

제 2 교시

수학 영역(B형)

홀수형

5지선다형

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A(A+E)$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2. 두 벡터 $\vec{a} = (3, 1, a+1)$, $\vec{b} = (2, 3a, 2)$ 가 서로 수직일 때, a 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{11}{8}$ ② $-\frac{8}{5}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec x}{\ln(1+x)^{3x}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_5 - a_3 = 5, \quad a_2 + a_4 = 4$$

을 만족시킬 때, a_9 의 값은? [3점]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

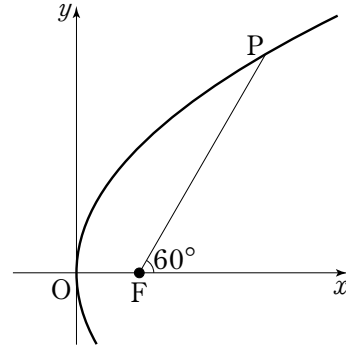
5. 한 개의 주사위를 5번 던질 때, 소수의 눈이 4번 이상 나올 확률은? [3점]

- ① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

6. 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 k ($k > 0$)인 닮음변환을 f , 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ 가 나타내는 일차변환을 g 라 할 때, 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 점 $(2, 1)$ 이 점 $(6, 16)$ 으로 옮겨진다. $a+k$ 의 값은? [3점]

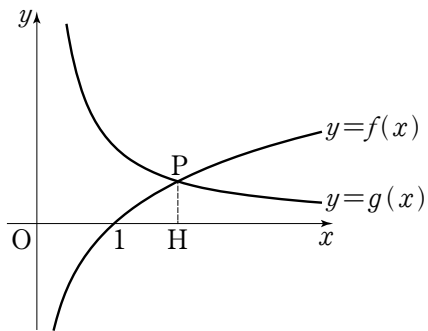
- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$)의 초점을 F라 하고, 점 F를 지나고 x 축의 양의 방향과 60° 의 각을 이루는 직선이 포물선 $y^2 = 4px$ 와 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 직선 OP의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [3점]



- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

[8~9] 그림은 두 함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점을 P라 할 때, 8번과 9번의 두 물음에 답하시오.
(단, $a > 10$ 이다.)



8. 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{OP} = \sqrt{5}\overline{PH}$ 일 때, a^2 의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

- ① 2 ② $2^{\sqrt{2}}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2^{2\sqrt{2}}$

9. 점 P의 x 좌표가 e 일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는? (단, e 는 자연로그의 밑이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $1-\frac{2}{e}$ ③ $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ ④ $1+\frac{1}{2e}$ ⑤ $1-\frac{1}{e}$

10. 100 이상 10,000 미만의 자연수 중에서 각 자릿수의 합이 9인 것의 개수는? [3점]

- ① 150 ② 180 ③ 210 ④ 240 ⑤ 270

11. 함수 $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

12. 금속에 열을 가하면 열에너지를 얻어 열전자를 방출한다.

일함수가 W 인 금속이 $T(K)$ 의 온도에서 열전자를 방출할 때, 방출하는 열전자의 밀도를 $I(A/cm^2)$ 라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$I = 120 T^2 k^{\frac{W}{T}} \quad (\text{단, } k \text{는 상수이다.})$$

일함수가 W_1 인 금속 A 가 1000의 온도에서 방출하는 열전자의

밀도가 8.0×10^{-18} 일 때, 일함수가 $\frac{1}{2} W_1$ 인 금속 B 가 3000의

온도에서 방출하는 열전자의 밀도는? (단, $1.6^6 = 15$ 로 계산한다.)

[3점]

- ① 25000 ② 37500 ③ 50000 ④ 67500 ⑤ 75000

13. 정규분포를 따르는 모집단에서 추출한 두 표본 A, B에 대한 정보는 다음과 같다.

표본	크기	평균	표준편차
A	100	40	21
B	64	45	18

표본 A로 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간과 표본 B로 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간에 동시에 속하는 모든 정수의 합은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4750$ 으로 계산한다.)

