

29. 원 $x^2 + y^2 = 2e^2$ 에 접하는 지수함수 $f(x) = a^{x+b}$ ($a > 1$)에 대해 $f(x)$ 가 원에 접하는 점을 (x_a, y_a) 라 하자, $g(a) = x_a y_a$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(a)$ 는 $b = 2e$ 일 때 최소이다.

ㄴ. $g(a)$ 는 $a < e^{\frac{1}{e}}$ 일 때 감소하고, $a > e^{\frac{1}{e}}$ 일 때 증가한다.

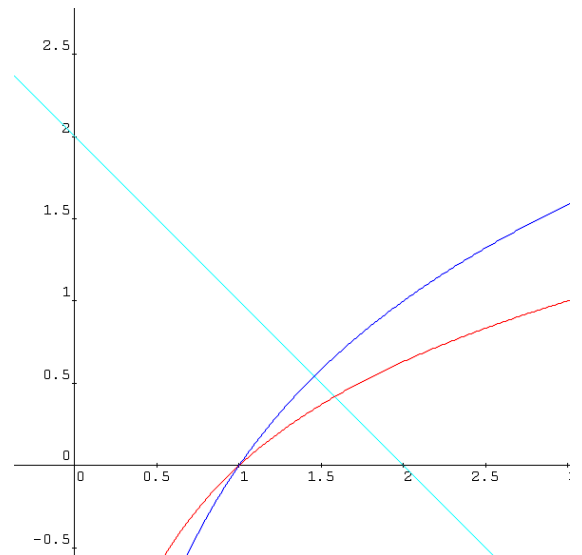
ㄷ. $a < e^{\frac{1}{e}}$ 일 때, $b < e + \log_a e$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이 문제를 풀면서 머릿속에 떠올랐던 관련 기출 문항이

2007년 11월 15일 2008학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 16번. 특히 ㄷ!이었습니다.

16. 직선 $y = 2 - x$ 가 두 로그함수 $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $x_1 > y_2$

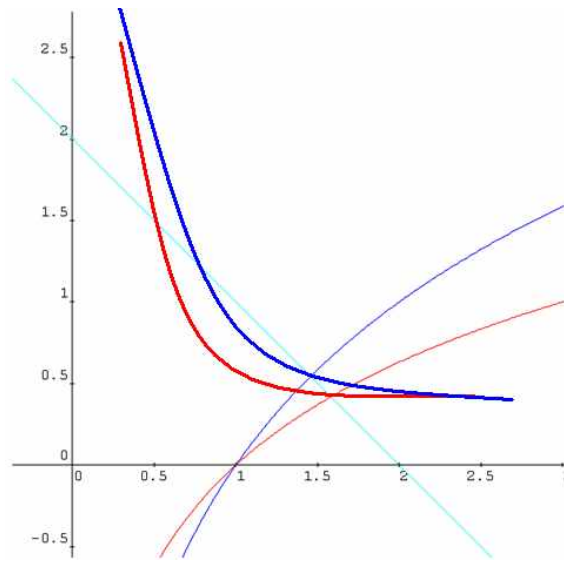
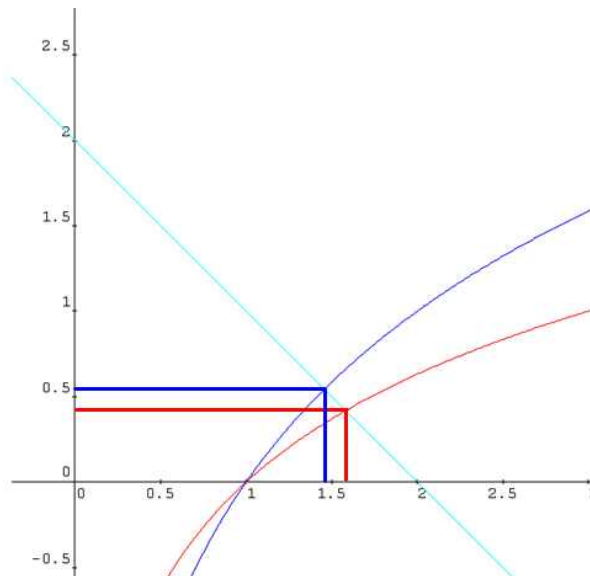
ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$

ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제자가 의도했을 법하게 대수적으로 x, y 중 한 문자에 관한 식으로 변형해서 푸는 것도 훌륭하지만요, (그리고 실제로 이렇게 해야만 풀리는 기출 문제들도 여럿 있었고.)

