

②

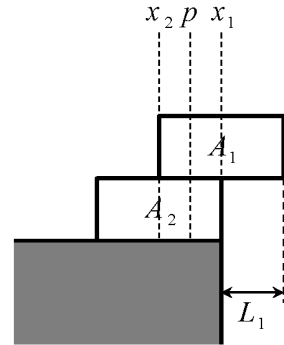
20의 ①과 같은 답안을 작성하면 된다.

③

그림 (b)에서 A_1, A_2 의 중심의 위치를 x_1, x_2 라 하면 두 벽들의 질량중심은

$\frac{x_1 + x_2}{2}$ 가 된다. 또한 오른쪽 그림과 같이 A_2 를 $x_1 - p$ 만큼 모서리쪽으로

밀 수 있으므로 $x_1 - p = \frac{1}{2}$ 이 되고 $L_2 = L_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ 이 된다.



④ $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ 전체의 질량중심이 오른쪽 그림의 x_1 에 위치하고 있다고 할 수 있다. 따라서 탑 전체의

질량중심은 x_1 과 x_2 를 $1:k-1$ 로 내분하는 곳에 위치하게 된다. 즉, $x_1 - p = \frac{1}{k}$ 에서, $L_k = L_{k-1} + \frac{1}{k}$ 이고

$L_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$ 임을 알 수 있다.

22

①-1. Comprehension

주어진 함수를 $f(x) = x^2 + 1$ 라 하고,

$P_1(a_1, a_1^2 + 1)$ 에서 접선의 방정식을 $h_1(x)$,

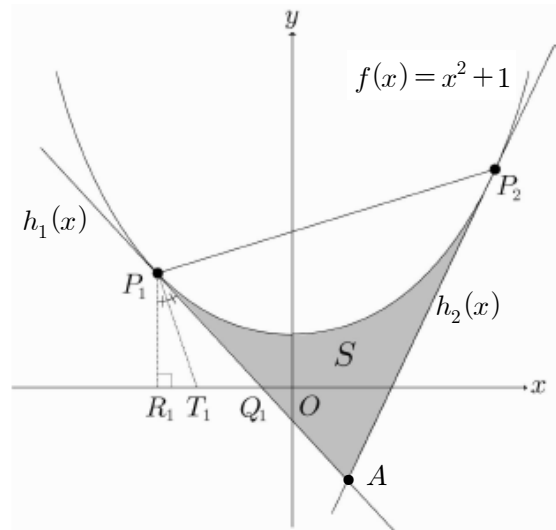
$P_2(a_2, a_2^2 + 1)$ 에서 접선의 방정식을 $h_2(x)$ 라 하자.

$f(x) - h_1(x)$ 의 그래프와 $f(x) - h_2(x)$ 를 같은 평면좌표 위에 그린 후, 두 함수의 교점 A' 의 x 좌표를 찾아보자.

$(x - a_1)^2 = (x - a_2)^2$ 이므로,

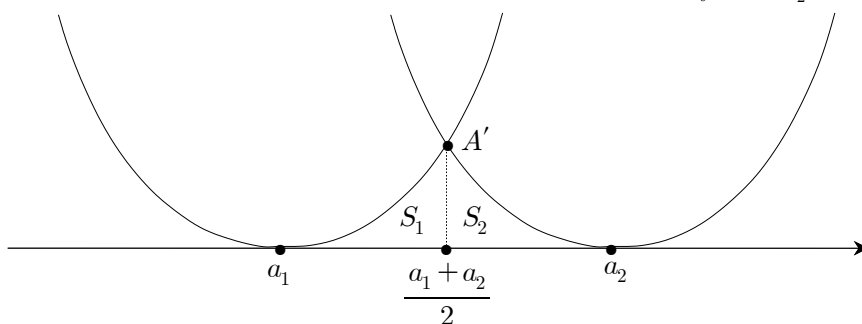
$x - a_1 = a_2 - x$ ($\because a_1 \neq a_2$)이다.

따라서 $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$ 가 된다.



$$f(x) - h_1(x) = (x - a_1)^2$$

$$f(x) - h_2(x) = (x - a_2)^2$$



(A 의 x 좌표) = (A' 의 x 좌표) 이고, 주어진 두 함수의 모양이 같고 각각 $x = a_1, x = a_2$ 대칭이므로 $S_1 = S_2$

$$\begin{aligned}
 \text{따라서 } S &= 2 \int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}} \{f(x) - h_1(x)\} dx = 2 \int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}} (x - a_1)^2 dx = 2 \int_0^{\frac{a_2-a_1}{2}} x^2 dx \quad (\because \text{평행이동과 정적분}) \\
 &= 2 \left(\frac{a_2-a_1}{2} \right) \int_0^1 \left\{ \left(\frac{a_2-a_1}{2} \right) x \right\}^2 dx \quad (\because \text{치환 적분}) = 2 \left(\frac{a_2-a_1}{2} \right)^3 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left(\frac{a_2-a_1}{2} \right)^3 \times \frac{1}{3} = \\
 &\quad \frac{1}{12} (a_2 - a_1)^3
 \end{aligned}$$

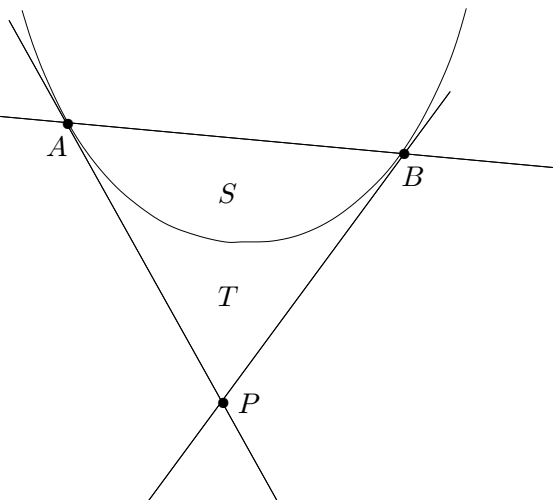
①-2. Point

point 1

포물선의 대표적인 두 가지 성질이 출제되어서 포물선을 깊게 공부해본 학생이라면 쉽게 풀 수 있었다.

평소에 이차곡선의 여러 가지 성질을 접해보고

증명을 해본다면 논술에 많은 도움이 될 것이다. 공식을 외우는 것 보다 증명을 해보는 것이 중요하다.



포물선 성질 1

포물선 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 있고, A 에서의 접선과 B 에서의 접선 두 접선이 있을 때

$$(\text{두 접선의 교점 } P \text{의 } x\text{좌표}) = \left(\frac{A \text{의 } x\text{좌표} + B \text{의 } x\text{좌표}}{2} \right)$$

포물선 성질 2

두 접선과 포물선 사이에 만들어진 도형의 넓이 T 와 직선 AB 와 포물선 사이에 만들어진 도형의 넓이 S 에 대하여

$$S : T = 2 : 1$$

point 2

정적분을 할 때, 단순히 정적분을 하기보다 “평행이동과 정적분” “치환적분”을 적절히 활용해서 적분을 하면 계산량을 많이 줄일 수 있다.

$\int_a^b f(x) dx$ 를 0에서 1까지 정적분으로 고치는 연습을 해보면 된다.

일단, 평행이동을 이용해서 아래끝을 0으로 고친다. $\int_a^b f(x) dx = \int_0^{b-a} f(x+a) dx$

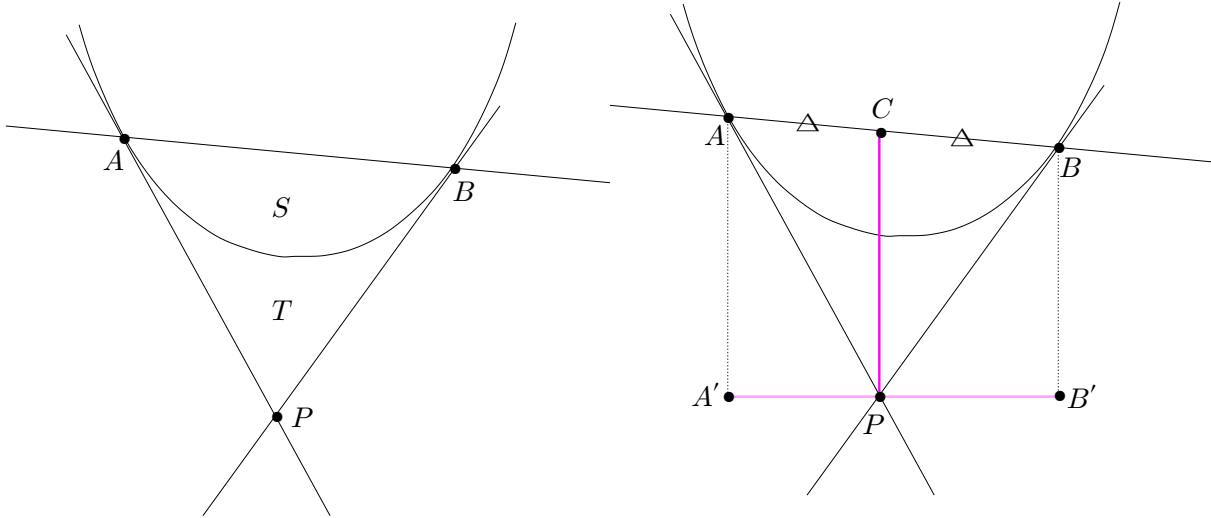
이제 $b-a$ 를 1로 바꾸어야 하는데 $x = (b-a)t$ 로 치환하면 1로 바뀌게 된다.

$$\int_0^{b-a} f(x+a) dx = (b-a) \int_0^1 f((b-a)t+a) dt = (b-a) \int_0^1 f((b-a)x+a) dx \quad (t \text{보다는 편의상 } x \text{로 하겠}$$

다.) 이렇게 해서 $\int_a^b f(x) dx$ 를 0에서 1까지 정적분으로 고쳤다.

이처럼 적분 구간을 조절하면 더 깔끔하고 멋진 답안이 나올 수 있다.

point 3

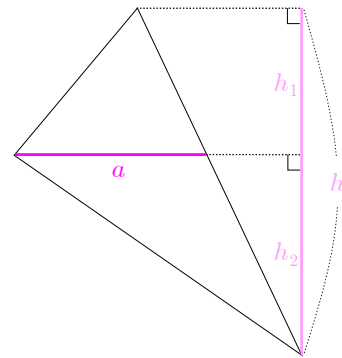


삼각형 APB 에서 넓이 S 를 빼도 넓이 T 를 찾을 수 있다.
삼각형의 넓이를 찾기 전에 삼각형 넓이를 찾는 방법을 한 가지 배워보자.

그림에서 붉은색 선 위에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_1$ 붉은색 선 아래에

있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_2$ 이므로, 삼각형의 넓이

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}ah \text{ 가 된다.}$$



점 A 에서의 접선의 방정식 : $y = 2a_1(x - a_1) + a_1^2 + 1$

점 B 에서의 접선의 방정식 : $y = 2a_2(x - a_2) + a_2^2 + 1$

연립해서 점 P 의 좌표를 찾으면 $P\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, a_1a_2 + 1\right)$, 또 선분 AB 의 중점 C 의 y 좌표는 $\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + 1$ 이다.

따라서 $\overline{PC} = \frac{(a_2 - a_1)^2}{2}$, $\overline{A'B'} = a_2 - a_1$ 이다.

삼각형 APB 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{A'B'} = \frac{1}{4}(a_2 - a_1)^3 = S + T$

넓이 $S = \left| \int_{a_1}^{a_2} (x - a_1)(x - a_2) dx \right| = \left| \int_0^{a_2 - a_1} x(x + a_1 - a_2) dx \right|$ ($\because$ 평행이동과 정적분)

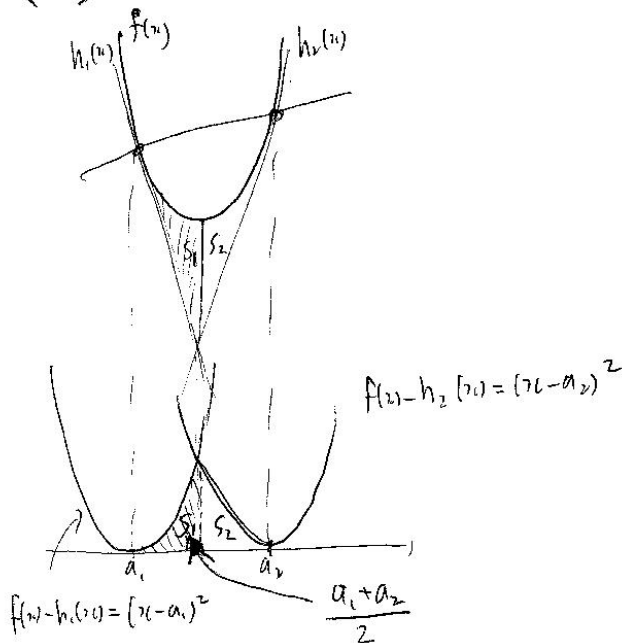
$= \left| (a_2 - a_1) \int_0^1 (a_2 - a_1)x \{ (a_2 - a_1)x - (a_2 - a_1) \} dx \right| = \left| (a_2 - a_1)^3 \int_0^1 x(x - 1) dx \right| =$ ($\because$ 치환 적분)

$\left| (a_2 - a_1)^3 \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| = \left| \frac{1}{6}(a_2 - a_1)^3 \right| = \frac{1}{6}(a_2 - a_1)^3$ ($\because a_2 > a_1$)

$\therefore T = \frac{1}{4}(a_2 - a_1)^3 - \frac{1}{6}(a_2 - a_1)^3 = \frac{1}{12}(a_2 - a_1)^3$

①-3. Actual Fight

< a >



$$(x - a_1)^2 = (x - a_2)^2$$

$$x - a_1 = a_2 - x \quad (\because a_1 \neq a_2)$$

$$x = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\therefore S_1 = S_2 \text{ 이므로 구하는 넓이 } S = 2 \int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}} (x - a_1)^2 dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{a_2-a_1}{2}} x^2 dx \quad (\because \text{평행이동}) = 2 \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right) \int_0^1 \left\{ \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right) x \right\}^2 dx$$

(∵ 치환적분)

$$= 2 \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right)^3 \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{12} (a_2 - a_1)^3$$

그래프나 그림을 많이 그려가면서 서술하는 것이 논리적인 답안 작성에 매우 도움이 된다.

②-1. Comprehension

직선 P_1Q_1 의 기울기는 $2a_1$ 이므로 x 좌표가 1증가할 동안 y 좌표가 $2a_1$

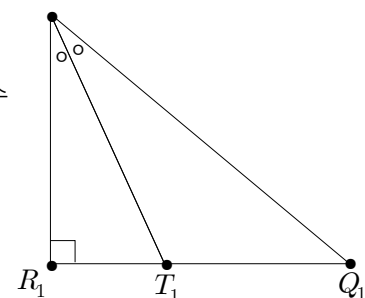
변화한다. 따라서 $\overline{R_1Q_1} : \overline{P_1R_1} = 1 : -2a_1$ ($a_1 < 0$)이 된다.

피타고라스 정리를 사용하면 $\overline{P_1R_1} : \overline{P_1Q_1} = -2a_1 : \sqrt{4a_1^2 + 1}$ 임을 알 수

있다. 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{P_1R_1} : \overline{P_1Q_1} = \overline{R_1T_1} : \overline{T_1Q_1}$ 이므로

$$\overline{OT_1} = \frac{(-2a_1)\overline{OQ_1} + \sqrt{4a_1^2 + 1}\overline{OR_1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}} \text{ 이 된다.}$$

$$P_1(a_1, a_1^2 + 1)$$



직선 P_1Q_1 의 방정식은 $y = 2a_1(x - a_1) + a_1^2 + 1$ 이므로 x 절편 Q_1 은 $\left(\frac{a_1^2 - 1}{2a_1}, 0\right)$ 이 된다.