[3점]

- ① 164 ② 166 ③ 168 ④ 170 ⑤ 172

14. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = -4$ 이고,

$$a_{n+1} - \frac{2}{n}a_n = \frac{2}{(n-1)!} \quad (n \geq 1)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터

$$\frac{n!}{2^{n+1}}a_{n+1} - \frac{(n-1)!}{2^n}a_n = \boxed{(가)} \quad (n \geq 1)$$

이다. 위 식으로부터, 모든 자연수 k에 대하여

$$\frac{k!}{2^{k+1}}a_{k+1} + \frac{k+1}{2^k} = \frac{(k-1)!}{2^k}a_k + \frac{k}{2^{k-1}} + \boxed{(나)}$$

이므로

$$\frac{(n-1)!}{2^n}a_n + \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{a_1}{2} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서

$$a_n = \boxed{(다)} \quad (n \geq 2)$$

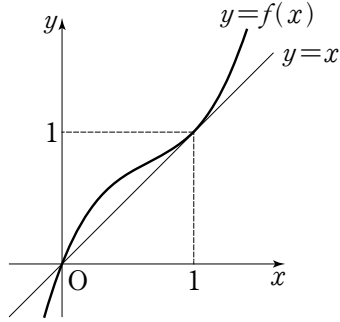
이다.

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$, $h(n)$ 이라

할 때, $\frac{f(10)}{g(8)h(5)}$ 의 값은? [4점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

15. 역함수가 존재하고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 점 $(1, 1)$ 에서 서로 접할 때, 방정식 $\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x} + \frac{2xf^{-1}(x)}{f(x)} = 2x$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$(A+E)(B+E) = 2E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$

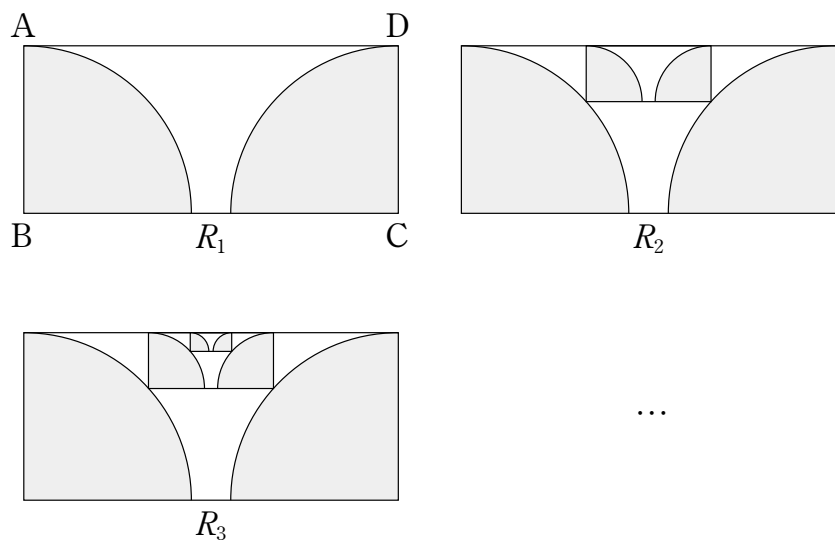
ㄴ. $(A^{-1}+E)(B^{-1}+E) = 2B^{-1}A^{-1}$

ㄷ. $A^{-1}+B^{-1} = 2E$ 이면 $A+B = \frac{2}{3}E$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

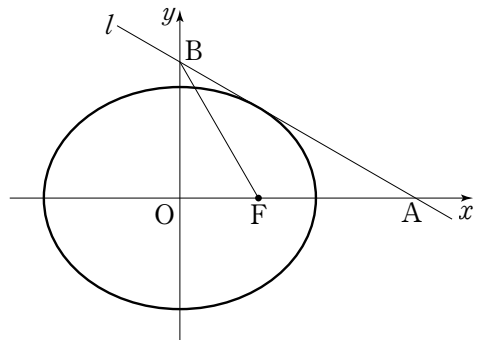
17. $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$ 인 직사각형 ABCD의 내부에 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 그리고, 직사각형 ABCD의 내부와 각 원의 내부의 공통부분에 색을 칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $\sqrt{5}:1$ 인 직사각형을 R_1 에서 색이 칠해지지 않은 영역에 내접하도록 그리고, 이 직사각형의 내부에 직사각형 ABCD에서 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 색을 칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?

