학번	-	이름	雀
단원명	-	문항번호	自作-3

문항	$$\log_{\pi}k=\frac{x^2+4}{16\lvert x\rvert}\sec^2\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\log_{\pi}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{17}{4}\right),$$ $$1+\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)=\left(x^2+4x+7\right)^{2\log_3 k}$$ 를 만족하는 모든 실수 (k,x)의 순서쌍 (k_i,x_i)에 대하여, $\sum_i x_i^4(k_i^2+2)^{x_i}$의 값을 구하여라.

$$\log_{\pi}k=\frac{x^2+4}{16\lvert x\rvert}\sec^2\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\log_{\pi}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{17}{4}\right)\ \cdots\ [1]$$

$$1+\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)=\left(x^2+4x+7\right)^{2\log_3 k}\ \cdots\ [2]$$

[1]의 양변을 π의 지수로 올리면,

$$k=\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{17}{4}\right)^{\frac{x^2+4}{16\lvert x\rvert}\sec^2\left(\frac{\pi}{x+1}\right)}.$$

이때 산술기하평균 부등식에 의해

$$\frac{x}{x^2+4}\geq-\frac{1}{4},\ \frac{x^2+4}{\lvert x\rvert}\geq 4$$

이다. 한편 등호조건 $x=-2$를 대입하면

$$\sec^2\left(\frac{\pi}{x+1}\right)=\sec^2\pi=1$$

이 되어 $\sec^2\left(\frac{\pi}{x+1}\right)$ 역시 최솟값을 갖게 된다. 따라서,

$$k=\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{17}{4}\right)^{\frac{x^2+4}{16\lvert x\rvert}\sec^2\left(\frac{\pi}{x+1}\right)}\geq 4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}\ \cdots\ [3]$$

를 얻는다. 한편, [2]의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)\right\}=2\log_3 k\cdot\ln(x^2+4x+7),$$

$$\frac{\ln\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)\right\}}{2\ln(x^2+4x+7)}=\log_3 k$$

를 얻고,

$$x^2+4x+7=(x+2)^2+3\geq 3$$

에서

$$\frac{1}{2\ln(x^2+4x+7)}\leq\frac{1}{2\ln 3}$$

이다. 또한 등호조건 $x=-2$가 성립할 때,

$$\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)=\sin\left(-\frac{7}{2}\pi\right)=1$$

이 되어 $\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)$는 최댓값을 갖게 된다. 따라서

$$\log_3 k=\frac{\ln\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{x\cdot(\sqrt{7})^x}\right)\right\}}{2\ln(x^2+4x+7)}\leq\frac{\ln 2}{2\ln 3}=\frac{\ln 2}{\ln 9},$$

$$k\leq 3^{\frac{\ln 2}{\ln 9}}=3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 9}}=3^{\frac{\log_3 2}{2}}=3^{\log_3\sqrt{2}}=\sqrt{2}\quad\cdots\quad[4]$$

를 얻는다. [3], [4]에서

$$\sqrt{2}\leq k\leq\sqrt{2}$$

가 되어 $k=\sqrt{2}$가 성립하고, 이때의 x는 $x=-2$이다.

$$\therefore(-2)^4\cdot(\sqrt{2}^2+2)^{-2}=1$$