학번	-	이름	雀
단원명	-	문항번호	自作-4

<table>
<tr><td>문항</td><td>

$\mathbb{R}-\{0\}$에서 미분가능한 함수 $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=\dfrac{x}{x^2}$

(나) $f(-1)=1-2\ln 3$

함수 $y=f(x)$의 원점을 지나고 기울기가 양수인 접선 l에 대하여, l과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점 중 접점이 아닌 점을 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$라 하자. 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 $\mathrm{Q}(0,\ q)$라 할 때, 점 Q와 직선 l 사이의 거리 d에 대하여 $d^2\left\{\left(\dfrac{q+1}{p}\right)^2+1\right\}-\{\ln|p|\}^2=0$을 만족시키는 실수 p의 값을 구하여라.

</td></tr>
</table>

(가) 조건에서

$$f(x)=\begin{cases}\ln x+c_1 & (x>0)\\ \ln(-x)+c_2 & (x<0)\end{cases}$$

($c_1=c_2$라는 보장이 없으므로 섣불리 $f(x)=\ln|x|+c$라고 하면 안 된다.)

$l:y=mx$라 하고 접점을 $\mathrm{T}(t,\ \ln t+c_1)$이라 하자. 이때 $m>0$이므로 $t>0$, $p<0$이다.

$$\begin{cases}mt=\ln t+c_1\\ m=\dfrac{1}{t}\end{cases}$$

에서 $\ln t=1-c_1$, $t=e^{1-c_1}$, $m=\dfrac{1}{t}=e^{c_1-1}$이므로 직선 l은

$$l:y=e^{c_1-1}x$$

로 표현된다. 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점은 점 P이므로

$$f(p)=\ln(-p)+c_2=e^{c_1-1}p\ \cdots\ [1]$$

가 성립하고, 점 P에서의 접선은

$$y = \frac{1}{p}(x-p)+f(p) = \frac{1}{p}x + e^{c_1-1}p-1$$

이고 이 접선의 y절편은

$$e^{c_1-1}p-1 = q$$

이다. 또한 점 $\mathrm{Q}(0,\ q)$와 직선 l 사이의 거리 d는

$$d = \frac{\left|1-e^{c_1-1}p\right|}{\sqrt{e^{2(c_1-1)}+1}}$$

이고

$$d^2\left\{\left(\frac{q+1}{p}\right)^2+1\right\}-\{\ln|p|\}^2$$

$$= \frac{(1-e^{c_1-1}p)^2}{e^{2(c_1-1)}+1}\cdot e^{2(c_1-1)}+1-\{\ln|p|\}^2$$

$$= (1-\ln(-p)-c_2)^2-\{\ln(-p)\}^2 \ (\because [1])$$

$$= (c_2-1)\{2\ln(-p)+c_2-1\} = 0$$

이다. 한편 (나) 조건에서

$$f(-1) = c_2 = 1-2\ln 3$$

이므로

$$2\ln(-p)+c_2-1 = 0$$

에서

$$\ln(-p) = \frac{1-c_2}{2} = \ln 3,$$

$$p = -3.$$