(단, 모든 직사각형의 한 변은 선분 AD 위에 있다.) [4점]



- ① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{9}{16}\pi$ ③ $\frac{5}{8}\pi$ ④ $\frac{11}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

18. 한 초점이 F(3, 0)인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 직선을 l 이라 하자. 직선 l 이 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B라 할 때, $\overline{AF}=6$ 이고, 직선 BF가 $\angle OBA$ 를 이등분한다. a^2+b^2 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



- ① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

19. 좌표공간에서 xy 평면 위에 원 $C_1: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ 이 있고, yz 평면 위에 원 $C_2: (y-4)^2 + (z-1)^2 = 1$ 이 있다. 두 원 C_1, C_2 가 각각 평면 $ax+3y+bz=3$ 과 한 점에서 만날 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

20. $f(0)=0$ 이고, $x>0$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2+x} \quad (x > 0)$$

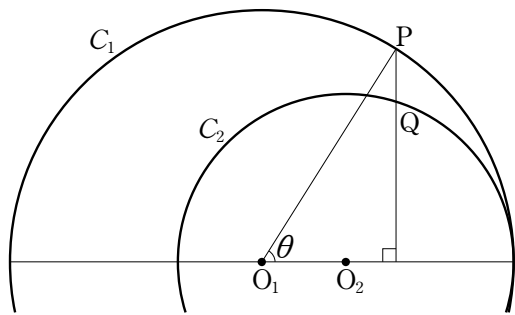
이다. 점 P가 원점에서 출발하여 곡선 $y=f(x)$ 위를 매초 1의 속력으로 y 좌표가 증가하는 방향으로 움직일 때, 출발한 후 t 초가 지난 뒤의 점 P의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하자.

$\int_2^6 g(t)dt$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{29}{6}$ ② $\frac{31}{6}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{35}{6}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

21. 평면 위에 $\overline{O_1O_2}=1$ 인 두 점 O_1, O_2 가 있고, 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1 과 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2 가 있다. 원 C_1 위의 점 P 를 $\angle PO_1O_2 = \theta$ 가 되도록 잡을 때, 점 P 를 지나고 직선 O_1O_2 와 수직인 직선이 원 C_2 와 만나는 점 중에서 점 P 에 가까운 점을 Q 라 하자. 직선 O_1Q 와 직선 O_2P 가 이루는 예각의 크기를 $f(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\tan(f(\theta))}{\theta}$ 의 값은? [4점]



- ① $\sqrt{2}-1$ ② $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}$

단답형

22. $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}$ 일 때, $18\cos\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 허씨는 사과 20박스와 배 5박스를 가지고 있고, 남씨는 사과 12박스와 배 13박스를 가지고 있다. 허씨의 사과 x 박스를 남씨의 배 $2x-1$ 박스와 교환한 후, 허씨가 가진 과일 상자 중 배 상자의 비율을 $f(x)$, 남씨가 가진 과일 상자 중 배 상자의 비율을 $g(x)$ 라 하자. $f(x) > g(x)$ 를 만족시키는 자연수 x 의 최솟값을 구하시오. [3점]

24. 어느 기업에서는 일부 사원을 대상으로 두 프로젝트 A, B 를 실시하고 있다. 프로젝트 A 에 참여하는 사원은 전체의 $\frac{1}{3}$ 이고, 프로젝트 B 에 참여하는 사원은 전체의 $\frac{1}{4}$ 이다. 이 기업에서 선택한 한 사원이 프로젝트에 참여하는 사원일 때, 이 사원이 프로젝트 B 에 참여하는 사원일 확률을 p 라 하자. $35p$ 의 값을 구하시오. (단, 두 프로젝트에 동시에 참여하는 사원은 없다.)