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{(-2a_1) \times \left(\frac{a_1^2 - 1}{2a_1}, 0\right) + \sqrt{4a_1^2 + 1} \times (a_1, 0)}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}} = \left(\frac{-a_1^2 + 1 + a_1\sqrt{4a_1^2 + 1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}}, 0\right)$$

$$\therefore T_1 \text{의 } x\text{좌표} = \frac{-a_1^2 + 1 + a_1\sqrt{4a_1^2 + 1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}}$$

②-2. Point

point 1

각의 이등분선의 정리를 사용하는 간단한 문제인데, 벡터를 활용하라고 논제에 제시되어 있다. 사실 벡터라는 것이 어차피 점의 좌표이므로 크게 신경 쓰지 말고 내분점을 찾으면 정답이 나온다. 그런데 계산이 복잡해서 중간에 포기한 학생이 많았을 것이다. 기울기 $2a_1$ 을 잘 활용해서 비율을 찾는 것이 문제의 핵심이다.

point 2

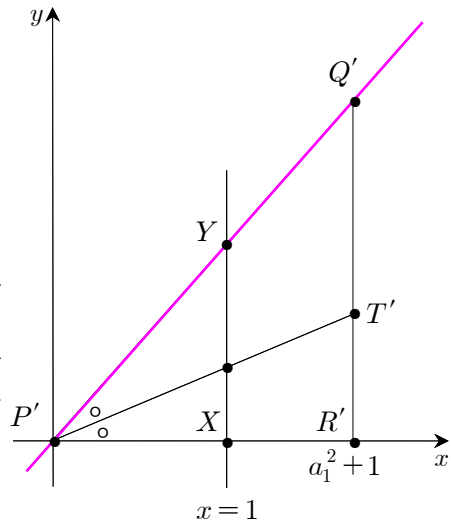
벡터를 의도적으로 활용하기 위해 조금 다르게 풀어 보겠다.

주어진 도형을 시계 반대방향으로 90° 회전해서 점 P_1 을 원점이 되도록 옮기면 직선 $P'Q'$ 는 직선 P_1Q_1 과 수직이므로 방정식이

$$y = \left(-\frac{1}{2a_1}\right)x \text{ 가 되고}$$

$$Q' = \left(a_1^2 + 1, -\frac{a_1^2 + 1}{2a_1}\right) \text{ 여기서 각의 이등분 직선인 } \overrightarrow{P'T'}$$

아보자. $\overrightarrow{P'R'} + \overrightarrow{P'Q'}$ 는 평행사변형에 의해서 각의이등분 벡터가 나오지 않는다. 두 벡터를 더할 때 두 벡터의 크기가 똑같다면 더했을 때 마름모가 그려지므로 각의 이등분 벡터가 나오게 된다.



즉, $\overrightarrow{P'R'} + \overrightarrow{P'Q'}$ 이 아닌 $\frac{\overrightarrow{P'R'}}{|\overrightarrow{P'R'}|} + \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{|\overrightarrow{P'Q'}|}$ 을 구하면 된다.

$$\frac{\overrightarrow{P'R'}}{|\overrightarrow{P'R'}|} + \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{|\overrightarrow{P'Q'}|} = \frac{\overrightarrow{P'X}}{|\overrightarrow{P'X}|} + \frac{\overrightarrow{P'Y}}{|\overrightarrow{P'Y}|} = (1, 0) + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4a_1^2}}} \left(1, -\frac{1}{2a_1}\right)$$

$= (1, 0) + \frac{2a_1}{-\sqrt{4a_1^2 + 1}} \left(1, -\frac{1}{2a_1}\right) = \left(-\frac{2a_1}{\sqrt{4a_1^2 + 1}} + 1, \frac{1}{\sqrt{4a_1^2 + 1}}\right)$ 이다. 이 벡터의 y 성분을 x 성분으로 나누면 각의 이등분선의 기울기가 나온다.

각의 이등분 직선 $\overrightarrow{P'T'}$ 의 기울기 $= \frac{1}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}}$ 즉, 방정식은 $y = \left(\frac{1}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}}\right)x$ 이다.

직선의 방정식에 $a_1^2 + 1$ 을 대입해서 T' 의 y 좌표를 찾으면 $\frac{a_1^2 + 1}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2 + 1}}$ 이다.

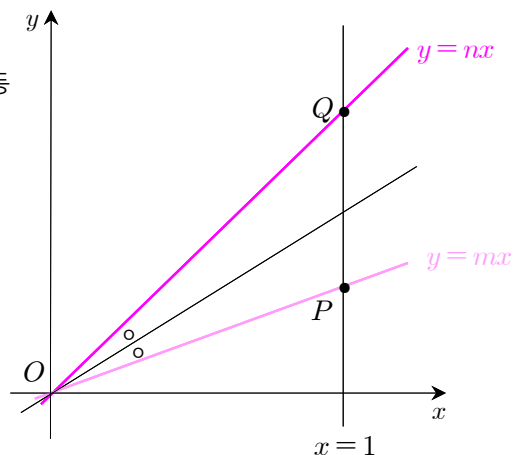
따라서 $\overrightarrow{R'T'} = \frac{a_1^2 + 1}{\sqrt{4a_1^2 + 1} - 2a_1} = \overrightarrow{R_1T_1}$ 이다. 따라서 T_1 의 x 좌표는 $a_1 + \frac{a_1^2 + 1}{\sqrt{4a_1^2 + 1} - 2a_1}$

point 3

각의 이등분선을 찾는 좋은 방법을 배워보자.

$P(1, m)$, $Q(1, n)$ 에 대하여 $\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} + \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$ 이 각의 이등분 벡터가 된다.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} + \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|} &= \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}(1, m) + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}(1, n) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right)\end{aligned}$$



따라서 각의 이등분 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}} = \frac{m\sqrt{n^2+1} + n\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}}$$

이 된다.

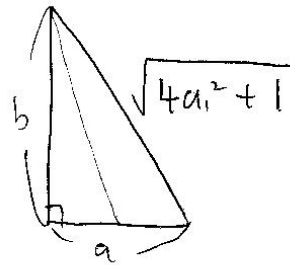
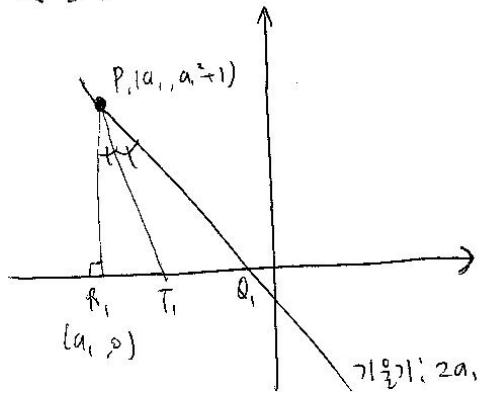
즉 각의 이등분 직선의 방정식은 $y = \left(\frac{m\sqrt{n^2+1} + n\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}} \right)x$ 가 된다.

특히, $m=0$ 일 때 $y = \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1} + 1} \right)x$ 이 된다. 여기서, $n = -\frac{1}{2a_1}$ 이라 하면 주어진 문제가 되겠다.

이처럼 각의 이등분 직선을 찾을 때 점과 직선사이의 거리를 활용해도 되지만 각의 이등분 벡터를 활용해도 된다. 공간좌표 상의 각의 이등분 평면 찾을 때도 법선벡터의 이등분 벡터를 활용해 보길 바란다.

②-3. Actual Fight

< b >



기울기가 $-2a_1$ 이므로

$$a:b = 1:-2a_1 \quad (\because a_1 < 0)$$

$$\therefore \text{각의 이등분선의 성질에 따라 } \overline{R,T_1} : \overline{T_1,Q} = -2a_1 : \sqrt{4a_1^2+1}$$

$$\text{직선 } P,Q \text{ 의 방정식: } y = 2a_1(x - a_1) + a_1^2 + 1 = 2a_1x - a_1^2 + 1$$

기절편을 찾아 보면 $2a_1x - a_1^2 + 1 = 0$ 에서

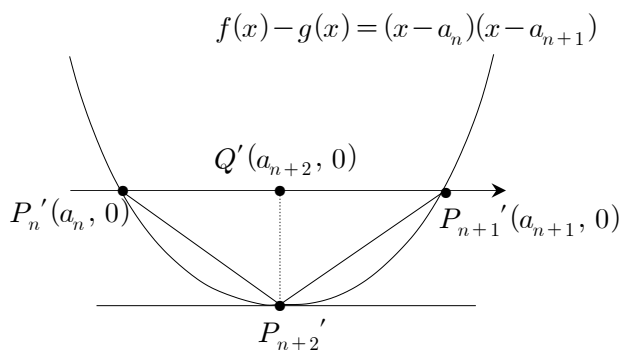
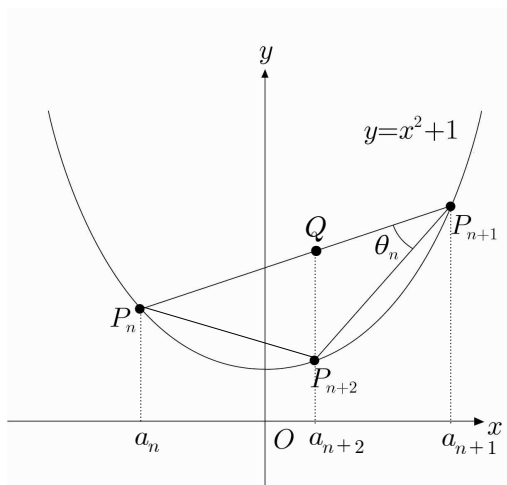
$$x = \frac{a_1^2 - 1}{2a_1} \rightarrow Q\left(\frac{a_1^2 - 1}{2a_1}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{-2a_1 \overrightarrow{OQ} + \sqrt{4a_1^2+1} \overrightarrow{OR}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2+1}} = \left(\frac{-2a_1 \cdot \frac{a_1^2-1}{2a_1} + a_1 \sqrt{4a_1^2+1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2+1}}, 0 \right)$$

$$= \left(\frac{1 - a_1^2 + a_1 \sqrt{4a_1^2+1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2+1}}, 0 \right) = T_1 \text{의 } x \text{좌표}$$

시험장에서는, 시험장에서 주는 연습장에 계산을 하고, 답안지에는 계산과정을 많이 생략해도 된다.

③-1. Comprehension



직선 $P_n P_{n+1}$ 의 방정식을 $g(x)$ 라 하고 $f(x) = x^2 + 1$ 라 하자.

$f(x) - g(x)$ 의 그래프를 그려보면 오른쪽 그림과 같이 되는데, 도함수는 $f'(x) - g'(x)$ 이므로

$f'(x) - g'(x) = 0$ 을 만족하는 $x = a_{n+2}$ 가 된다. 그런데 $f(x) - g(x)$ 은 이차함수 이므로 두 실근 a_n, a_{n+1} 의

중점에서 접선의 기울기가 0, $f'(x) - g'(x) = 0$ 이다. 따라서 $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 가 된다.

또한 (삼각형 $P_n P_{n+2} Q$ 의 넓이) = (삼각형 $P'_n P_{n+2}' Q'$ 의 넓이) (밑변과 높이가 동일) 이고

(삼각형 $Q P_{n+2} P_{n+1}$ 의 넓이) = (삼각형 $Q' P_{n+2}' P_{n+1}'$ 의 넓이) (밑변과 높이가 동일) 이므로

(삼각형 $P_n P_{n+2} P_{n+1}$ 의 넓이) = (삼각형 $P'_n P_{n+2}' P_{n+1}'$ 의 넓이) 이다.

$$\overline{Q' P_{n+2}'} = |f(a_{n+2}) - g(a_{n+2})| = \left| \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2} - a_n \right) \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2} - a_{n+1} \right) \right| = \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{4}$$

$$\overline{P'_n P_{n+1}'} = |a_{n+1} - a_n| \text{이므로 삼각형 } P'_n P_{n+2}' P_{n+1}' \text{의}$$

$$\text{넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{Q' P_{n+2}'} \times \overline{P'_n P_{n+1}'} = \frac{1}{8} |a_{n+1} - a_n|^3 \text{ 또한,}$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \text{에서 } (a_{n+2} - a_{n+1}) = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \text{이므로, } a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{이다.}$$

$$\therefore \text{삼각형의 넓이} = \left(\frac{1}{8} \right)^n (a_2 - a_1)^3 \quad (\because a_2 - a_1 > 0)$$

③-2. Point

point 1

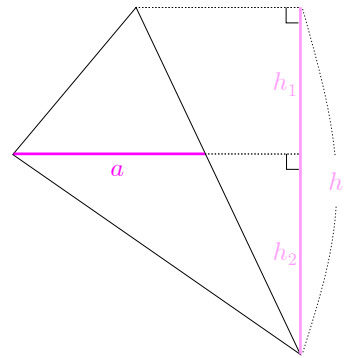
삼각형 넓이를 구하는 방법 중 하나인 이 내용이 또 사용되었다.

그림에서 빨간 선 위에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_1$

빨간 선 아래에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_2$ 이므로,

삼각형의 넓이 $S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}ah$ 가 된다.

수리가형에서도 가끔 활용되니 꼭 알아두도록 하자.



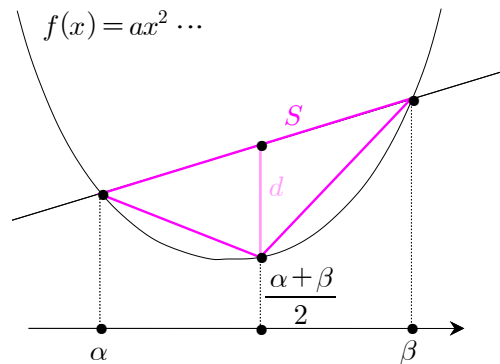
point 2

평소에 다음과 같은 공식을 증명해 봤다면 상당히 도움 되었을 것이다.

이차함수와 일차함수 사이의 최대길이: $d = \frac{a}{4}(\beta - \alpha)^2$

이차함수 내부의 삼각형 넓이의 최댓값: $S = \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3$

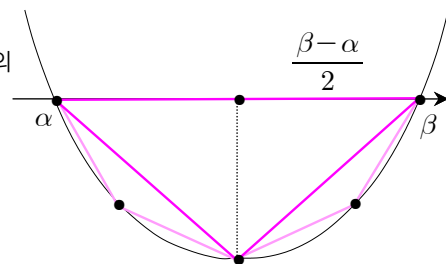
외우지 말고 평소에 증명을 해보면 논술에 도움이 된다.



위의 사실을 알고 있다는 가정 하에 이차함수와 일차함수 사이의 넓이 공식 $\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$ 을 정적분 하지 않고 증명해보겠다. (지학사 자습서에 있는 내용인데, 이 내용이 논술에 거의 그대로 출제 된 것이다.)

빨간색 삼각형 넓이 + 분홍색 삼각형 넓이 2개 + ... 이렇게 급수의 합을 구하면 $f(x)$ 와 x 축 사이의 넓이가 나온다.

빨간색 삼각형의 넓이 = $\frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3$ (초항) 이다.



그런데 파란색 삼각형은 x 좌표의 차이가 $\frac{1}{2}$ 로 작아지므로 삼각형의

넓이는 $\frac{1}{8}$ 배가 된다. $\left(\because S = \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3 \right)$ 그런데, 삼각형의 개수가 2배로 늘어나므로 공비는 $\frac{1}{4}$ 이 된다.

무한등비급수 공식에 따라 넓이 $\frac{\frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3 = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$

③-3. Actual Fight

(C)

상각형의 넓이 = $\frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

두 넓이가 같다.

상각형의 넓이 = $\frac{1}{2} d (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} d h$

$f'(x) = g'(x) = 0$
 $f(x) = g(x)$ 인 점 $\exists \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 이다.

$\frac{a_n + a_{n+1}}{2} = a_{n+2} \rightarrow 2a_{n+2} - a_n - a_{n+1} = 0 \quad \exists$

$(a_{n+2} - a_{n+1}) = \left(-\frac{1}{2}\right) (a_{n+1} - a_n)$

$\therefore, a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{--- ①}$

$f(x) - g(x) = (x - a_n)(x - a_{n+1})$

$d = \left| f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) - g\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \right| = -\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right) \left(\frac{a_n - a_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{4} (a_{n+1} - a_n)^2$

$\therefore$ 상각형의 넓이 = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (a_{n+1} - a_n)^2 \cdot |a_{n+1} - a_n|$

$= \frac{1}{8} |a_{n+1} - a_n|^3 = \frac{1}{8} (a_2 - a_1)^3 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\}^{n-1}$

$= (a_2 - a_1)^3 \left(\frac{1}{8}\right)^n$

수리논술 문제 마다 조금씩 다르겠지만 실제 답안지에 한글을 많이 적을 필요가 없다.