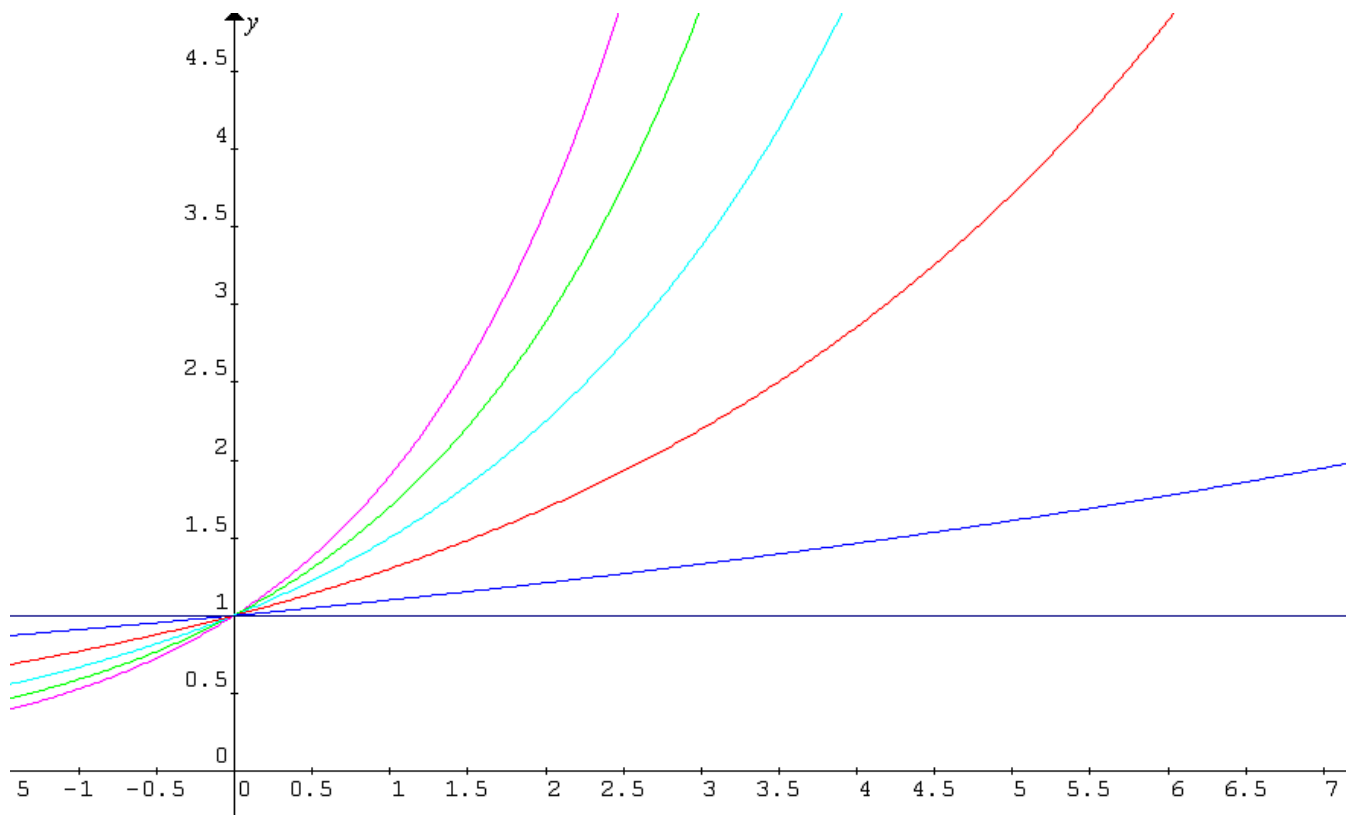
식을 건드리지 않고서 기하학적으로 xy 가 의미 하는 바를 추적해서 푸는 것도 나름 괜찮다고 보거든요. 그러면 일단 저 수능 문제 ㄷ에서 의미하는 바는



좌측 그림처럼 직사각형의 넓이로 볼 수도 있지만, 우측 그림처럼 $xy = k$ 형태의 쌍곡선에서 k 값 대소비교로도 볼 수 있습니다. (교과서에는 대놓고 안 나오지만, 이미 직관이 알고 있는 그 내용 말이죠 ㅎㅎ)
그래서 위 수능 문제는 밑이 2, 3인 두 로그함수 분간만 잘해서 그려보면 쉽게 풀리죠. 참이라구요.

이 방식만을 이용해서 풀기에는 독동에 올라온 문제가 만만찮네요 ㅎㅎ
그래서 필요한 개념 하나를 더 소개합니다.

