학번	-	이름	雀
단원명	-	문항번호	自作-1

<table>
<tr><td>문항</td><td>
공집합이 아닌 세 집합 A, B, C는 다음과 같다.
(단, $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n$이다.)

$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \le 1200,\ \exists\, l \in \mathbb{N} : l^2 = \prod_{k=1}^{n} \tan \frac{k\pi}{2n+1} \right\}$
$B = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \le 2000,\ \exists\, m \in \mathbb{N} : m = 2^{1000} \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \right\}$
$C = \left\{ \cos \frac{n\pi}{3} \,\middle|\, n \in A \cap B \right\}$

(1) $n \in \mathbb{N}$에 대해 방정식 $x^{2n+1} = 1$의 $2n$개의 허근은 $1 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$에 대해 $\cos \frac{2k\pi}{2n+1} \pm i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}$로 표현된다. 이를 이용하여 $\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$을 n개의 실계수 이차식의 곱으로 인수분해하여라.

(2) (1)의 결과에 $x=1$과 $x=-1$을 대입하여 $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1}$과
$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1}$의 값을 n에 관한 식으로 나타내어라.

(3) 집합 C의 모든 원소의 곱이 서로소인 두 자연수 p, q에 대해 $\frac{q}{p}$이다. p^2+q의 값을 구하여라.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
(1) $1 \le k \le n$인 자연수 k에 대해 켤레근
$$\cos \frac{2k\pi}{2n+1} \pm i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}$$
을 생각하면 두 켤레근의 합은 $2\cos \frac{2k\pi}{2n+1}$, 곱은 1이므로 이 두 켤레근을 영점으로 가지는 이차식은
$$x^2 - 2x\cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1$$
</td></tr>
</table>

이다. 따라서

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$$

$$=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2n+1}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{2n+1}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+1\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$

이다.

(2) $\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}=x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\ \cdots\ +x+1$임을 이용하여

① x에 1을 대입하면

$$2n+1=\prod_{k=1}^{n}\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$=2^{2n}\prod_{k=1}^{n}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$$=\left\{2^n\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right\}^2$$

$$\therefore \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}\ \cdots\ [1]$$

② x에 -1을 대입하면

$$1=\prod_{k=1}^{n}\left(2+2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$= 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$$= \left\{2^n \prod_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{k\pi}{2n+1}\right)\right\}^2$$

$$\therefore \prod_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n} \ \cdots \ [2]$$

[1], [2]에 의해 양의 정수 n에 대해

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\tan \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}$$

이다.

(3) (2)에 의해

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\tan \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}$$

이다.

① $\prod_{k=1}^{n} \left(\tan \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1} = l^2$에서 자연수 l에 대해 $n = \frac{l^4-1}{2}$이므로 이를 만족하는 1200이하의 자연수 n은 $n = 40,\ 312,\ 1200$이다. 따라서 $A = \{40,\ 312,\ 1200\}$이다.

② $\prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ 에서

$$m = 2^{1000} \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = 2^{1000-n} \sqrt{2n+1}$$

인 자연수 m이 존재해야 하고, n은 자연수이고 $2n+1$은 2의 배수가 아니므로 $n \leq 1000$이다. 또한 $2n+1$은 완전제곱수가 되어야 하므로 집합 A의 원소 $40, 312, 1200$중 이를 만족하는 n은 $40, 312$가 되어 $A \cap B = \{40, 312\}$이다.

따라서

$$C = \left\{\cos\frac{40\pi}{3}, \cos\frac{312\pi}{3}\right\} = \left\{\cos\frac{4\pi}{3}, \cos 0\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$

에서 집합 C의 모든 원소의 합은 $\frac{1}{2}$이고,

$p=2,\ q=1$에서 $p^2+q=5$이다.