④-1. Comprehension

직선 $P_n P_{n+1}$ 과 x 축의 양의방향과 이루는 각을 α_n 이라 하

면 $\tan \alpha_n$ 이 직선의 기울기와 똑같으므로

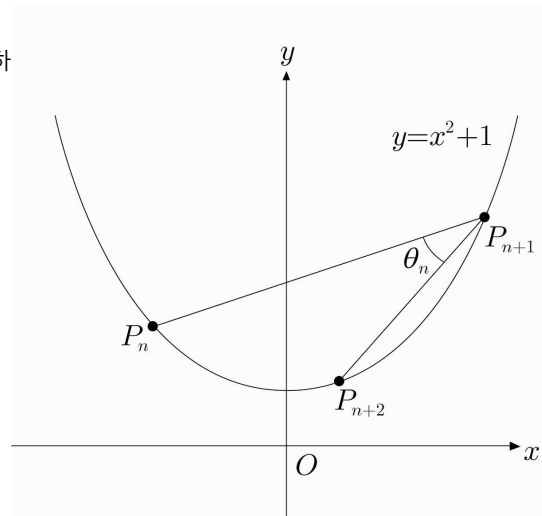
$$\tan \alpha_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} - a_n} = a_{n+1} + a_n = 2a_{n+2} \text{이다.}$$

$$(\because a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2})$$

그림에서 보듯이 $\alpha_2 > \alpha_1, \alpha_3 < \alpha_2 \dots$ 이렇게

수열 α_n 은 증가, 감소를 반복하므로 절댓값을 활용해서

$\theta_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ 이 된다.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tan \theta_n}{a_{n+1} - a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tan |a_{n+1} - a_n|}{a_{n+1} - a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{a_{n+1} - a_n} \right|$$

$$(\because |\tan(a_{n+1} - a_n)| = |-\tan(a_n - a_{n+1})|)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_n \tan a_{n+1}} \right)}{a_{n+1} - a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left\{ \frac{2(a_{n+3} - a_{n+2})}{1 + 4a_{n+2} \times a_{n+3}} \right\}}{a_{n+1} - a_n} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 2 \left(\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1} - a_n} \right) \times \left(\frac{1}{1 + 4a_{n+2} \times a_{n+3}} \right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + 4a_{n+2} \times a_{n+3}} \right) \right| = \frac{1}{2 + 8a^2}$$

$$(\because (a_{n+2} - a_{n+1}) = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \text{ 에서 } (a_{n+3} - a_{n+2}) = \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n) \text{ 이므로 } \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{4})$$

④-2. Point

point 1

평소에 두 직선 사이의각 $\rightarrow$ 탄젠트 덧셈정리 라고 기계적으로 공부했다면 쉽게 발상할 수 있던 문제였다.

수능에서도 자주 쓰이는 발상이니 필수적으로 익혀두자.

point 2

탄젠트가 기함수임을 이용해서 $|\tan(a_{n+1} - a_n)| = |-\tan(a_n - a_{n+1})|$ 을 얻을 수 있었고

수열 α_n 이 증가수열이 아니라서 $\theta_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ 이 되는 등

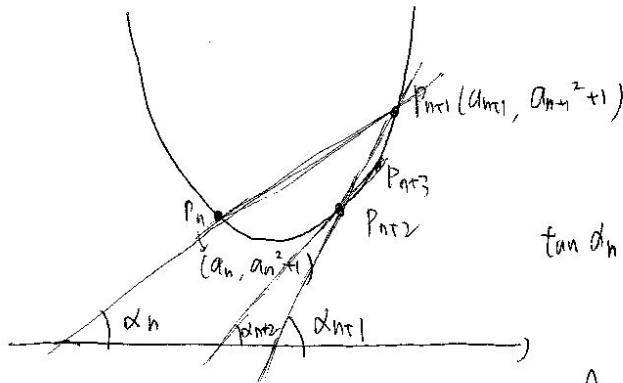
양수인지 음수인지에 주의를 기울여서 풀어야 한다.

point 3

④ 논제를 푸는데 $2a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 이 사용된다. 이와 같이 수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ, ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이, 앞 문제를 이용해서 다음 문제를 풀 수 있는 논술이 여러 대학에서 출제되고 있으니 **앞 문제를 의식하면서 다음 문제를 풀도록 해야 한다.** 2011 고려대 수리논술의 경우 논제에 ‘②를 이용해서’ 라고 언급 해주었지만 2010 고려대 수리논술에서는 언급해 주지 않았다.

④-3. Actual Fight

< d >



$$\tan \alpha_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} - a_n} = a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2} \quad \left(\because \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = a_{n+2} \right)$$

$$\theta_n = | \alpha_{n+1} - \alpha_n |$$

($\because \alpha_n$ 은 증가, 감소 를 반복)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tan \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tan | \alpha_{n+1} - \alpha_n |}{a_{n+1} - a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tan (\alpha_{n+1} - \alpha_n)}{a_{n+1} - a_n} \right|$$

$$(\because | \tan (\alpha_{n+1} - \alpha_n) | = | \tan (\alpha_n - \alpha_{n+1}) |)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{\tan \alpha_{n+1} - \tan \alpha_n}{1 + \tan \alpha_n \tan \alpha_{n+1}} \right)}{a_{n+1} - a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(a_{n+3} - a_{n+2})}{(a_{n+1} - a_n)(1 + 4a_{n+2}a_{n+3})} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + 4a_{n+2}a_{n+3}} \right) \right| = \frac{1}{2 + 8a^2}$$

$$\left(\because (a_{n+2} - a_n) = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \text{ 이고 } \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{4} \right)$$

23

①-1. Comprehension

공간상의 평면도형 $S(t)$ 의 법선벡터를 $\vec{h}$ 라 하고

xy 평면으로의 정사영인 $A(t)$ 의 법선벡터를 $\vec{a}$ 라 하고 $\vec{h}$ 와 $\vec{a}$ 이 이루는 각을 α

yz 평면으로의 정사영인 $B(t)$ 의 법선벡터를 $\vec{b}$ 라 하고 $\vec{h}$ 와 $\vec{b}$ 이 이루는 각을 β

zx 평면으로의 정사영인 $C(t)$ 의 법선벡터를 $\vec{c}$ 라 하고 $\vec{h}$ 와 $\vec{c}$ 이 이루는 각을 γ 라 하면

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 이 된다. 또한

$A(t) = S(t)\cos\alpha$, $B(t) = S(t)\cos\beta$, $C(t) = S(t)\cos\gamma$ 이므로

$$\{A(t)\}^2 + \{B(t)\}^2 + \{C(t)\}^2 = \{S(t)\}^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \{S(t)\}^2$$

$$(\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1) \therefore \{A(t)\}^2 + \{B(t)\}^2 + \{C(t)\}^2 = \{S(t)\}^2$$

$\vec{h}$ 와 x 축이 이루는 각을 α

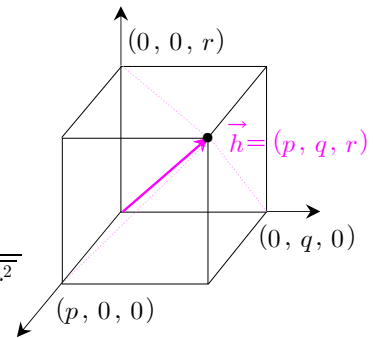
$\vec{h}$ 와 y 축이 이루는 각을 β

$\vec{h}$ 와 z 축이 이루는 각을 γ

라 할 때,

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \cdots 1$$

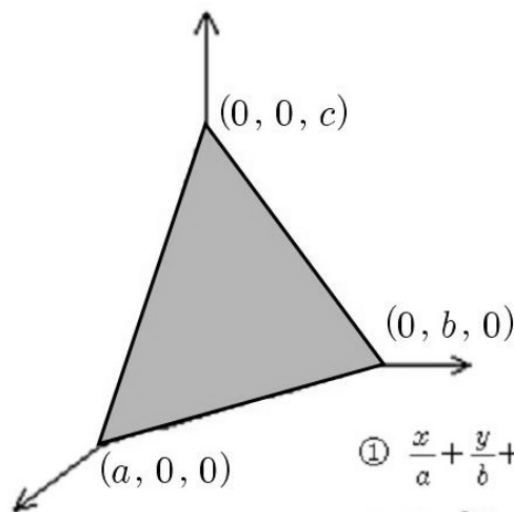


①-2. Point

point 1

비교적 쉬운 문제였는데 방향코사인을 증명해 봤다면 쉽게 증명할 수 있었다.

방향코사인 외에 다음과 같이 평면도형에서의 성질을 증명한 다음 공간상의 평면도형 $S(t)$ 를 무수히 많은 삼각형으로 나눈 다음 각각에 대해 다음 공식을 적용시켜서 답안지를 쓴 사람도 많았다. (마치 구분구적을 하듯이) 하지만, **엄밀성이 떨어져 방향코사인에 비해 좋은 점수를 받지 못했을 것이다**



$$\textcircled{1} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\textcircled{2} S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 = S^2$$

point 2

이 문제에서 방향코사인을 꼭 증명했어야 하는지에 대한 논란이 조금 있었는데, 즉 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 이 공식을 그냥 모두가 알고 있는 정의쯤으로 사용해도 되냐는 문제이다. 수리논술이라는 것이 모든 것을 세세히 하나하나 증명해야 되는 것은 아니지만 ①문제를 다시 한 번 보면 방향코사인을 증명하는 것이 더 좋은 선택인 것 같다. 왜냐하면 방향코사인 외에 딱히 학생의 실력을 검증할 요소가 보이지 않고

① 갑은 을에게 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 를 각각 알려 주었다. 을은 이 정보만으로 도형 F 의 넓이 $S(t)$ 를 알아내었다. 을의 해결 방법을 설명하고, $S(t)$ 와 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 사이의 관계식을 구하시오.

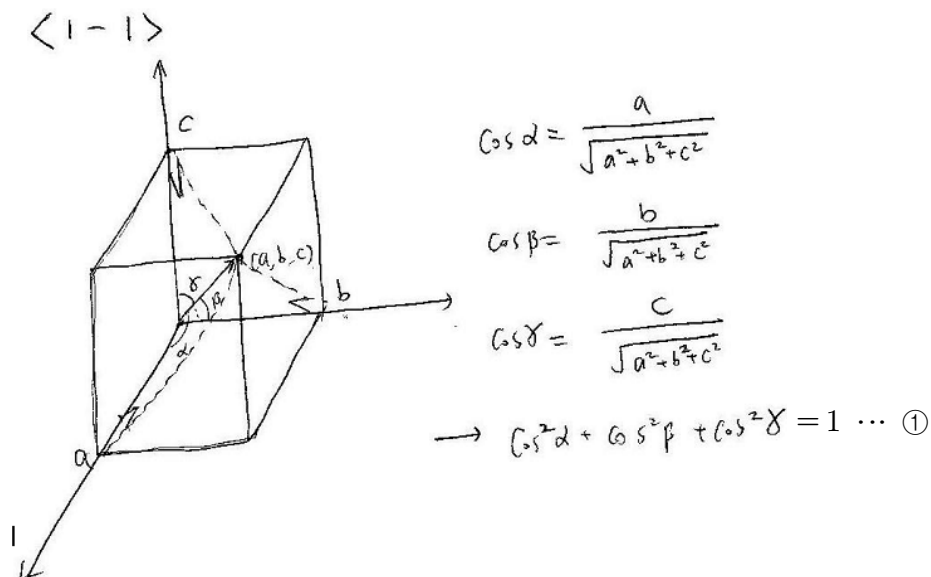
문제에서 보듯이 “을의 해결 방법을 설명하고” 라고 되어있으므로 방향코사인을 증명하는 것이 옳다. 또한, 증명할지 말지 고민하느니 증명을 하는 것이 좋다 왜냐하면 증명하지 않으면 감점될 수 있지만 증명한다고 감점되는 것은 아니기 때문이다.

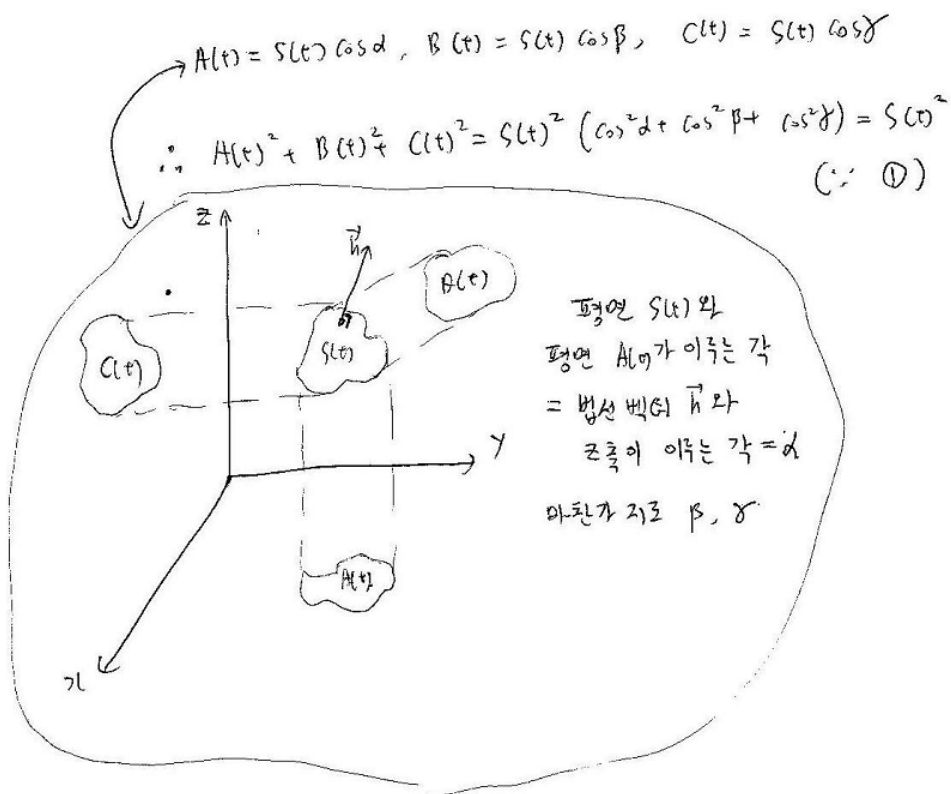
point 3

① 갑은 을에게 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 를 각각 알려 주었다. 을은 이 정보만으로 도형 F 의 넓이 $S(t)$ 를 알아내었다. 을의 해결 방법을 설명하고, $S(t)$ 와 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 사이의 관계식을 구하시오.

① 문제는 한 문제이지만 그 안에 2개의 문제가 있다. 시험현장에서 당황하게 되면 묻는 두 가지를 정확하게 답하지 않고, 마지막 문제만 푼다거나 하는 일이 생긴다. 논술 시험을 칠 때, 하나하나 묻는 것에 각각 줄을 치고 묻는 것 모두에 답하도록 노력해야 한다.

①-3. Actual Fight





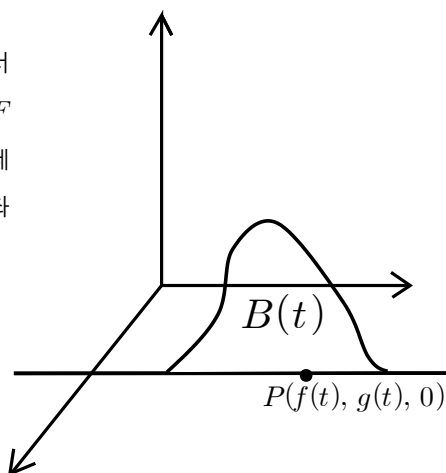
자세한 해설에서는 설명을 위해 많은 글이 들어갔지만 실전에서는 이정도 서술이면 제대로 된 점수를 받을 수 있다. 사진에서 보듯이 $(\dots \textcircled{1})$, $(\dots \textcircled{2})$, $(\because)$, $(\therefore)$ 등의 기호를 적절히 활용하면, 매우 깔끔하게 서술 할 수 있다.

