAP는 이등변△ → 2k

이므로 $\frac{b-a}{3} = 3k$ ... ②

step2) 지수 - 대수 $2^a \times 4 = 2^b$ 이므로

a+2=b 이다. ... ③

②와 ③에 의해 $k = \frac{2}{9} = a$. $b = \frac{20}{9}$

따라서 $\frac{22}{9}\times 90 = 220$ $\boxed{\therefore 220}$

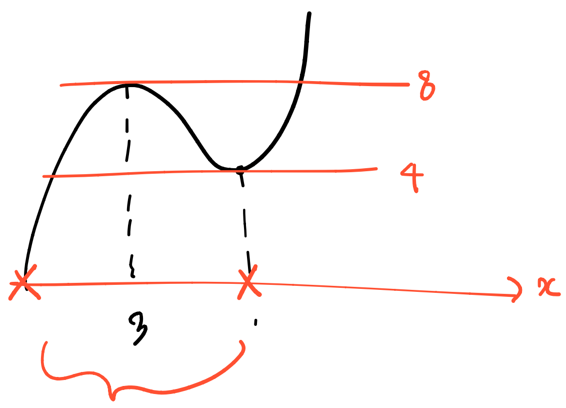
22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

y=f(t)를 기준으로 x<t에서 대칭 (점이동됨)

가능한 그래프.



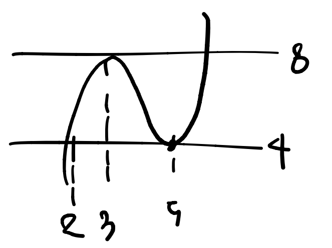
불연속점. 이거밖에 안되는걸 문제 읽고 떠올려야함.

즉 극대 - 극소 = 4인 최고차 계수 1인 삼차함수를 구하시오.

두극점의 x좌표 차를 □라 하자

$\frac{3}{6}\times □^3 = 4$ 여야 하므로. □=2이다.

삼차함수의 비율 관계에 의하여



즉, 식은 $y=(x-2)(x-5)^2+4$

따라서 $f(8)= 6\times 9+4 = 58$

$\therefore 58$

* 솔직히 12번급은 아니라고 생각합니다. (개인주관)

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{지수} - \text{지수}}{x}$ 은 유명하니 보자마자 구하기!

24. $\int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

부분적분

$= \Big| x(-\cos x) - (1)(-\sin x) \Big|_0^{\pi}$

$= \pi$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

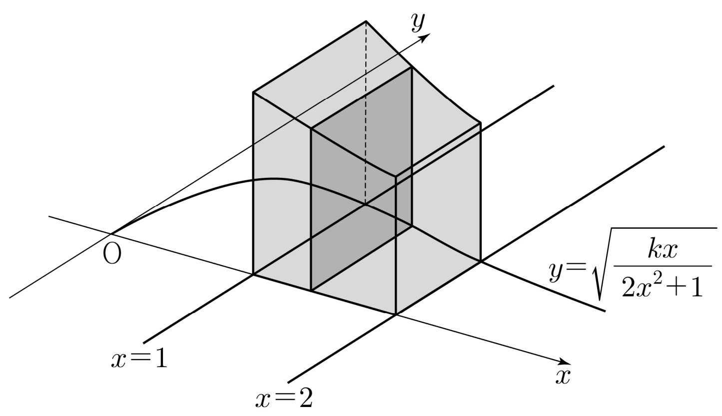
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$ 이므로

$n\to\infty$ 일때 $a_n\to 10$

즉 $\frac{10n+1}{2n+10}$의 극한 $\to 5$ (오개념 형성 여지가 있는데 이문제는 이렇게 풀어도 문제 없습니다.)

제가 실전에서 이렇게 풀었기에 이렇게 썼습니다.

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx = \frac{k}{4}\times\int_1^2\frac{4x}{2x^2+1}dx$$

$$= \frac{k}{4}\Big[\ln(2x^2+1)\Big]_1^2$$

$$= \frac{k}{4}\ln 3 = 2\ln 3$$

$\therefore k=8$

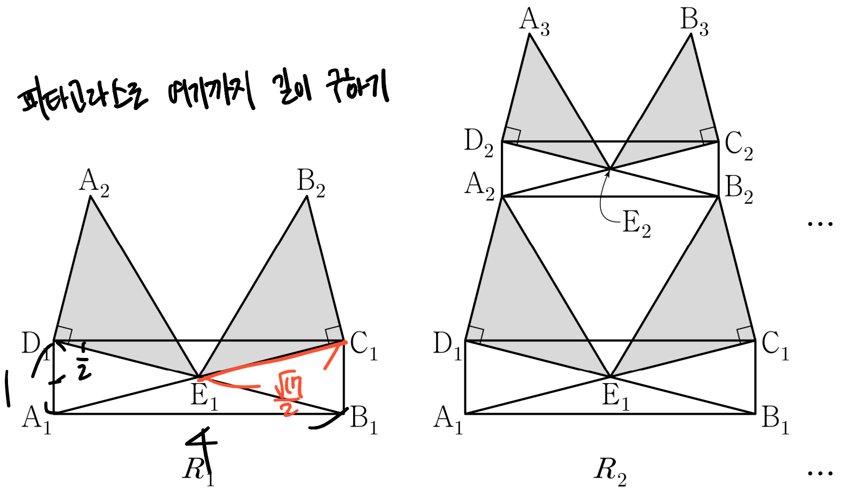
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◺◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◺◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

