3차시!

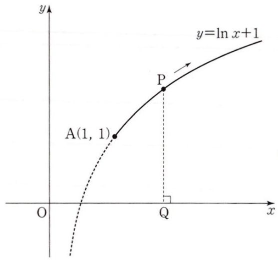
by. physicsfun.

수학 칼럼 " 미적분 ! 속도벡터와 미적분 「속도와 가속도」 단원 연계

선택과목 「기하」의 일부나 「물리학Ⅱ」의 일부를 학습한 학생들은, 미적분 문제 중 속도와 가속도를 다루는 문제를 벡터를 활용해 손쉽게 풀어낼 수 있다. 문제는 보통 점 P가 그래프 f를 따라 움직이고, P와 같이 움직이는 어떠한 점 Q의 속도를 묻는 방식으로 출제한다. 그렇다면 P의 움직임에 Q가 종속되어 있다는 뜻인데, 「미적분」에서 사용하는 대수로 P−Q 관계를 알아내거나, 속도벡터를 시각적으로 분해하여 문제를 풀어낼 수 있다.

예제)

그림과 같이 점 P가 점 A(1, 1)을 출발하여 곡선 $y=\ln x+1$을 따라 매초 $\sqrt{5}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $x=2$에서 점 Q의 속력을 구하시오. [4점]

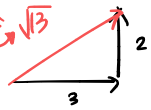


-Note- 속도벡터. 함수 $y=f(x)$를 따라 움직이는 점 P의 시간 t에서의 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$로 표현할 수 있다.

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (물리에서 배우는 순간 속도의 정의로 받아들이면 된다)

즉, 기울기 $\frac{dy}{dx}$는 결국 $\frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$ 이므로 그냥 속도 자체를 직각Δ으로 시각화할 수 있다.

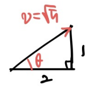
Ex) $\vec{v} = (3, 2)$



이 시각화를 이용해 문제를 풀어보자. ⟶

매초 $\sqrt{5}$의 속력 $(\ln x+1)' = \frac{1}{x}$

$x=2$에서 접선 →



따라서 $\sqrt{5}\cos\theta = \boxed{2}$ ∴ 점 Q의 속력 2.

2018 사관

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t^3+2t, \quad y=\ln(t^2+1)$$

이다. 점 P에서 직선 $y=-x$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $t=1$일 때, 점 Q의 속력은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

일단, 그래프를 그려라. (why? 속도벡터는 시각화가 우선이기 때문) 눈에 보여야 풀죠!!

라고 생각했지만 t로 매개화된 곡선이라 의미가 없다.

t로 매개화된 곡선의 주안점

① 속도벡터로 문제를 간단하게 풀 수 있다.

② t는 그냥 시간이라 생각하자 (t가 시간이 아니더라도)

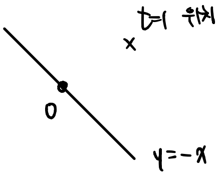
sol) 주어진 $x-t$, $y-t$ 관계식에서

$dx = (3t^2+2)dt$
$dy = \frac{2t}{t^2+1}dt$ ⇒ $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{t^2+1} \times \frac{1}{3t^2+2}$

∘ $t=1$일 때 위치 $x = 1+2 = 3$, $y = \ln(2)$,

$(3, \ln 2)$ → 1사분면

∘ 시각화



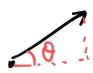
← 그냥 이렇게 그려라. $y=-x$ 왼쪽인지 오른쪽인지만 파악하면 된다.

$\frac{dy}{dx}$를 구하자!

$t=1$ 일때 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{2}{1+1} \times \frac{1}{3+2}$

$= \frac{1}{5}$

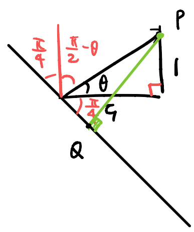
즉,



$\tan\theta = \frac{1}{5}$

기울기와 일치함을 대시하면 확인!

점 Q는 P에서 $y=-x$에 내린 정사영 (수선의 발)이므로, 시각화하면 아래와 같다.



$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 5$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 1$

이므로

$\vec{v}\,\big|_{t=1} = (5, 1)$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{26}}$

즉, $\sqrt{26} \times \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{26}} = 2\sqrt{2}$ ⋯ 정사영.

∴ 따라서 Q의 속력 $= 2\sqrt{2}$.