②-1. Comprehension

$A(t) = C(t) = 0$ 이라는 것을 해석해야 하는데 xy 평면, zx 평면으로의 정사영한 넓이가 없다는 것이다. 그렇다면 평면도형 $S(t)$ 는 yz 평면에 평행한 평면이라는 것을 의미하게 되고 $S(t) = B(t)$ 가 된다. 또한 평면도형 F 위에 $P(f(t), g(t), 0)$ 이라는 점이 항상 존재하므로 xy 평면과 도형 F 는 항상 만나는 상태이다. 이 상황을 공간좌표에 그림으로 그려보면 오른쪽 그림과 같이 된다.

여기서 시각 t 가 0에서 1로 증가함에 따라 x 좌표 또한 $f(0)$ 에서 $f(1)$ 까지 점점 증가해 간다. ($\because f(t)$ 는 증가함수) 그렇다면 도형 F 가 점점 x 축의 양의방향으로 이동하면서 입체도형을 만들게 되는데 그 도형을 x 축에 평행한 평면으로 잘라서 $f(0)$ 에서 $f(1)$ 까지의 x 좌표를 n 등분 했을 때, k 번째 나타나는 도형의 부피를 써보면 $B\{f^{-1}(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$ 이 된다.

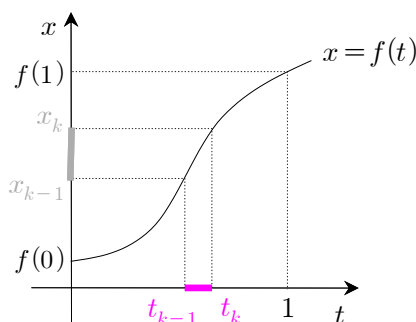
($\because x = f(t)$ 는 일대일대응)



또한 다음 그림에서 보듯이 x 좌표가 n “등”분 되었으므로 t 좌표에서 0에서 1까지 등분되지 않았다. 등분은 아니지만 (만약 $f(t)$ 가 일차 함수면 등분이 된다) k 번째 x 좌표에 대응되는 t 좌표를 t_k 라고 약속 하자.

이제 $B\{f^{-1}(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$ 을 다음과 같이

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\{f^{-1}(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$ 무한급수로 쓰면 정적분을 할



수 있게 된다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\{t_k\}\{f(t_k) - f(t_{k-1})\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\{t_k\} \left\{ \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\} (t_k - t_{k-1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\{t_k\}\{f'(c)\}(t_k - t_{k-1}) = \int_0^1 B(t)f'(t)dt$$

(단, $t_{k-1} < c < t_k$, 여기서 평균값의 정리가 쓰이므로 $f(t)$ 는 미분가능 해야 한다.)

또한 정적분 $\int_0^1 B(t)f'(t)dt$ 이 정의되기 위해서 $B(t)f'(t)$ 이 연속이어야 하는데,

$B(t)$ 는 연속이므로 도함수 $f'(t)$ 가 연속이면 곱한 함수 $B(t)f'(t)$ 또한 연속이 된다.

②-2. Point

point 1

② 같은 을에게 시각 $t(0 \leq t \leq 1)$ 에서 $B(t)$ 와 $A(t) = C(t) = 0$ 임을 알려주었다. 또한, 도형 F 위에 항상 존재하는 점 P 의 좌표 $P(f(t), g(t), 0)$ 도 알려 주었다. 그리고 $f(t)$ 와 $g(t)$ 는 구간 $0 \leq t \leq 1$ 에서 증가함수이고, 미분 가능하며, 또한 이들의 도함수가 연속이라는 조건을 주었다. 을은 $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 도형 F 가 만든 입체도형의 부피를 정적분으로 표현할 수 있었다. 그 이유를 설명하고, 입체도형의 부피를 적분변수 t 를 사용한 정적분으로 나타내시오.

논제를 보면 정적분으로 표현할 수 있는 이유를 설명하라고 되어 있는데

$\int_{f(0)}^{f(1)} B(f^{-1}(x))dx$ 에서 $f^{-1}(x) = t$ 로 치환하면서 $f^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = f(t)$ 를 이용해서

$dx = f'(t)dt$ 를 이끌어내고 적분구간을 변경하면 $\int_0^1 B(t)f'(t)dt$ 이 된다. 라고 설명되어 있는 경우가 많은데,

이 문제는 이런 스킬을 검증하려는 문제가 아니다.

위와 같이 풀게 되면 정적분으로 표시할 수 있는 이유가 명백하지 않다.

또한, $dx = f'(t)dt$ 라는 식은 수학에서 올바르게 정의되는 식이 아니다.

(앞으로도 논술 문제를 풀 때 dx , dy 등을 따로 쓰지 않길 바란다.)

이 문제는 이렇게 간단한 치환적분 문제가 아니고 매우 어려운 “초고난도” 문제이다.

1. Comprehension을 참고해서 ② 문제를 완벽하게 이해하길 바란다.

$f(t)$ 가 증가함수인 이유 - 역함수의 존재성 : 하나의 x 값에 대해 하나의 t 값이 대응된다.

$f(t)$ 가 미분가능해야 하는 이유 - 평균값의 정리

$f(t)$ 가 도함수가 연속인 이유 - 정적분이 정의되기 위해서 : 교과과정에서 정적분은 연속함수에서 정의한다. 다음과 같이 “이유”를 모두 서술해야 완벽한 점수를 받을 수 있을 것이다.

교과과정에서 정적분은 연속함수에서 정의한다. - 교과과정에서의 이유 설명

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dx = f(x)$ 을 증명하고 그것으로부터 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 을 증명하는데

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dx = f(x)$ 을 증명할 때 교과서에 있는 “최대 • 최소의 정리”가 쓰인다.

최대 • 최소의 정리는 연속인 구간에서만 사용할 수 있으므로 정적분을 할 때 주어진 함수가 연속이어야 한다.

→ $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dx = f(x)$ 은 반드시 증명해봐야 한다. 논술에 언제든지 나올 수 있는 매우 중요한 주제이다.

point 2

사실 이 문제는 교과과정을 조금 벗어났다. 그 이유는 x 가 등분되면서 t 가 등분되지 않았으므로 $t_k - t_{k-1}$ 이 일정하지 않게 된다. 그런데도 정적분으로 쓸 수 있다.

즉, 등분이 되지 않더라도 조각 개수가 양의 무한대로 가게 되면 정상적으로 정적분 값이 나오게 된다.

(사실, 더 자세한 엄밀한 조건이 있지만 고교과정에서는 전혀 알 필요가 없고 논술에 나온다면 제시문이 주어질 것이다.)

등분이 아닌 문제는 예전 2005수능 문제에도 나온 적이 있는데 그 문제를 소개하겠다.

오른쪽 그림은 연속함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$$

와 같은 값을 갖는 것은? [2005]

① $\int_0^1 g(x)dx$ ② $\int_0^1 xg(x)dx$ ③ $\int_0^1 f(x)dx$ ④ $\int_0^1 xf(x)dx$ ⑤ $\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx$

다음과 같은 문제인데 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수 이므로 $\frac{k}{n}$ 는 y 축을 n 등분한 후 k 번째 y 좌표라고 하는 것이 맞다. 이 문제에서도 $y = f(x)$ 는 곡선이므로 y 좌표는 등분이지만 그에 대응되는 x 좌표는 등분이 아니게 된다. 다음 문제를 풀어보면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{g(y_k) - g(y_{k-1})\} y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{x_k - x_{k-1}\} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx$$

여기서도 마찬가지로 x 좌표가 등분이 아니므로 $x_k - x_{k-1}$ 이 일정한 값이 아니게 된다.

하지만, 정적분 값은 올바르게 나온다. 즉, 정적분을 할 때 좌표를 꼭 “등”분 할 필요는 없다.

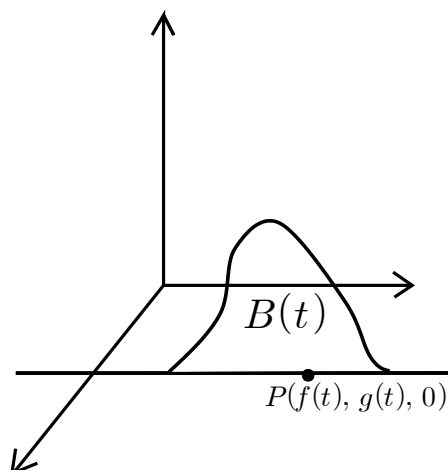
point 3

다음에서

x 좌표를 $f(0)$ 에서 $f(1)$ 까지 등분 했는데
꼭 등분할 필요가 없다는 것을 알았다.

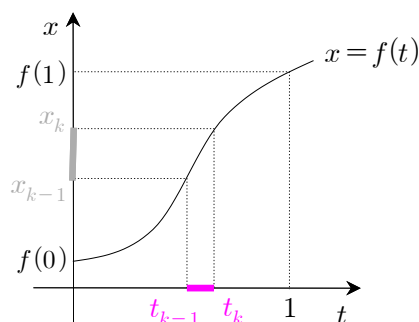
여기서 t 좌표를 등분해서

x 좌표가 등분이 아니도록 한 후에 풀어보면,



이 그림에서 t 좌표를 n “등”분 해보자. 그런데 t 는 0에서 1까지
움직이므로 정확하게 $t_k = \frac{k}{n}$, $t_{k-1} = \frac{k-1}{n}$ 이 된다.

그런 다음 k 번째 부피를 써보면



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\left(\frac{k}{n}\right) \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\left(\frac{k}{n}\right) \left\{ \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}} \right\} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B\left(\frac{k}{n}\right) \{f'(c)\} \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 B(t) f'(t) dt \quad (\text{단, } \frac{k-1}{n} < c < \frac{k}{n}, \text{ 여기서 평균값의 정리가 쓰이므로 } f(t) \text{는 미분가능}) \end{aligned}$$

수능 문제 대부분이 0에서 1까지를 정적분 구간으로 다루고 있는데

다음문제도 사실 t 입장에서 0에서 1까지를 정적분 구간으로 다루고 있는 문제이다

즉, $t_k = \frac{k}{n}$ 가 되는 문제였다. 논술에서 적분문제가 보였을 때, 0에서 1까지 움직이는 변수가 있다면 바로 n 등
분 해버리면 멋지게 풀릴 수도 있다는 것을 명심해야한다.

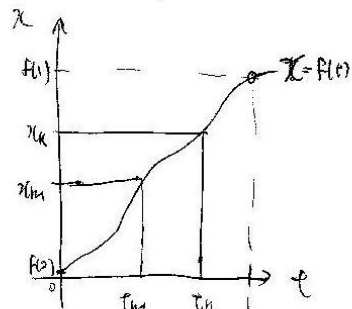
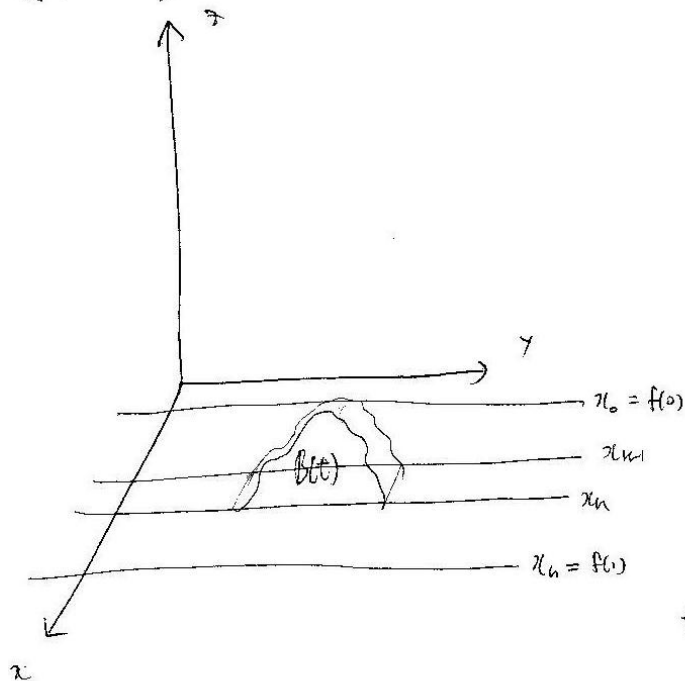
이렇게 ② 문제의 해설을 마친다.

엄청나게 어렵고, 얻을 수 있는 것이 엄청나게 많은 문제다.

완벽하게 이해하고, 또 완벽하게 공부하길 바란다.

②-3. Actual Fight

<1-2>



t좌표를 0에서 1까지 n등분하고

$f(t_k) = z_k$ 라 하자,

여기서, $f(t)$ 가 증가 함수이므로 $(z_k - z_{k-1}) > 0$ 이고

$f(t)$ 가 연속 함수 이므로 $B(t_k)(z_k - z_{k-1})$ 은 k 번째 도형의

부피가 된다. $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B(t_k)(z_k - z_{k-1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B(t_k) \left\{ \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\} (t_k - t_{k-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B(t_k) \{ f'(c) \} (t_k - t_{k-1})$$

(단, $t_{k-1} < c < t_k$, $f(t)$ 는 미분가능)

$$= \int_0^1 B(t) f'(t) dt$$

$f'(t)$ 가 연속이므로 $B(t)f'(t)$ 가 연속이다.

$\therefore$ 정적분 가능

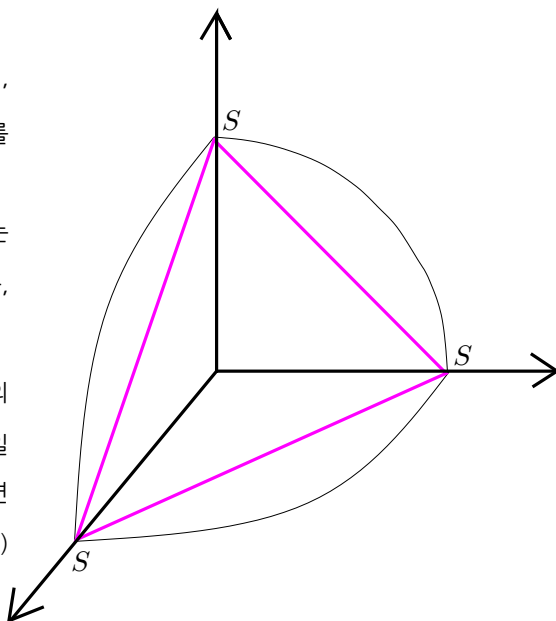
③-1. Comprehension

을은 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 각각에 대해서는 알지 못하고 그 합한 함수인 $G(t) = A(t) + B(t) + C(t)$ 을 알고 있다. 여기서 제곱의 합 $\{A(t)\}^2 + \{B(t)\}^2 + \{C(t)\}^2 = \{S(t)\}^2$ 으로 일정하다는 사실을 ①에서 증명했다. 합한 함수 $G(t) = A(t) + B(t) + C(t)$ 의 최댓값과 최솟값의 관계식을 구해야 하는데, 편의상 $A(t) = x$, $B(t) = y$, $C(t) = z$, $S(t) = S$ 라 하면 $x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ 일 때, $x + y + z$ 의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제와 똑같다고 할 수 있다.

여기서 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 에서 구의 일부분 $x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같이 된다.

여기서 $x + y + z = k$ 라 하면 k 의 최댓값, 최솟값을 찾는 문제가 된다. 그런데 k 는 평면 $x + y + z = k$ 이 x 축, y 축, z 축과 만나는 점을 의미하게 된다.

즉 도형 $x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ 과 만나면서 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 제일 클 때 그 값이 곧 최댓값이고 x 좌표가 제일 작을 때 그 값이 곧 최솟값이 된다. 그림에서 보듯이 평면 $x + y + z = k$ 이 $(S, 0, 0)$ 을 지날 때 (빨간 삼각형 일 때) 절편이 제일 작으므로 k 의 최솟값은 S 다.