지수함수 기본 형태인 $y = a^x$ ($a > 1$)에서 밑인 a 가 1에 가까워지면, 그러니까 $a \rightarrow 1+0$ 이면 지수함수는 $y = 1$ 에 가까워집니다.

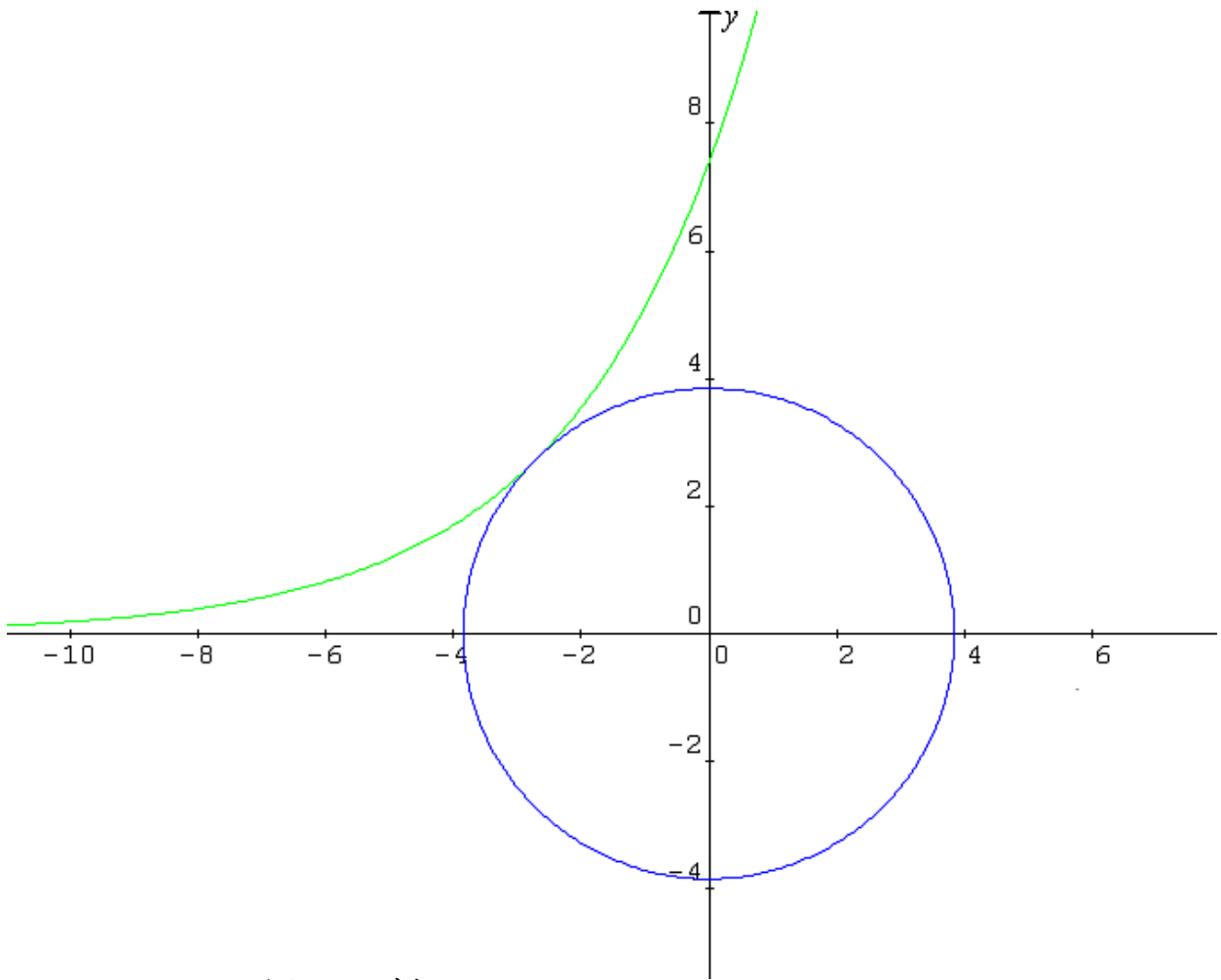


순서대로 $y = (1.9)^x$, $y = (1.7)^x$, $y = (1.5)^x$, $y = (1.3)^x$, $y = (1.1)^x$, $y = 1$ 입니다.

그리고 $f(x) = a^{x+b}$ ($a > 1$)에서 밑인 a 는 일단 나중에 정하기 나중이고, 지수의 b 는 지수함수의 기본 형태 $y = a^x$ 를 x 축 음의 방향으로 b 만큼 평행이동 한 것이죠.