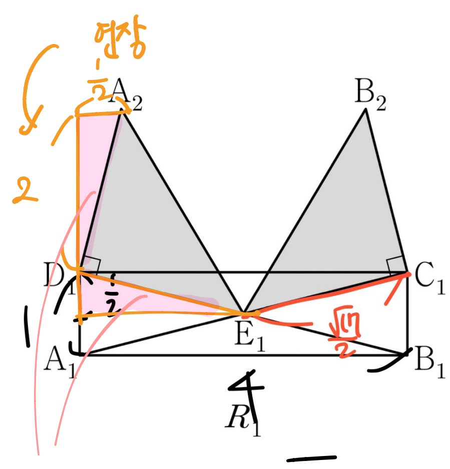
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

1st. 피타고라스로 여기까지 길이 구하기



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

2nd. 닮음 찾기.



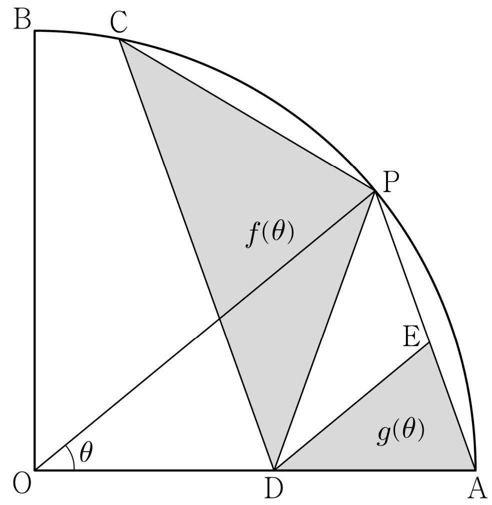
이렇게 2개 닮음. 이므로 $\overline{A_2B_2} = 4-\frac{1}{2}\times2=$ ③

즉 S_1, S_2의 길이비 $\frac{3}{4}$ → 넓이비 $\frac{9}{16}$ 이고

$S_1=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

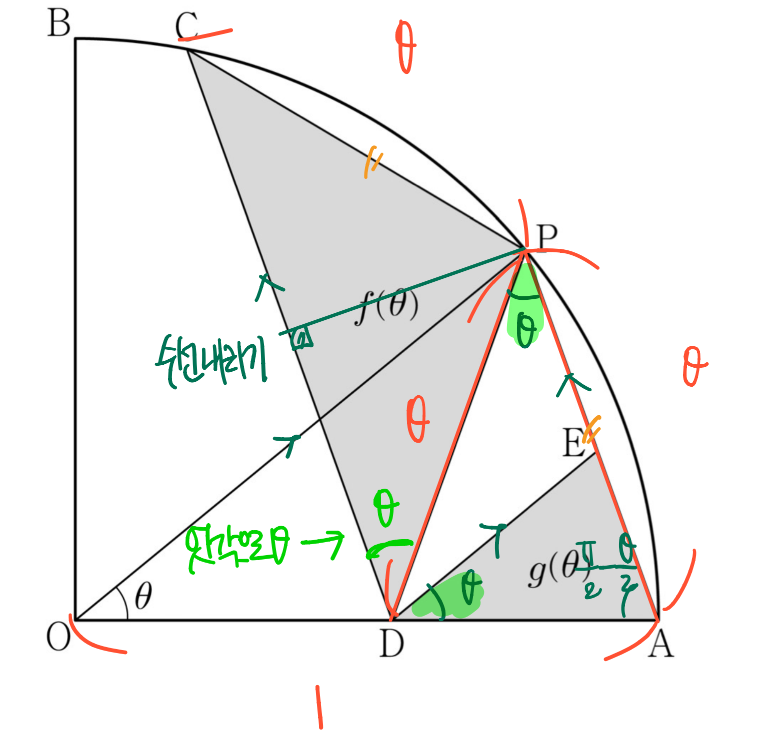
$\therefore\ \frac{17}{4}\times\frac{16}{7}=\frac{68}{7}$ 입니다!

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

* 저는 근사로 빠르게 풀었다. 근사 풀이로 수록하겠습니다.