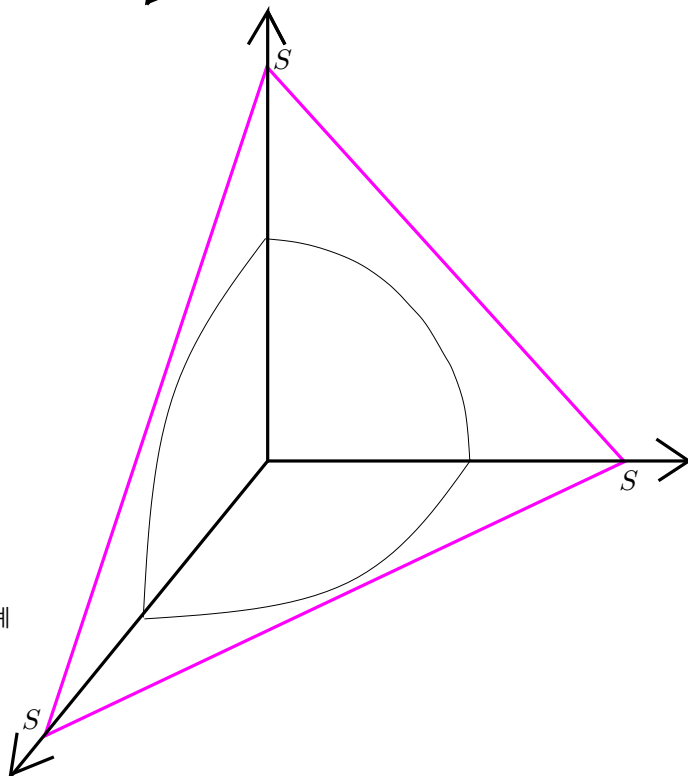
또한

$x + y + z = k$ 이 구에 접할 때,
절편이 가장 커지게 된다. 따라서
점과 평면사이의 거리 공식을 써보면

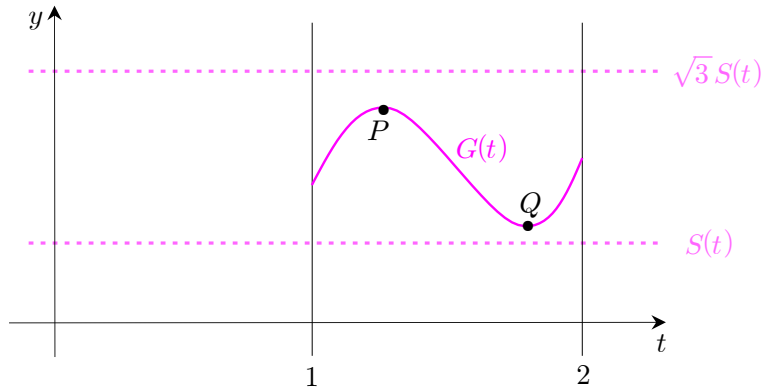
$$\frac{|-k|}{\sqrt{3}} = S \text{ 이 된다. 여기서}$$

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로 $k = \sqrt{3}S$ 이다.

즉, $G(t) = A(t) + B(t) + C(t)$ 에서
 $S(t) \leq A(t) + B(t) + C(t) \leq \sqrt{3}S(t)$ 가
된다. 따라서 최댓값 M 과 최솟값 m 의 관계
식은 $M = \sqrt{3}m$ 이 되게 된다.



이제, 관계식 $M = \sqrt{3}m$ 을 이용해서 상수 $S(t)$ 를 찾아야 한다. $G(t) = A(t) + B(t) + C(t) \geq 0$ 에서 $S(t) \leq G(t) \leq \sqrt{3}S(t)$ 가 되는데, $y = G(t)$ 라 하고 그 그래프를 그려보자.



만약 $y = G(t)$ 의 그래프가 위와 같이 되었을 때,

점 Q 의 y 좌표를 최솟값 q 라 하고, 점 P 의 y 좌표를 최댓값 p 라 하면 $p < \sqrt{3}q$ 가 되므로

최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배가 아니게 된다.

따라서 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배가 되려면 반드시 최솟값은 $S(t)$, 최댓값은 $\sqrt{3}S(t)$ 가 되어야 한다. 즉,

$G(t)$ 의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배가 될 때, 그 최솟값이 곧 $S(t)$ 가 된다.

③-2. Point

point 1

구와 평면의 위치관계가 아닌 다른 방법으로 문제를 풀어보겠다.

$x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)일 때, $x + y + z$ 의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제라 할 수 있는데

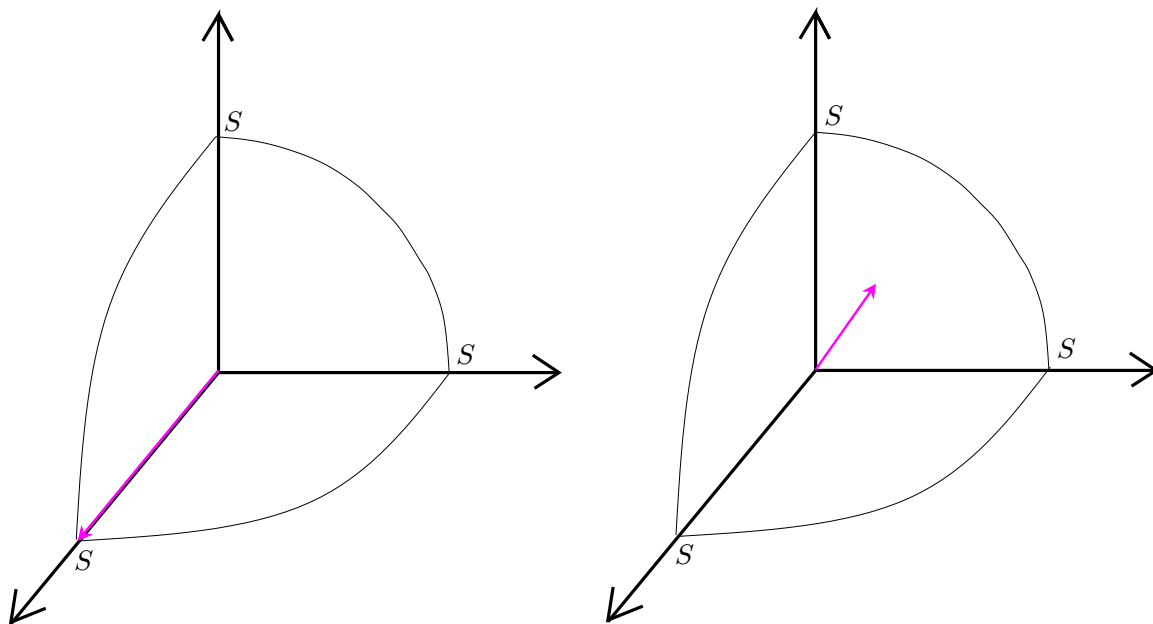
$x + y + z$ 을 $(x, y, z) \cdot (1, 1, 1)$ 으로 해석 할 수 있다. (벡터의 내적)

(x, y, z) 은 구 $x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ 위의 점이므로 크기가 일정하고 방향은 움직인다

$(1, 1, 1)$ 은 고정된 점이므로 크기와 방향 모두 일정하다.

$\therefore x + y + z = (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = S\sqrt{3} \cos\theta$ 이다. (단, θ 는 두 벡터 (x, y, z) , $(1, 1, 1)$ 이 이루는 각)

여기서 $\cos\theta$ 는 θ 가 예각인 구간에서 감소함수이므로 θ 가 최대일 때 최솟값을 가지고, θ 가 최소일 때 최댓값을 가지게 된다.



벡터 (x, y, z) 가 첫 번째 그림과 같이 $(S, 0, 0)$ 일 때 $(1, 1, 1)$ 과 이루는 각이 가장 커지게 되므로 이 순간에 최솟값을 가지게 되고 $(0, S, 0), (0, 0, S)$ 일 때도 마찬가지로 최솟값을 가진다. 그 최솟값은 $x + y + z = S$ 가 된다.

두 번째 그림과 같이 $x = y = z = \frac{S}{\sqrt{3}}$ 일 때, $(1, 1, 1)$ 과 이루는 각이 $(\theta = 0)$ 으로 가장 작아지게 되므로

최댓값은 $x + y + z = \sqrt{3}S$ 가 된다.

$$\therefore S \leq x + y + z \leq \sqrt{3}S$$

point 2

일차식과 이차식이 주어졌으므로 코시-슈바르츠 부등식으로 문제를 해결할 수도 있다.

코시-슈바르츠 부등식을 사용해보자.

$x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)일 때, $x + y + z$ 의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제인데,

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x + y + z)^2$$

$3S^2 \geq (x + y + z)^2$ 이므로 $-\sqrt{3}S \leq x + y + z \leq \sqrt{3}S$ 이 된다.

여기서 ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 이고

$G(t)^2 = (x + y + z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ 이므로 최종적인 부등식

$S \leq x + y + z \leq \sqrt{3}S$ 을 유도해낼 수 있다.

하지만, 코시-슈바르츠 부등식으로 유도하려면, 최솟값인 S 를 유도 하는 것이 상당히 어려워지므로 공간도형에서의 구를 이용한 유도방법이 가장 좋다고 할 수 있다.

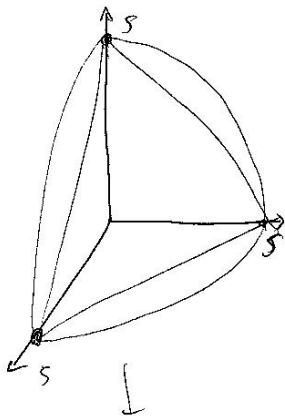
③-3. Actual Fight

<1-3>

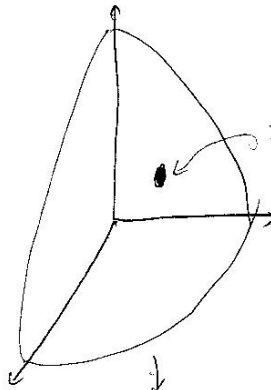
$$A(t) + B(t) + C(t) = G(t)$$

$$A(t)^2 + B(t)^2 + C(t)^2 = S(t)^2 \quad (A(t) \geq 0, B(t) \geq 0, C(t) \geq 0)$$

$x^2 + y^2 + z^2 = S^2$ 일 때 $x + y + z$ 의 최소, 최대
($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)



절편 $k = S$ 일 때가 최대다.



평면에 점할 때 절편 k 가

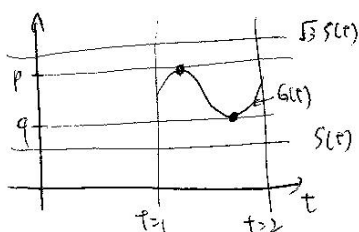
최대이므로, $x = y = z$ 일 때

$$3x^2 = S^2 \rightarrow x = y = z = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

$$\text{최대값} = \frac{3}{\sqrt{3}} S = \sqrt{3} S$$

$$\therefore S(t) \leq A(t) + B(t) + C(t) \leq \sqrt{3} S(t)$$

$$0 \leq S(t) \leq G(t) \leq \sqrt{3} S(t)$$



그림에서 $p < \sqrt{3} q$ 이므로

$1 \leq t \leq 2$ 에서 $G(t)$ 의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$ 배가

되어야만 최솟값이 $S(t)$, 최댓값이 $\sqrt{3} S(t)$ 가

되게 된다. $\therefore \{G(t)\text{의 최댓값}\} = \sqrt{3} \times \{G(t)\text{의 최솟값}\}$

일 때 $\{G(t)\text{의 최솟값}\} = S(t)$ 이므로

$S(t)$ 를 구할 수 있다.

문제를 자세하게 읽고, 묻는 것 모두에 줄을 치도록 하자. 그래야 다음과 같이 본론을 놓치지 않고 서술할 수 있다. $S(t)$ 를 찾는 과정이 상당히 어려웠다. 많이 반복해보고 복습해서 완전히 자신의 것으로 만들도록 하자.

24

①-1. Comprehension

제시문 (가)를 보면 ‘평행이동과 정적분’ ‘대칭이동과 정적분’이 설명 되어 있는데 합의 기호 시그마 또한 유사한 성질을 가진다고 되어 있다. 즉, 두 성질을 합의 기호에 적용시키는 것이 핵심이다.

$$\text{평행이동과 합의기호} : \sum_{k=n}^m f(k) = \sum_{k=n-c}^{m-c} f(k+c)$$

$$\text{대칭이동과 합의기호} : \sum_{k=n}^m f(k) = \sum_{k=-m}^{-n} f(-k)$$

이 두 가지를 금방 유도 할 수 있는데 주어진 문제에 어떻게 활용해야 할지 느낌이 잘 안올 것이다.

시그마 문제가 해결이 바로 안 될 때에는 시그마를 풀어서 나열해보는 것이 기본이다.

(수리영역에서도.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=2-n}^n f(k), \quad f(n) + f(2-n) = (n-1)^{10} + 2(n-1)^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2-n}^n f(k) &= f(2-n) + f(3-n) + \cdots + f(n-1) + f(n) \\ &= \{f(n) + f(2-n)\} + \{f(n-1) + f(3-n)\} + \cdots + \{f(2) + f(0)\} + f(1) \\ &= \{f(n) + f(2-n)\} + \{f(n-1) + f(3-n)\} + \cdots + \{f(2) + f(0)\} + \{f(1) + f(1)\} - f(1) \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(k) + f(2-k)\} - f(1) = \sum_{k=1}^n \{f(k) + f(2-k)\} \quad (\because \textcircled{1} \text{에서 } f(1) = 0) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(n-1)^{10} + 2(n-1)^2\} = \sum_{k=0}^{n-1} (n^{10} + 2n^2) \quad (\because \text{평행이동과 합의기호}) \end{aligned}$$

여기까지 변형 했다면 이제 계산하는 일만 남았다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=2-n}^n f(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} (k^{10} + 2k^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^{10} + \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^{10} \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^{10} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^{10} \right\} = \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

①-2. Point

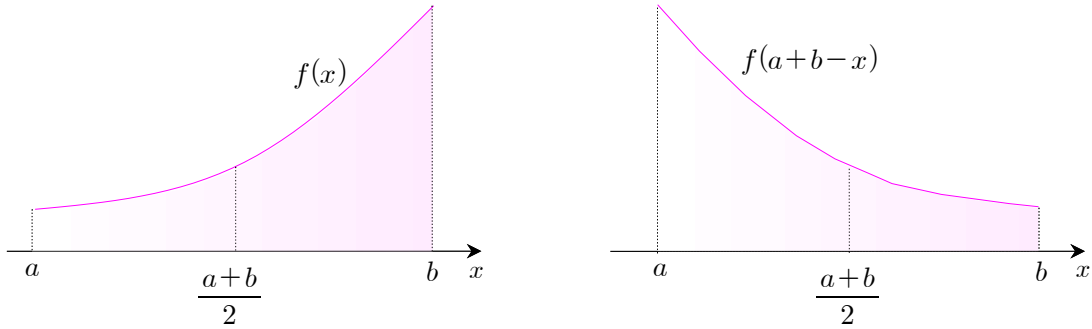
point 1

평행이동 보다는 대칭이동과 정적분, 대칭이동과 합의기호가 문제의 핵심이다.

대칭이동에 대해 좀 더 자세히 배워보자.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{f(x) + f(a+b-x)\} dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{f(x) + f(a+b-x)\} dx$$

대칭이동해서 그래프를 그려보거나 치환적분을 이용하면 다음과 같은 정적분 항등식을 유도 할 수 있다.



$f(x)$ 를 $x = \frac{a+b}{2}$ 에 대칭한 함수는 $f(a+b-x)$ 이다. 그래프를 보면 공식이 이해될 것이다.

$a+b-x=t$ 로 치환적분해도 주어진 공식이 모두 증명된다.

이와 관련된 문제가 수학익힘책이나 기본서에 가끔 보이는데 2010 수능 선택 미분과 적분 29번 문제에도 출제된 적이 있다.