이제 필요한 내용들을 소개했네요 ㅎㅎ 본론으로 가봅시다 ㅇ_ㅇ;

written by ictteru_



(참고로 Graphmatica라는 승동T께서 추천해주신 그 프로그램으로 그린 겁니다. 파란 원은 주어진 원이고, 연두색 지수함수 그래프는 나중에 계산해서 나온 수치들을 입력해서 접하도록 임의로 맞춰 그린 거예요.)

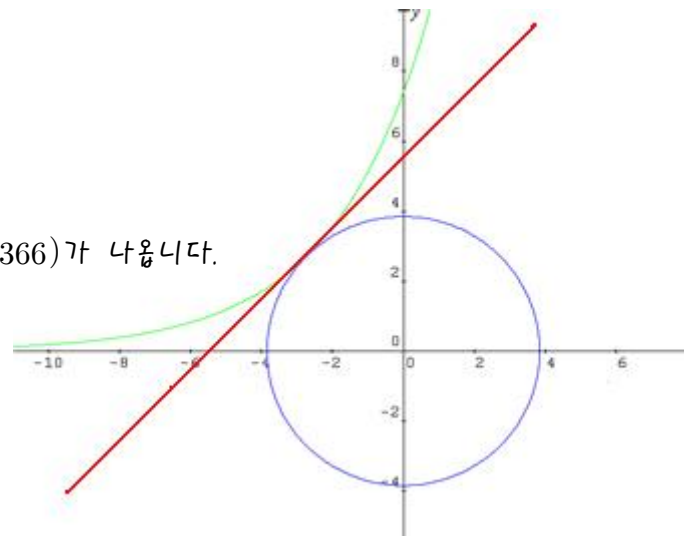
그부터 봅시다. $g(a)$ 는 아까 언급한 쌍곡선에서의 k 값에 해당하는 수치인데, 접점의 좌표를 잘 보면 $x_a < 0 < y_a$ 이므로 $g(a) < 0$ 임을 알 수 있습니다. (일종의 부호 낚시입니다.) 이 때 최솟값이 되려면, 직사각형 넓이가 최대가 되어야겠죠. 그러면 접점이 $(-e, e)$ 가 되어야 합니다. 이 때 지수함수와 원과의 접점에서 기울기가 1이 되는데, 여기서 굳이 원의 반지름을 $\sqrt{2}e$ 로 주신 출제자분의 배려를 느낄 수 있죠.ㅎ

(직관적으로 ‘당연하지~!’ 하고 이해하며 넘어가주셨으면 좋겠지만, 그래도 ‘왜 그러냐?’ 고 물어보신다면;; 변수가 많은 지수함수 가지고 끄적이지 마시고, 원 위의 점이니까 $(x, y) = (\sqrt{2}e \cos \theta, \sqrt{2}e \sin \theta)$ 로 삼각치환해서 $g(a)$ 를 계산해보세요.ㅇ_ㅇ;)

고로,

1. 지수함수가 $(-e, e)$ 를 지남
2. $(-e, e)$ 에서 지수함수의 접선의 기울기가 1

이 조건을 연립해보면 $a = e^{\frac{1}{e}}$ (≈ 1.4447), $b = 2e$ (≈ 5.4366)가 나옵니다.



written by ictteru_

이제 ㄴ을 봅시다. (출제자분과 의견이 엇갈렸던 부분인데요, 애타 이 글을 읽고 계시는 여러분들 생각이 저와 다르다면 얼마든지 태클 걸어 주세요 ^^;)

고정된 원에 밑이 1보다 큰 지수함수를 적절히 평행이동 시킨 게 접하고 있습니다.

만약에 $g(a)$ 가 최솟값이었던 a 보다 더 작아진다면..