[3점]

25. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(f(x)) = 2x^3 + 10x - 11$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선이 점 $(5, a)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하시오. [3점]

26. 확률변수 X 는 평균이 1이고 표준편차가 $\sqrt{3}$ 이다.

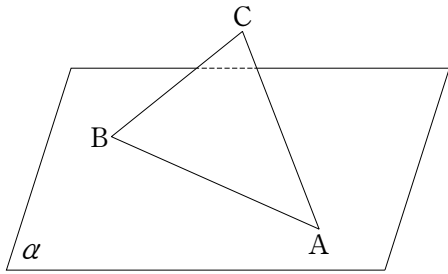
실수 t 에 대하여 확률변수 Y 를

$$Y = tX + 3$$

라 할 때, $E(Y^2)$ 의 최솟값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

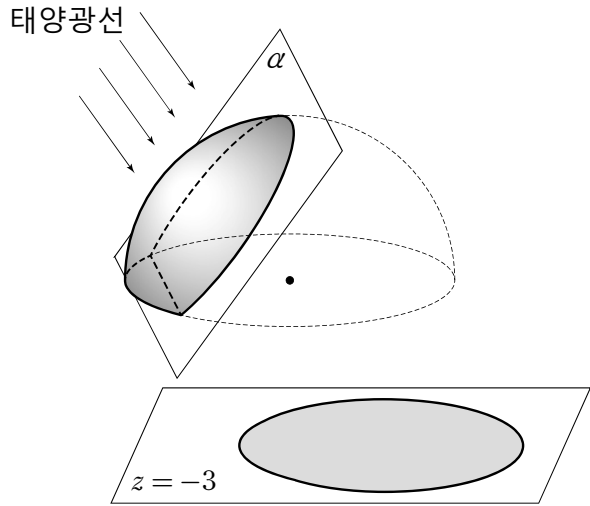
(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 예각삼각형 ABC의 두 점 A, B는 평면 α 위에 있고, 점 C와 평면 α 사이의 거리는 2이다. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=5$ 이고, 평면 α 와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기가 30° 일 때, \overline{AC}^2 의 값을 구하시오. [4점]



28. 역변환이 존재하는 일차변환 f 가 있다. 일차변환 f 에 의하여 직선 $l: 2x+3y=1$ 이 직선 $y=2$ 로 옮겨지고, 일차변환 $f \circ f$ 에 의하여 직선 l 이 직선 $x=3$ 으로 옮겨질 때, 일차변환 f 에 의하여 점 $(-3, 4)$ 는 점 (a, b) 로 옮겨진다. $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 반구 $x^2 + y^2 + z^2 = 18, z \geq 0$ 이 평면 $\alpha: \sqrt{2}y - z + 3\sqrt{2} = 0$ 에 의하여 나뉘는 두 부분 중에서 부피가 작은 쪽을 S 라 하자. 태양광선이 평면 α 에 수직인 방향으로 비출 때, 도형 S 에 의하여 평면 $z = -3$ 에 생기는 그림자의 넓이는 $(a + b\sqrt{3})\pi$ 이다. ab 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]



30. 곡선 C 를 매개변수 t 를 이용하여 나타내면

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t^2 \\ y = 3t^5 - 4t^4 \end{cases}$$

이다. 곡선 C 위의 원점이 아닌 점 P 와 실수 k 에 대하여 집합

$$S = \{t \mid \text{원점과 점 } P \text{를 지나는 직선의 기울기는 } k \text{이다.}\}$$

의 원소의 개수를 $f(k)$ 라 하자. 함수 $f(k)$ 가 불연속인 모든 k 의

값의 합을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.