또, 정적분 공식을 합의기호에 적용시키면 다음과 같은 일반화된 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \sum_{k=a}^b f(a+b-k)$$

$$= \begin{cases} a+b=2n & \sum_{k=\frac{a+b}{2}}^b \{f(k)+f(a+b-k)\} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sum_{k=a}^{\frac{a+b}{2}-1} \{f(k)+f(a+b-k)\} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ a+b=2n+1 & \sum_{k=\langle \frac{a+b}{2} \rangle}^b \{f(k)+f(a+b-k)\} = \sum_{k=a}^{\lceil \frac{a+b}{2} \rceil} \{f(k)+f(a+b-k)\} \end{cases}$$

(단, $\langle x \rangle$ 는 x 보다 작지 않은 최소의 정수) (단, $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

$a+b$ 가 짝수 일 때는 가운데 항이 겹치므로 한번 빼줘야 하고

$a+b$ 가 홀수 일 때는 항의 개수가 반, 반 딱 맞게 떨어지므로 빼줄게 없다.

다만 $\frac{a+b}{2}$ 가 정수가 아니므로 올림기호, 내림기호를 적절히 활용하면 일반화를 할 수 있다.

간단한 예로 다시 이해를 해보자.

$a+b =$ 짝수 일 때,

$$\sum_{k=1}^5 f(k) = \sum_{k=1}^5 f(6-k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \text{ 인데,}$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{1+5}{2}} \{f(k)+f(6-k)\} = \sum_{k=\frac{1+5}{2}}^5 \{f(k)+f(6-k)\} = f(1) + f(2) + 2f(3) + f(4) + f(5) \text{ 이므로,}$$

$f(3)$ 을 양변에 한번 빼줘야 한다.

$a+b =$ 홀수 일 때,

$$\sum_{k=1}^4 f(k) = \sum_{k=1}^4 f(5-k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \text{ 인데,}$$

$$\sum_{k=1}^2 \{f(k) + f(5-k)\} = \{f(1) + f(4)\} + \{f(2) + f(3)\} = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \text{ 이므로,}$$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1+4}{2}\right]} \{f(k) + f(5-k)\} \text{이라 할 수 있다.}$$

$$\text{마찬가지로, } \sum_{k=3}^4 \{f(k) + f(5-k)\} = \{f(3) + f(2)\} + \{f(4) + f(1)\} = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \text{ 이므로,}$$

$$\sum_{k=\left\langle \frac{1+4}{2} \right\rangle}^4 \{f(k) + f(5-k)\} \text{이라 할 수 있다.}$$

이 사실을 제시문에서 이끌어 냈다면

$$\sum_{k=2-n}^n f(k) = \sum_{k=2-n}^n f(2-k) = \sum_{k=1}^n \{f(k) + f(2-k)\} - f(1) = \sum_{k=1}^n \{f(k) + f(2-k)\}$$

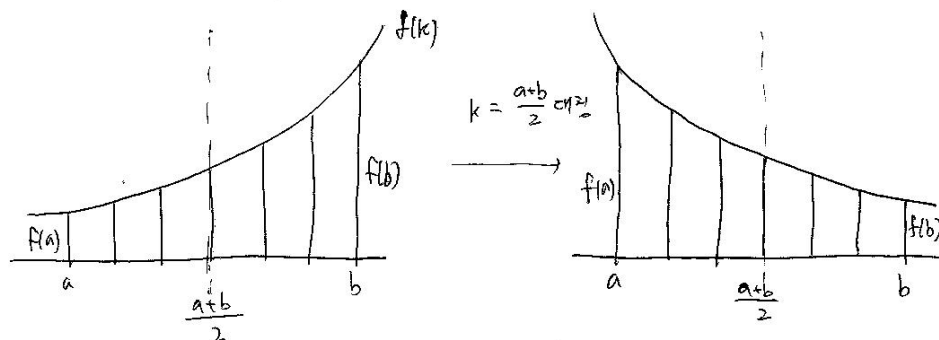
($\because$ 대칭이동과 합의기호)

이렇게 바로 식을 써나갈 수 있으며 여기서 대칭이동과 합의기호가 사용되는 것을 알 수 있다.

①-3. Actual Fight

(a)

$$\text{대칭성에 의해 } \sum_{k=a}^b f(k) = \sum_{k=a}^b f(a+b-k) = \sum_{k=\frac{a+b}{2}}^b \{f(k) + f(a+b-k)\} \dots \textcircled{1}$$



항이 짝개 $\rightarrow a+b = \frac{a+b}{2} \rightarrow \frac{a+b}{2}$ 는 정수

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=2-n}^n f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=1}^n \{f(k) + f(2-k)\} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=1}^n \{(k-1)^{10} + 2(k-1)^2\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} (k^{10} + 2k^2) \quad (\because \text{평행 이동})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^{10} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = 0$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{11}} \sum_{k=0}^{n-1} k^{10} = \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11}$$

해설에서는 설명을 위해 많은 글이 들어갔지만 실전에서는 이 정도 서술이면 제대로 된 점수를 받을 수 있다. 사진에서 보듯이 $(\cdots \textcircled{7})$, $(\cdots \textcircled{1})$, $(\therefore)$, $(\because)$ 등의 기호를 적절히 활용하면, 매우 깔끔하게 서술 할 수 있다.

②-1. Comprehension

단순한 부분적분 반복 문제인데 계산 실수만 안하면 쉽게 풀 수 있는 문제다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n (1-x)^n &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{n-1} dx = \\ \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{n-1} dx &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} (1-x)^{n-2} dx\end{aligned}$$

분모의 $(n+2)$ 는 x^{n+2} 의 지수랑 똑같고

분자의 $(n-1)$ 은 $(1-x)^{n-2}$ 의 지수보다 1 크다.

또 $x^{n+2}(1-x)^{n-2}$ 에서 보면 x 와 $1-x$ 의 지수는 n 에 대해 대칭적이다.

이 규칙성을 찾아서 계속해서 부분적분하면

$$\begin{aligned}&= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)(n+2)\cdots (2n-1)} \int_0^1 x^{2n-1} (1-x) dx \quad ((1-x) \text{의 지수가 } 1 \text{이므로 } x \text{의 지수는 } 2n-1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)(n+2)\cdots (2n-1)} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots (2n-1)2n(2n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

②-2. Point

point 1

수리논술 중에 비교적 쉬운 편에 속하는 문제다. 부분적분을 반복하면서 규칙을 잘 찾아서 실수만 하지 않으면 무난하게 해결할 수 있는 문제다. 규칙성 발견하는 부분을 다시 한 번 공부해보고 이와 같은 방식은 수학적귀납법 문제를 풀 때에도 많이 쓰인다.

point 2

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx \right| = \left| \frac{am!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1} \right|$$

다음과 같은 공식은 심화교재에서 볼 수 있는데 외우지 말고 증명을 꼭 해봐야 한다.

필자는 주어진 공식을 여러 번 증명해봤고 증명 횟수가 많아지면서 공식도 자연스럽게 외우고 있어서 공식으로 답을 찾은 다음 중간풀이를 채우는 식으로 문제를 풀었다. 이처럼

암기된 공식을 통해 먼저 답을 쉽게 찾은 다음 그 중간 풀이를 채워가는 것도 하나의 방법이 될 수 있다. 수리논술을 잘 치기 위해서는 평소에 만나는 공식을 외우지만 말고 반드시 증명해보길 바라고 심화교재에 있는 공식 또한 증명해본다면 이런 식으로 시험에 그대로 나올 수도 있다. 이 적분 공식에서 $m=1$, $n=1$ 일 때,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta) dx \right| = \left| \frac{a}{6} (\beta-\alpha)^3 \right| \text{이 되는데 이 공식은 시중 기본서에서 볼 수 있고 꼭 기억해야 한다.}$$

$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ 을 적분할 때, $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ 이대로 두고 적분하지 말고

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx = \int_0^{\beta-\alpha} ax^m(x+\alpha-\beta)^n dx \quad (\because \text{평행이동과 정적분})$$

$$= (\beta-\alpha)x \int_0^1 a(\beta-\alpha)^m x^m ((\beta-\alpha)x - (\beta-\alpha))^n dx \quad (\because \text{치환적분}) \text{ or } (\because \text{확대/축소와 정적분})$$

$$= a(\beta-\alpha)^{m+n+1} \int_0^1 x^m (x-1)^n dx$$

이렇게 평행이동과 치환적분을 이용해서 식을 최대한 간단하게 정리한 후에 부분적분을 하는 것이 좋다.

여기서 확대/축소와 정적분인 $\int_a^b f(x)dx = m \int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} f(mx)dx$ 이 사용되는데 다음 공식은 치환적분으로도 설명

이 가능하다. 그리고 확대/축소와 정적분은 교과서에 정식적으로 설명되어 있지 않으므로

($\because$ 확대/축소와 정적분) 보다는 ($\because$ 치환적분) 이라고 쓰는 것이 논술답안으로 더 좋을 것이다.

②-3. Actual Fight

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} (1-x)^{n-2} dx \\ &= \frac{n(n-1) \dots 2}{(n+1) \dots (2n-1)} \int_0^1 x^{2n-1} (1-x) dx \\ &= \frac{n(n-1) \dots 2}{(n+1) \dots (2n-1)} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

시험장에서는, 시험장에서 주는 연습장에 계산을 하고, 답안지에는 **계산과정을 많이 생략**해도 된다. 하지만, **꼭바로(교과과정에 맞게) 풀었다는 증거가 되는 부분은 반드시 서술**해줘야 한다.

③-1. Comprehension

②의 결과와 제시문 (다)를 이용해야 한다.

수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ, ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이 수리논술 또한 앞 문제를 이용해 다음 문제를 푸는 경우가 많다.

$$(b)에서 \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f_n(x) = 2x(1-x)^n$ 은 $0 \leq \{2x(1-x)\} \leq \frac{1}{2}$ 이므로 $|f_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이고 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n dx$$

$$-1 < \{2x(1-x)\} < 1 \text{ 이므로 } \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n = \frac{1}{1-2x(1-x)} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^2-2x+1} dx$$

$$\therefore \text{다항함수 } p(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

③-2. Point

point 1

수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ, ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이, 앞 문제를 이용해서 다음 문제를 풀 수 있는 논술이 여러 대학에서 출제되고 있으니 **앞 문제를 의식하면서 다음문제를 풀도록 해야 한다.** 2011 고려대 수리논술의 경우 논제에 ‘②를 이용해서’ 라고 언급해주었지만 2011 연세대 수리논술에서는 언급해주지 않았다. **항상 앞 문제를 의식하는 습관을 들여야 한다.**

point 2

② 문제는 한 문제이지만 그 안에 2개의 문제가 있다. 시험현장에서 당황하게 되면 묻는 두 가지를 정확하게 답하지 않고, 마지막 문제만 푼다거나 하는 일이 생긴다. 논술 시험을 칠 때, **하나하나 묻는 것에 각각 줄을 치고 묻는 것 모두에 답하도록 노력해야 한다.**

③-3. Actual Fight

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f_n(x) = \{2x(1-x)\}^n$ 은 $0 \leq 2x(1-x) \leq \frac{1}{2}$ 이므로.

$|f_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이고 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-2x(1-x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^2-2x+1} dx$$

$$\longrightarrow P(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

수리논술 문제 마다 조금씩 다르겠지만 실제 답안지에 한글을 많이 적을 필요가 없다.

④-1. Comprehension

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^3} \left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^x f(t) dt \right)$ 에서 $g(x) = \int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^x f(t) dt$ 라 하자.

$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^3 = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이다. $g(x)$ 는 연속이므로 미정계수의 결정에 의해 $g(a) = 0$

$$g(a) = 0 \Rightarrow g(x) = (x-a)h_1(x) \cdots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)h_1(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_1(x)}{(x-a)^2}$ 이 존재해야 하므로

미정계수의 결정에 의해 $h_1(a) = 0$ 이고 ①과 마찬가지로 $h_1(x) = (x-a)h_2(x) \cdots \textcircled{2}$ 이 된다. 또 대입하면,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_1(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_2(x)}{x-a}$$

에서 미정계수의 결정에 의해 $h_2(a) = 0$ 이고 $h_2(a) = 0$ 을 이용

$$\text{해서 식을 정리하면 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_2(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_2(x) - h_2(a)}{x-a} = h_2'(a)$$

즉, 세 번의 미정계수의 결정으로 $g(a) = 0$, $h_1(a) = 0$, $h_2(a) = 0$ 을 얻을 수 있고 극한값은 $h_2'(a)$ 임을 알 수 있다.

$h_1(a)$ 를 $g(x)$ 에 관한 식으로 고치기 위해 관계식 $g(x) = (x-a)h_1(x)$ 을 이용하자. $g(x) = (x-a)h_1(x)$ 에

$x=a$ 를 대입하면 $h_1(a)$ 가 0과 곱해지면서 없어진다. 그리고, 주어진 식을 미분하면

$g'(x) = h_1(x) + (x-a)h_1'(x)$ 이 되므로 $g'(a) = h_1(a)$ 이다. 따라서, $h_1(a) = g'(a) = 0$, $h_2(a)$ 를 $g(x)$ 에

관한 식으로 고치기 위해 ①, ②를 이용해 관계식을 찾으면 $g(x) = (x-a)^2 h_2(x)$ 이고 주어진 식을 두 번 미분하면

$$g''(x) = 2h_2(x) + 4(x-a)h_2'(x) + (x-a)^2 h_2''(x) \text{이므로 } g''(a) = 2h_2(a) \text{이다.}$$

따라서, $h_2(a) = \frac{g''(a)}{2} = 0$ 이고, $g''(a) = 0$ 이 된다.

여기서 극한값인 $h_2'(a)$ 도 $g(x)$ 에 관한 식으로 고쳐보자.

$g''(x) = 2h_2(x) + 4(x-a)h_2'(x) + (x-a)^2 h_2''(x)$ 을 한 번 더 미분하면

$$g'''(x) = 6h_2'(x) + 6(x-a)h_2''(x) + (x-a)^2 h_2'''(x) \text{ 이므로, } h_2'(a) = \frac{g'''(a)}{6} \text{가 된다.}$$

따라서, $g(a) = g'(a) = g''(a) = 0$ 이고 극한값은 $\frac{g'''(a)}{6}$ 임을 알 수 있다.

$$g(x) = \int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^x f(t)dt \text{에서 } g(a) = g'(a) = g''(a) = 0 \text{ (즉, } (x-a)^3 \text{는 } g(x) \text{의 인수) 이 되}$$

어야 한다.

$x=a$ 를 대입하면 $g(a) = 0$ 임을 알 수 있다.

$$g'(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \left\{f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{a+x}{2}\right)\right\} = f\left(\frac{a+x}{2}\right) - f(x) \text{ 에서 } g'(a) = 0$$

$$g''(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - f'(x) \cdots \textcircled{3} \text{ 에서 } g''(a) = -\frac{1}{2}f'(a) = 0 \text{ 이 되어야 한다.}$$

따라서 $f'(a) = 0$ 일 때, 극한값이 존재한다.

$$\textcircled{3} \text{를 미분하면 } g'''(x) = \frac{1}{4}f''\left(\frac{a+x}{2}\right) - f''(x) \text{에서 } g'''(a) = -\frac{3}{4}f''(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^3} \left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^x f(t)dt \right) = \frac{g'''(a)}{6} = -\frac{1}{8}f''(a)$$

④-2. Point

point 1

2011 고려대 수리논술에서 가장 어려운 문제였고 논리적인 풀이가 요구되는데,

상당수의 학생이 논리를 많이 비약해서 $g(x)$ 가 $(x-a)^3$ 을 인수로 가진다고 해서 문제를 풀었다. 위에 풀이에서 보듯이 제시문 (라)에 주어진 인수정리를 세 번이나 써가면서 $(x-a)^3$ 이 인수인 이유를 설명했고 그것이 논리적인 풀이가 되겠다.

point 2

연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = b$ 이면, $f(a) = 0$, $f'(a) = b$ 를 이용하는 기본문제를 많이 봤을 것

이다. 기본서를 좀 더 깊게 공부하다보면 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^2} = b$ 과 같은 식을 만나게 되는데 대부분의 학생이 '로피탈

의 정리'로 문제를 풀어 버려서 문제 (d)가 상당히 어려웠을 것이다. 즉, 평소 수리가형을 공부 할 때 빠른 풀이 또한 가형을 위해 공부해야 하지만 교과과정에 맞는 풀이 또한 반드시 해봐야 한다.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^2} = b$ 이면, $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $\frac{f''(a)}{2} = b$ 을 교과과정에 맞는 풀이로 유도해보자.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^2} = b$ 에서 미정계수의 결정을 이용해서 $f(a) = 0$

인수정리를 이용하면 $f(a) = 0 \rightarrow f(x) = (x-a)g(x)$ 주어진 식을 대입하면 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = b$ 이 된다.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = b$ 에서 미정계수의 결정을 이용해서 $g(a) = 0$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$ 이므로 $g'(a) = b$ 가 된다.