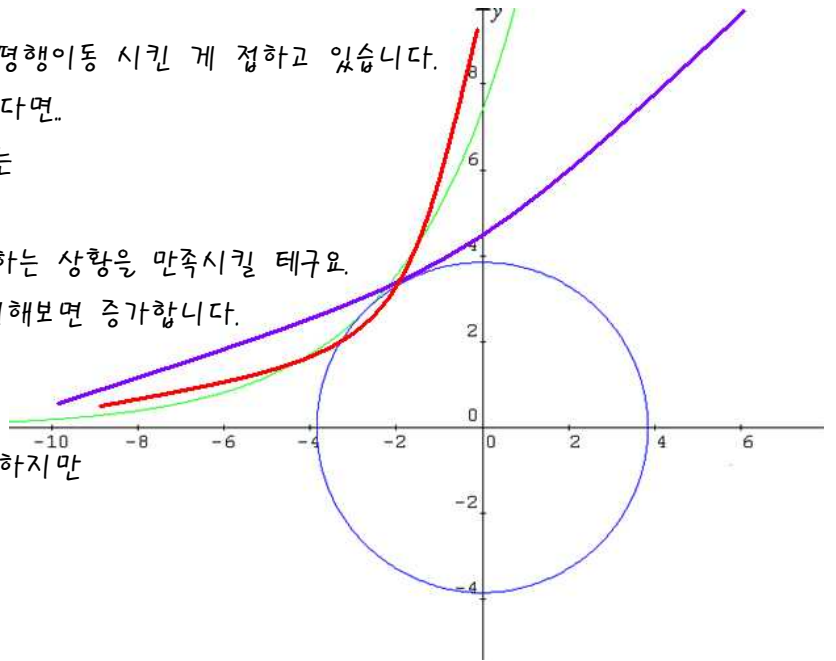
밑이 1에 가까워지므로 (보라색) 지수함수 $f(x)$ 는

전체적으로 $y = 1$ 에 가깝도록 높겠죠.

그러면서도 b 값 또한 증가하면서 두 그래프가 접하는 상황을 만족시킬 테구요.

이 때 k 값은 그 절댓값이 감소하므로, 부호를 고려해보면 증가합니다.

즉 $g(a)$ 가 증가한다는 말이죠.



(참고로, 지수함수는 원과 접하는 형태가 되어야 하지만

빨간색으로 그린 점근선이 x, y 축인 쌍곡선은

원과 교점을 여럿 가져도 상관없습니다.)

이번엔 반대로

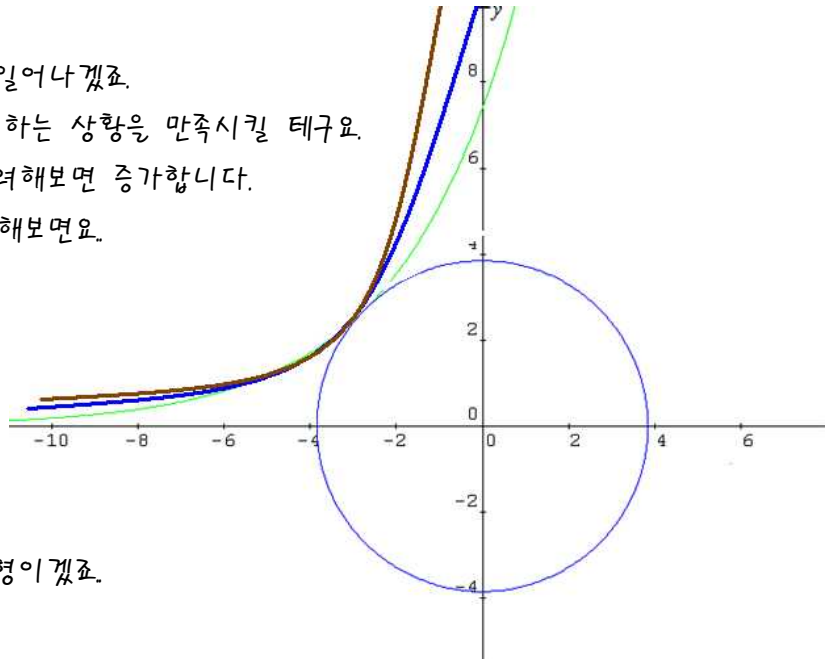
$g(a)$ 가 최솟값이었던 a 보다 더 커진다면.

지수함수가 전체적으로 $y = 1$ 에서 멀어지도록 일어나겠죠.

그러면서도 b 값 또한 감소하면서 두 그래프가 접하는 상황을 만족시킬 테구요.

이 때 k 값은 그 절댓값이 감소하므로, 부호를 고려해보면 증가합니다.

역시나 $g(a)$ 가 증가한다는 말이죠, k 값은 고려해보면요.



고로, ㄱ의 상황이 유일한 최솟값입니다.

아마 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 일 때, $g(a)$ 가 최솟값을 갖는 개형이겠죠.

따라서 ㄴ은 거짓.

마지막으로 ㄷ은 뭐 계산 없이 쉽게 알 수 있습니다. 실질적인 계산은 ㄱ에서 끝나고, ㄴ, ㄷ은 눈으로 풀죠 ㅎㅎ

애타 a 가 $e^{\frac{1}{e}}$ 보다 작아진다면, b 값 또한 증가하면서 두 그래프가 접하는 상황을 만족시켜야 합니다. 그러므로 거짓!

따라서 답은 ① ㄱ.. 이라고 전 생각합니다 ㅇ_ㅇ;

written by ictteru_