$\triangle OPA \sim \triangle ADP$ 이서

$\overline{AO}:\overline{PD}=\overline{AP}:\overline{DE}$ 이므로 $\overline{DE}\approx\theta^2$

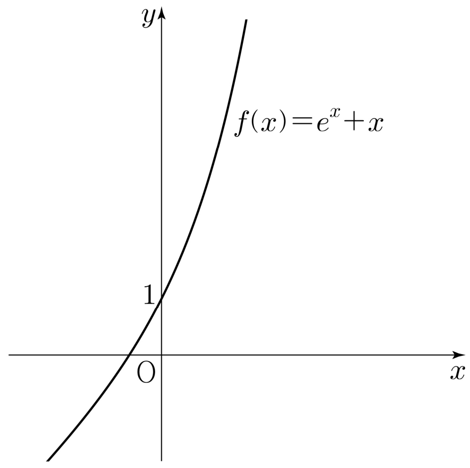
따라서 $g(\theta)\approx\frac{1}{2}\theta\cdot\theta^4=\frac{1}{2}\theta^5$. $f(\theta)=\theta\times\theta^2=\theta^3$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\theta^5}{\theta^2\times\theta^3}=\frac{1}{2}$ $\boxed{\therefore\ \frac{1}{2}}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



1st. 관계식정리

다변수함수. → 음함수 미분이 직관적!

$g(t)=f(s)=e^s+s$ 이다.

$g(t) \xleftrightarrow{-1} h(t)$ 역함수관계.

관계식 1. $h(g(t))=t \rightarrow h'(g(t))=\dfrac{1}{g'(t)}$ … ①

관계식 2. $(t,0)$과 $(s,f(s))$의 거리 최소

⇔ $f'(s)$와 두점을 이은 직선이 서로 수직

⇔ s에서의 법선이 $(t,0)$을 지남.

$\therefore \dfrac{e^s+s}{s-t}\times(e^s+1)=-1$ 이므로

$\therefore (e^s+s)(e^s+1)=t-s$ … ②

2nd. 문제상황대입.

$h'(1)$의 상황을 옮겼으니 $\underline{t=1}$. $(e^s+s)(e^s+1)=1-s$ (by ②)

$\underline{s=0\text{임이 자명}}$. … ③

따라서. $g(1)=f(0)=1$ 이니

$g'(1)$의 역수 = 구하는 값 (by ①)

$g(t)=e^s+s$

$\underline{\dfrac{dg}{dt}=(e^s+1)\cdot\dfrac{ds}{dt}}$, $\left\{(e^s+1)^2+e^s(e^s+s)+1\right\}\dfrac{ds}{dt}=1$

by ②

$s=0$, $t=1$ 대입시 $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{6}$. $\rightarrow \dfrac{dg}{dt}=2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ = 구하는 값$^{-1}$

$\boxed{\therefore 3}$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x)\geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(-3)$이다.
>
> (나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다.

$\displaystyle\int_4^5 g(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$x>-3$에서 $g\geq 0$이다. ★ 가장 중요한 POINT. … ①

1st. 계산설계 $\displaystyle\int_4^5 g(x)\,dx=\int_1^2 g(x+3)\,dx$ 이니

$g(x+3)$ 구하면 끝!

2nd. 조건 활용.

$g(x+3)=\boxed{\dfrac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}}$ 여야함. 단, ①을 만족하면서.

□ 함수를 관찰하자. 분모가 적어도 0인자가 $x=0$에서 2개이다.
($\because$ f는 다항함수)

<case 분류>

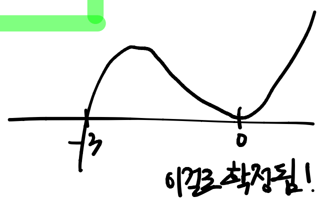
$f-f(0)$의 0인자	1개	2개	3개	4개
분자 0인자 개수	0개	1개	2개	3개
분모 0인자 개수	2	4	6	8
	① $\dfrac{0\text{개}}{2\text{개}}$	$\dfrac{0\text{개}}{3\text{개}}$	② $\dfrac{0\text{개}}{4\text{개}}$	$\dfrac{0\text{개}}{5\text{개}}$

짝수개인 경우

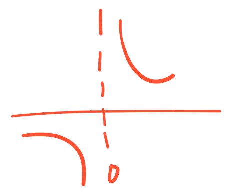
홀수개인경우

by (가)조건
$x\leq -3$에서 f는 감소해야 함
& 불연속이 없으려면 x축과는
0과 -3에서만 만나야 함

$f'(x)$의 그래프 개형



이걸로 확정됨!



이런식으로되니 ① 충족X
out.

$f'=(x+3)4x^2 \rightarrow \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt=x^4+4x^3$ 이다.

$\displaystyle\int_4^5 g(x)\,dx=\int_1^2 g(x+3)\,dx=\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}\,dx=\left[-\frac{1}{f(x)-f(0)}\right]_1^2$

$(\text{구하는 값})=\dfrac{-1}{f(2)-f(0)}+\dfrac{1}{f(1)-f(0)}$

$=\dfrac{-1}{16+32}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{43}{240}=\dfrac{q}{p}$

$\therefore p+q=\underline{283}$