이제 $g(a)$ 를 $f(x)$ 에 관한 식으로 고쳐야 하는데 관계식이 $f(x) = (x-a)g(x)$ 밖에 없다

$f(x) = (x-a)g(x)$ 에서 $g(a)$ 를 구하기 위해 $x = a$ 를 넣어보면 $g(a)$ 에 0이 곱해지면서 사라진다.

그것을 피하기 위해서 $f(x) = (x-a)g(x)$ 을 미분하면 $f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$

여기서 $x = a$ 를 대입하면 $f'(a) = g(a)$ 이 된다. $g(a) = 0 \rightarrow f'(a) = 0$

또 $g'(a)$ 를 $f(x)$ 에 관한 식으로 고치기 위해서 $f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$ 을 또 미분하면

$f''(x) = 2g'(x) + (x-a)g''(x)$ 이 된다. 따라서 $f''(a) = 2g'(a)$ 가 된다. $g'(a) = b \rightarrow \frac{f''(a)}{2!} = b$

이렇게 해서, $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $\frac{f''(a)}{2} = b$ 을 로피탈의 정리 없이 유도해 내었다

미정계수의 결정, 인수정리, 관계식 미분으로 유도해 낼 수 있다.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^3} = b$ 이면, $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $\frac{f'''(a)}{3!} = b$ 또한 로피탈 없이 유도해보길 바란다.

point 3

관계식 $f(x) = (x-a)g(x)$ 에서 $g'(a) = f'(a)$ 를 유도하기 위해 식을 미분해야 하는데

그것을 생각해내기 어려울 수 있었지만 로피탈의 정리를 이용해서 풀 수 있다는 것이 미분을 하라는 힌트가 된다.

필자는 로피탈의 정리를 이용해서 먼저 답을 찾은 다음 중간 풀이를 채워가기 시작했다. 이 처럼 **교과외 과정을 통해 먼저 답을 쉽게 찾은 다음 그 중간 풀이를 채워가는 것도 하나의 방법**이 될 수 있다.

④-3. Actual Fight

(d)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^3} \left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^3} \text{이 존재 해야}$$

$$\text{하 } \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^3 = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0 \rightarrow g(x) = (x-a) h_1(x) \text{ -- ①}$$

($\because g(x)$ 는 다항 함수이고 연속)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h_1(x)}{(x-a)^2} \text{가 존재 해야 하므로 } h_1(a) = 0 \rightarrow h_1(x) = (x-a) h_2(x) \text{ -- ②}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h_2(x)}{x-a} \text{가 존재 해야 하므로 } h_2(a) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{h_2(x) - h_2(a)}{x-a} = h_2'(a)$$

$$\therefore g(a) = 0, h_1(a) = 0, h_2(a) = 0, \text{ 극한값} = h_2'(a)$$

$$\text{①에 의해 } g'(x) = h_1(x) + (x-a) h_1'(x) \rightarrow g'(a) = h_1(a)$$

$$\text{①, ②에 의해 } g(x) = (x-a)^2 h_2(x)$$

$$\rightarrow g'(x) = 2(x-a) h_2(x) + (x-a)^2 h_2'(x)$$

$$\rightarrow g''(x) = 2 h_2(x) + 4(x-a) h_2'(x) + (x-a)^2 h_2''(x) \rightarrow g''(a) = 2 h_2(a)$$

$$\rightarrow g'''(x) = 2 h_2'(x) + 4 h_2'(x) + 6(x-a) h_2''(x) + (x-a)^2 h_2'''(x)$$

$$\rightarrow g'''(a) = 6 h_2''(a)$$

$$\therefore g(a) = g'(a) = g''(a) = 0, \text{ 극한값} = \frac{g'''(a)}{6}$$

$$g(x) = \int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^x f(t) dt \rightarrow g(a) = 0$$

$$g'(x) = f\left(\frac{a+x}{2}\right) - f(x) \rightarrow g'(a) = 0, g''(x) = \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - f'(x) \rightarrow g''(a) = -\frac{1}{2} f'(a) = 0$$

$$\therefore f'(a) = 0 \text{ 일 때, 극한값 존재}$$

$$g'''(x) = \frac{1}{4} f''\left(\frac{a+x}{2}\right) - f''(x) \rightarrow g'''(a) = -\frac{3}{4} f''(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^3} = h_2'(a) = \frac{g'''(a)}{6} = -\frac{1}{8} f''(a)$$

로피탈의 정리 없이 완벽히 논리적으로 해결했다. 이와 같이 논리적 비약을 해서는 안 된다.

25

①-1. Comprehension

일단, 넓이 $S(t)$ 를 찾아보자.

직선 OP 의 방정식은 $y = \left(\frac{y(x)}{x(t)}\right)x$ 이므로

$$: \text{부채꼴 } OAP \text{의 넓이} = \int_0^{x(t)} \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x dx + \int_{x(t)}^1 \sqrt{1-x^2} dx = P \quad \cdots \quad ①$$

이고

$x^2 + y^2 = 1$ 에서 $y \rightarrow ky$ 를 대입해야 $x^2 + k^2y^2 = 1$ 이 되므로

원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 모든 점의 y 좌표가 $\frac{1}{k}$ 배가 된다.

즉, 점 P 를 원에 대입하면 $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ 이 성립하게 되고, 점 Q 를 $x^2 + k^2y^2 = 1$ 에 대입했을 때 성립해야 하므로 점 Q 는 점 P 의 y 좌표를 $\frac{1}{k}$ 배 한 $Q\left(x(t), \frac{1}{k}y(t)\right)$ 이 된다.

직선 OQ 의 방정식은 $y = \left(\frac{1}{k}\right) \times \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x$ 이므로

$$: \text{도형 } OAQ \text{의 넓이} = \int_0^{x(t)} \left(\frac{1}{k}\right) \times \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x dx + \int_{x(t)}^1 \left(\frac{1}{k}\right) \sqrt{1-x^2} dx \\ = \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{x(t)} \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x dx + \int_{x(t)}^1 \sqrt{1-x^2} dx \right\} = S(t) \quad \cdots \quad ②$$

①, ②에서 $\left(\frac{1}{k}\right) \times P = S(t)$ 라는 것을 알 수 있다. 따라서, 도형 OAQ 의 넓이는 부채꼴 OAP 의 넓이의 $\frac{1}{k}$

배 이므로, $P = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\theta$ 에서 $S(t) = \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{\theta}{2k}$ 가 된다. 주어진 식을 t 에 대해 미분하면

$$\frac{d\{S(t)\}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta}{2k} \right), \text{ 여기서 } \theta \text{는 변수이고 } k \text{는 상수이므로, } \frac{d\{S(t)\}}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta}{2k} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2k} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$$

즉, $\frac{d\{S(t)\}}{dt} = \frac{1}{2k} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$ 에서 $\frac{d\theta}{dt}$ 가 상수인지 알아봐야 하는데, 점 P 가 시계 반대 방향으로 시각 t 에 따라 일정한 속도로 돌고 있으므로 그 이동거리인 호 AP 를 l 이라 하자. 반지름이 1이므로 $l = \theta$ 가 된다. 따라서, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{dt}$ 인데, 호 AP 의 변화율 $\frac{dl}{dt}$ 가 상수이므로, $\frac{d\theta}{dt}$ 이 상수가 된다. 또한, k 도 상수이므로 $\frac{d\{S(t)\}}{dt}$ 가 상수이다.

①-2. Point

point 1

[점 $P(x(t), y(t))$ 가 단위원 위의 점 $A(1, 0)$ 에서 출발하여 시계 반대 방향으로 시각 t 에 따라 일정한 속도로 돌고 있다.] 라는 문장을 식으로 해석해야 한다. 여기서, 점 P 가 원 위를 회전하게 되는데, 방향이 계속해서 바뀌므로 ‘속도가 일정’한 것은 불가능하다. 따라서 스스로 ‘속력이 일정’하다고 생각하고 풀어야 한다. 이 오류에 대해 지적했다면 더 좋은 점수를 받을 수 있었을 것이지만, 시험 현장에서 이것을 지적한 사람은 드물 것이다. 이처럼 시험문제 지문에 함정(오류)이 있을 수도 있음을 명심해두자. (실제 사례가 몇 번 있다.)

point 2

넓이 $S(t)$ 를 '논리적으로' 구하는 것이 포인트인데, 그 방법은 다양하다. 1. **Comprehension**에서 제시한 방법은 교과서적으로 정적분을 이용하여 부채꼴의 넓이와의 관계를 찾아서 $S(t)$ 를 찾는 방법이다. 이번에는, '카발리에리의 원리'를 이용해서 구해보자. <그림 1>에서

y 축에 평행한 파란선분(직선 OP 부분)으로 도형을 자르거나, 빨간선분(원, 타원 부분)으로 도형을 자르면 항상 길이비가 $k:1$ 이 되게 된다. 따라서 $S(t)$ 의 넓이는 부채꼴 넓이의

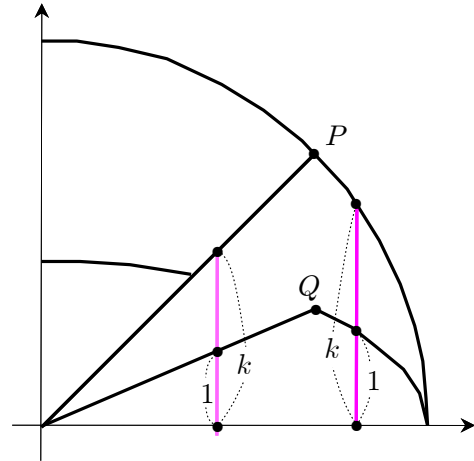
$\frac{1}{k}$ 배가 된다. 이런 식으로 $S(t)$ 를 찾게 되면 기존의 정적분

방법보다 훨씬 빠르게 찾을 수 있다. 여기서 직선 OP 와

직선 OQ 의 기울기가 $\frac{1}{k}$ 배 이므로, 파란선분의 길이비가

$k:1$ 가 된다는 사실과, 원에서 타원으로 갈 때,

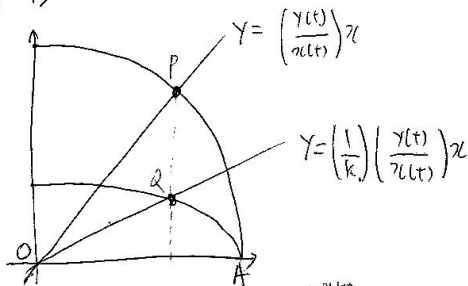
$y \rightarrow ky$ 이므로, 길이비가 $k:1$ 가 된다는 두 가지 이유를 명백히 서술 해 주어야 할 것이다.



<그림 1>

①-3. Actual Fight

<1-1>



문제에서 원위를 움직이는 점 P는 계속 해서 방향이 바뀌므로 '일정한 속도'가 아니라 '일정한 속력'으로 해석해서 풀이 보자,

$$\text{부채꼴 } OAP = \int_0^{\pi(t)} \left(\frac{\gamma(t)}{\pi(t)} \right) \pi dx + \int_{\pi(t)}^1 \sqrt{1-x^2} dx = P$$

$$S(t) = \text{정적분 } OAPQ = \int_0^{\pi(t)} \left(\frac{1}{k} \right) \left(\frac{\gamma(t)}{\pi(t)} \right) \pi dx + \int_{\pi(t)}^1 \left(\frac{1}{k} \right) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{k} P$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{k} P = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} (1)^2 \theta = \frac{\theta}{2k}$$

$$\rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta}{2k} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta}{2k} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{2k} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \text{상수} \quad \left(\because k \text{는 상수}, \frac{d\theta}{dt} \text{는 상수} \right) \quad \text{--- ①}$$

①: 점 P가 일정한 속력으로 움직이는데 $\angle A\theta = \ell = \theta$ 이므로

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \text{ 는 상수}$$

카발리에리의 원리를 이용한 답안지도 작성해보길 바란다. 교과과정을 벗어나는 정리이기도 하지만, 교과서 탐구활동에 제시되어 있고 그 원리에 맞게 비율이 $k:1$ 이 되는 이유를 올바르게 설명한다면 감점이 없을 것이다(하지만 위와 같은 정적분의 실수배를 활용한 서술이 더 교과과정에 맞고 안전한 풀이라 할 수 있다.) 또한, 수리영역에 있어서 카발리에리의 원리는 타원의 넓이, 타원의 회전체, 정적분 등을 이해하는데 도움이 되고 문제를 빠른 속도로 해결하는데 도움이 된다. 그리고 논술에서도 도움이 되므로 상위권이라면 공부 하는 것이 좋다. 또한 위 답안지처럼 “속도가 일정”에 오류가 있음을 지적한다면 100점의 답안지가 될 것이다.

②-1. Comprehension

일단, ‘적어도 하나’라는 말에서, 평균값의 정리 혹은 중간값의 정리 가 쓰인다는 사실을 깨달아야 한다. 여기서 점

$P(x(t), y(t))$, 점 $Q\left(x(t), \frac{1}{k}y(t)\right)$ 인데, α 와 θ 의 관계식을 찾아야 하는데, $\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)}$ 이고

$\tan\alpha = \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$ 이므로, $\tan\theta = k\tan\alpha \cdots \textcircled{1}$ 라는 관계식을 얻을 수 있다. 여기서 시간에 대한 변화율을

구하기 위해 양변을 t 에 대해 미분하면,

$\sec^2\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{k} \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$ 이고, $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ 일 때, $\sec^2\alpha = \frac{1}{k} \sec^2\theta \cdots \textcircled{2}$ 이다.

②에서 $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{k} (1 + \tan^2\theta)$, 관계식을 이용하면 $1 + \frac{1}{k^2} \tan^2\theta = \frac{1}{k} (1 + \tan^2\theta)$ 이고 정리하면

$\tan\theta = \sqrt{k}$ 가 된다. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$f(\theta) = \tan\theta - \sqrt{k}$ 의 그래프를 그려보면 오른쪽 그림과 같다.

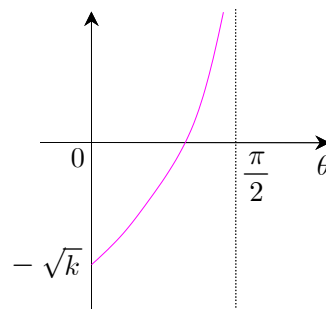
여기서 $f(\theta)$ 는 연속이고, $f(0) = -\sqrt{k}$, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = \infty$ 이므로

$\tan\theta - \sqrt{k} = 0$ 를 만족하는 θ 가 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 적어도 하나 존재하게

된다. 또한 $\tan\theta = \sqrt{k}$ 일 때, ①에서 $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ 이므로

두 값을 곱하면 $\tan\theta \times \tan\alpha = 1$ 이라는 관계식을 얻을 수 있다. 식 $\tan\theta \times \tan\alpha = 1$ 을 더 정리하면

$\tan\theta = \frac{1}{\tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ 이므로, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ 라는 관계식을 최종적으로 이끌어낼 수 있다.



$$\text{극한값} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right\} \times \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \right\} \times \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right\} \times \tan\alpha}{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \right\} \times \tan\theta}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right\} \times \tan\alpha}{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \right\} \times k \tan\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right\}}{\left\{ \frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \right\} \times k} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \frac{1}{k} \end{matrix} \\
&(\because \tan\theta = k \tan\alpha) \qquad \qquad \qquad \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \right)
\end{aligned}$$

②-2. Point
point 1

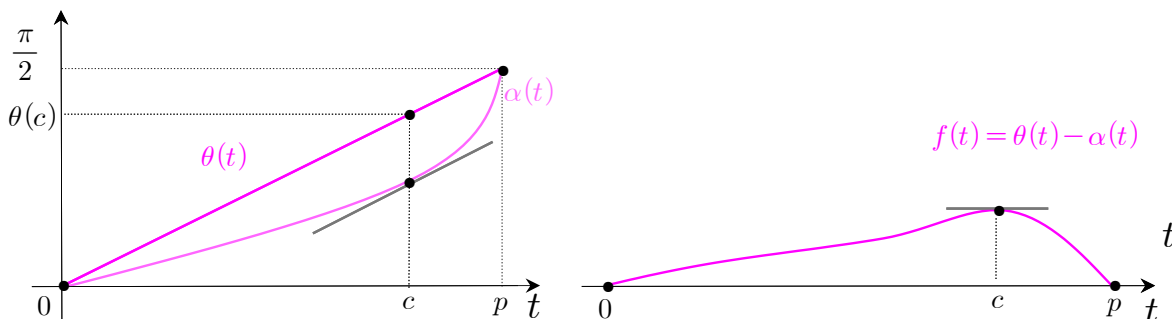
‘적어도 하나’라는 멘트가 보이면 중간값의 정리나 평균값의 정리(롤의 정리)를 이용해서 풀 수 있다는 것을 알아야 한다. 이것은 수리영역 ㄱ, ㄴ, ㄷ 문항에서도 자주 나오므로 확실하게 공부해야 한다.

