SJ 프로젝트 미적분 대표적인 개념 바로잡기 (중간고사 범위) - 근사(approximation)에 관하여 ...

1. 개념 바로잡기. (근사)

삼각함수의 극한 혹은 지수·로그함수의 극한을 다룰 때에 흔히들 실수하는 경우가 있다.

$x \to 0$ 일때
$$\begin{cases} x \approx \sin x \approx \tan x \approx \ln(1+x) \approx e^x - 1 \\ \frac{1}{2}x^2 \approx 1-\cos x \approx \sec x - 1 \end{cases}$$

이렇게 극한식에서 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \approx \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ 이런식으로 계산하는 것을 근사 라고 한다. (정확한 표현으로는 $x=0$에서의 선형근사)

즉, 핵심은 $x \to a$일때 $f(x)$의 접선을 사용해도 극한에는 지장이 없다는 느낌으로 받아들이면 된다.

그러나, 위 방법은 분모, 분자 식에 ⊕나 ⊖로 연결되어 있는 식이 있는 경우. 잘못 사용할 수 있다는 점을 인지해야 한다.

예를들어 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 이라는 극한식을 계산할 때, 위와 동일한 논리로 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - x}{x^3}$ 으로 바꾼다면

실제 극한값과 차이나는 결과를 만들어낼 수 있다.

이런 오류를 예방하기 위해 할 수 있는 것은 2가지가 있다.

i) 합과 · 차를 곱으로 고치기.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

이렇게 $\tan x - \sin x$ 를 $\tan x(1-\cos x)$ 의 곱 형태로 고치면 실수를 예방할 수 있다.

ii) 1차근사 . 2차근사 정확히 이해하고 쓰기 (비추)

무한번 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대해 $x \to 0$ 일때 $f(x)$는 다음과 같이 근사된다.

* $f^{(k)}(x)$는 f를 k번 미분했다는 의미이다 →

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

고등과정에서는 모든 함수에서 성립한다고 생각해도 좋다.

즉, $\sin x$의 3차근사는 $x - \frac{x^3}{3!}$ 이며 $\tan x$의 3차근사는 $x + \frac{1}{3}x^3$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$

* 부연설명
왜 3차까지만 근사했는가?
$\lim_{x\to a} \frac{\boxed{}}{x^3}$ 결국 $(x-a)$인수의
최저차항 계수비만 판단하므로
x^3 이상의 차수를 가진 항은
전개해도 극한에 영향은
없다.

이렇게 n차근사를 정확하게 이해하면, 극한식을 풀어낼 수는 있다.

그러나 시험장에서 n차 테일러 전개 할 바에는 기본적인 i) 풀이를 숙지하는 것이 좋다.

혹은, 근사를 잘 모르면 아예 쓰지 않는 선택도 존재한다.

conclusion) 근사를 쓸 거면 제대로 쓰자. 안쓰고도 잘 풀고 있다면 nice!

⊕ 로피탈의 법칙도 모르고 쓰지 말자. → 로피탈의 법칙은 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 으로 계산해도 되는 법칙이 아니다. 역으로 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 가 존재할때 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 와 같아진다는 법칙이다.

오히려 킬러문제. 준킬러 문제의 경우 미분계수의 정의로 푸는 것이 더 빠를 때가 많다.