<1-2>를 평균값의 정리로 풀어 보자.

각 θ 와 각 α 가 모두 t 에 관한 변수이므로 편의상 $\theta(t)$, $\alpha(t)$ 라 하고,

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 인 순간의 시각 $t = p$ 라고 약속하자.

$f(t) = \theta(t) - \alpha(t)$ 라 하면 $f(0) = 0$, $f(p) = 0$ 이다. 그런데, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\theta(t) > \alpha(t)$ 이므로



그래프가 위와 같이 그려지고, $f(0) = 0$, $f(p) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해서

$f'(t) = 0$ 인 순간이 $0 < t < p$ 에 반드시 존재한다.

$$f'(t) = 0 \rightarrow \theta'(t) - \alpha'(t) = 0 \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \text{이므로,}$$

$0 < t < p$ 에서 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ 을 만족시키는 t 가 적어도 하나 존재하게 되고, 그 t 를 c 라 하면

$\theta(c)$ 값이 $0 < \theta(c) < \frac{\pi}{2}$ 에 존재하게 된다.

여기서 다시 1. Comprehension처럼 식을 정리해야 α 와 θ 의 관계식을 찾을 수 있다.

따라서 1. Comprehension처럼 중간값의 정리로 푸는 것이 더 빠른 풀이라 할 수 있다.

<1-2>를 조금 다른 방식으로 식을 정리해서 중간값의 정리를 이용해보자. $\tan\theta = k\tan\alpha$ 에서

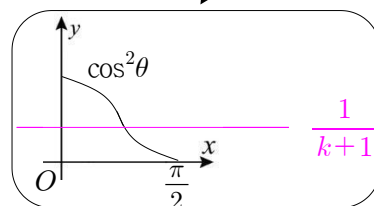
양변을 t 에 대해 미분하면, $\sec^2\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{k} \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$ 이고, $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ 일 때, $\sec^2\alpha = \frac{1}{k} \sec^2\theta$ 에서

$k\cos^2\theta - \cos^2\alpha = 0 \cdots \textcircled{1}$ 이다. $\tan\theta = k\tan\alpha$ 에서 $\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{\tan^2\theta + k^2}}$ 이므로, $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$k = \frac{k^2}{\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta}$ 이고 정리하면 $\cos^2\theta = \frac{1}{k+1}$ 이 된다. $f(\theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{k+1}$ 라 할 때,

$f(0) = 1 - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2}$ ($\because k > 1$ 이므로, $0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2}$), $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{k+1} < 0$ 이다.

따라서 $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ 이므로, 중간값의 정리에 의해 θ 값이 존재 한다.



또한, 두 변화율이 같아지는 순간의 α 와 θ 의 관계식을 다시 찾아야 하는데, 그 순간에 $\cos^2\theta = \frac{1}{k+1}$ 이 성립하

므로, $\sec^2\alpha = \frac{1}{k} \sec^2\theta$ 에 $\cos^2\theta = \frac{1}{k+1}$ 을 정리한 $\sec^2\theta = k+1$ 을 대입하면 $\sec^2\alpha = \frac{k+1}{k}$ 인데,

$\sec^2\theta = k+1$ 에서 $\tan^2\theta = k$ 이고 $\sec^2\alpha = \frac{k+1}{k}$ 에서 $\tan^2\alpha = \frac{1}{k}$ 이므로

곱하면 $\tan^2\theta \times \tan^2\alpha = 1$ 이고 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan\theta \geq 0$, $\tan\alpha \geq 0$ 이므로,

$\tan\theta \times \tan\alpha = 1$ 이라 할 수 있다. 따라서 마찬가지로 정리하면 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ 라는 관계식을 얻을 수 있다.

1. Comprehension에서의 중간값의 정리는 ∞ 가 나오므로, 이 풀이가 더 고교과정에 맞는 풀이라 할 수 있다.

point 2

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ 에서 x 가 0으로 가까이 갈 때 $\tan x \approx x$ 로 생각하여 푸시는 분이 많을 것이다. 그런데 그 반대

로 x 가 0으로 가까이 갈 때 $x \approx \tan x$ 라고 생각해도 상관이 없다. 이것을 이용해서

$\frac{\pi}{2} - \theta \rightarrow 0$, $\frac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow 0$ 이므로,

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\tan\alpha}{\tan\theta} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\tan\alpha}{k\tan\alpha} = \frac{1}{k}$$

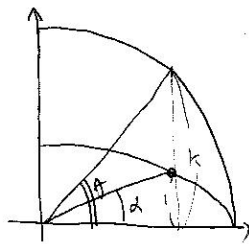
이렇게 빠르게 답을 구할 수도 있다.

하지만, 문제에서 '극한값'을 구하라고 했으므로 구하는 과정까지 채점하겠다는 것을 말한다. 따라서 이렇게 풀게 되면 분명히 감점이 되고, 로피탈의 정리 같은 것을 사용해도 감점이 될 수밖에 없다. 필자는 실제 시험장에서

②문제를 풀 때, 1. Comprehension의 풀이가 떠오르지 않아, point 2에서 설명한 풀이로 답을 먼저 찾은 다음 중간 풀이를 채워나가면서 1. Comprehension의 풀이를 완성했다. 이런 식으로 교과와 과정으로 먼저 답을 찾은 다음 교과과정에 맞는 풀이를 중간에 채워나가는 방법도 수리논술 문제를 풀 때 하나의 전략이 될 수 있다.

②-3. Actual Fight

<1-2>



$$\because k = \tan \alpha: \tan \theta, \quad \tan \theta = k \tan \alpha$$

$$\frac{d}{dt} (\tan \theta) = \frac{d}{dt} (k \tan \alpha)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\tan \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = k \frac{d}{d\alpha} (\tan \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\sec^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = k \sec^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \rightarrow \sec^2 \theta = k \sec^2 \alpha$$

여기서 $\left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)$ 일 때 약분하면 $\cos^2 \alpha = k \cos^2 \theta \quad \dots (1)$

$\tan \theta = k \tan \alpha$ 여기서 $\cos^2 \alpha = \frac{k^2}{\tan^2 \alpha + k^2}$ 이므로 (1)에 대입하면

$$\left(0 \leq \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{k^2}{\tan^2 \alpha + k^2} = k \cos^2 \theta, \quad k = \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta, \quad k = 1 + \cos^2 \theta (k^2 - 1)$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{k+1}, \quad f(\theta) = \cos^2 \theta - \frac{1}{k+1} \text{ 이라 하면}$$

$$f(0) = 1 - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2} \quad \left(\because 0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \right), \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{k+1} < 0 \text{ 이므로}$$

$$f(0) f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \text{ 이므로, 중간값 정리에 의하여 만족하는 } \theta \text{가 적어도 하나 존재}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \text{ 일 때 } k \cos^2 \theta = \cos^2 \alpha = 0 \text{ 이므로 } \tan \theta = k \tan \alpha \text{ 에서}$$

$$k \frac{1}{2} \text{ 이하 하므로 } \tan \theta = \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right) \tan \alpha, \quad \sin \theta \cos \theta - \sin \alpha \cos \alpha = 0 \text{ 이므로}$$

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha \rightarrow \sin 2\theta - \sin 2\alpha = 0 \text{ 이므로 } \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta - \alpha) = 0$$

$$\therefore \theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ or } \theta = \alpha$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \alpha} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)} \times \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \times \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{1}{k} \quad \left(\because \begin{array}{l} \tan \theta = k \tan \alpha \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi}{\tan \alpha} = 1 \end{array} \right)$$

③-1. Comprehension

수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ, ㄴ 으로 ㄷ을 풀 듯이 과 ② 내용을 이용해서 <1-3>을 풀어야 한다.

삼각치환하면 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$, $Q = \left(\cos\theta, \frac{1}{k} \sin\theta\right)$ 이므로,

$$f+g = \frac{1}{2}(\text{밑변})(\text{높이}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sin\theta \cos\theta$$

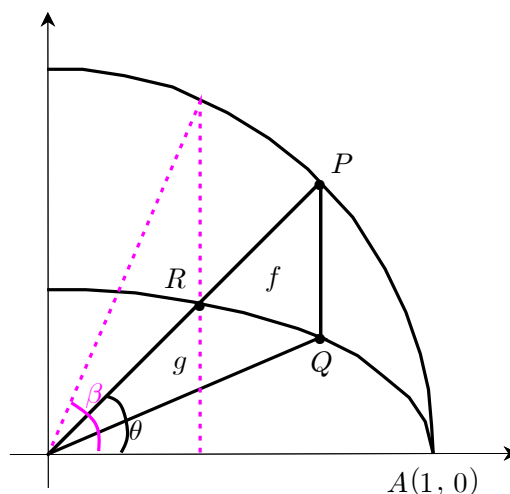
그 다음, g 의 값을 구해야 하는데 부채꼴의 축소도형인 OAR 에서 또 다른 부채꼴의 축소도형 OAQ 를 빼면 된다.

즉, $g = OAR - OAQ$ 가 된다. $OAQ = \frac{1}{2k}\theta$ 이고,

OAR 을 구하기 위해서 붉은색 보조선을 그어 β 각을 추가시킨다.

(단, $\tan\beta = k\tan\theta$)

$OAR = \frac{1}{2k}\beta$ 이므로, $g = \frac{1}{2k}(\beta - \theta)$ 가 된다.



$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{(f+g)-g}{g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left\{ \left(\frac{f+g}{g} \right) - 1 \right\} \text{에서 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f+g}{g} \text{을 구해보자.}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f+g}{g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sin\theta \cos\theta}{\frac{1}{2k}(\beta - \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\sin\theta \cos\theta}{\beta - \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\frac{\sin\theta \cos\theta}{\tan(\beta - \theta)}}{\left\{ \frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right\}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\sin\theta \cos\theta \times \left\{ \frac{1 + \tan\beta \tan\theta}{\tan\beta - \tan\theta} \right\}}{\left\{ \frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right\}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\sin\theta \cos\theta \times \left\{ \frac{1 + k \tan^2\theta}{(k-1)\tan\theta} \right\}}{\left\{ \frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right\}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2\theta \times \{1 + k \tan^2\theta\}}{\left\{ \frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right\}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2\theta + k \sin^2\theta}{\left\{ \frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right\}} = k$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g} = k-1$$

③-2. Point

point 1

수리영역의 ㄱ, ㄴ, ㄷ 문제에서 ㄱ, ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이, 앞 문제를 이용해서 다음 문제를 풀 수 있는 논술이 여러 대학에서 출제되고 있으니 **앞 문제를 인식하면서 다음문제를 풀도록 해야 한다.** 2011 고려대 수리논술의 경우 논제에 ‘②를 이용해서’ 라고 언급해주었지만 2011 연세대 수리논술에서는 언급해주지 않았다. **항상 앞 문제를 인식하는 습관을 들여야 한다.**

point 2

극한값을 구하는 단순한 문제인데 ‘로피탈의 정리’ 라든지, ‘부채꼴의 삼각형 근사’를 이용해서 직관으로 풀 수도 있다. 여기서, ‘로피탈의 정리’는 무조건 감점요인이 되고 여러 가지 ‘직관적 풀이’는 적절한 근거를 제시 한다면 괜찮은 점수를 받을 수 있을 것이다. (근거 없는 직관은 무조건 감점이 된다.) 참고로 대부분의 사람들이 부채꼴을 삼각형으로 근사해서 풀었고 당연히 많이 감점되었다. 적절한 근거를 제시하면서 직관적으로 풀어 보면,

풀이 1 : <함수의 극한의 대소 관계>

$$g_1 = \triangle OQR = \frac{1}{2} \times \overline{OR} \times h$$

$$g_2 = \triangle OQS = \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times h$$

$$f+g = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times h$$

$$g_1 < g < g_2$$

$$\frac{g_1}{f+g} < \frac{g}{f+g} < \frac{g_2}{f+g} ,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g_1}{f+g} \leq \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g}{f+g} \leq \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g_2}{f+g}$$

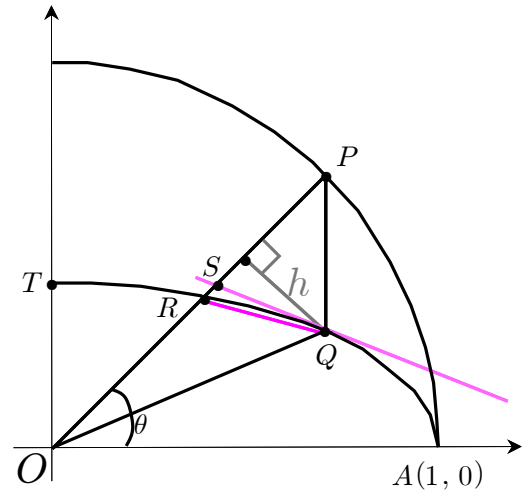
$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g_1}{f+g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \overline{OR} = \frac{1}{k}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g_2}{f+g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \overline{OS} = \frac{1}{k}$$

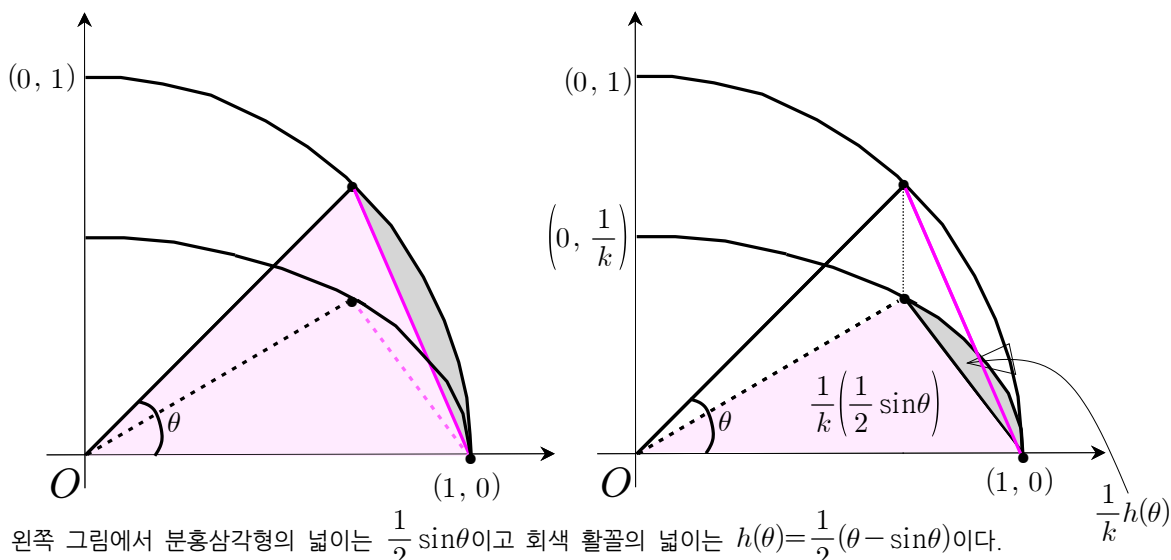
($\because \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$ 일 때, 점 $R \rightarrow$ 점 T , 점 $S \rightarrow$ 점 T)

이므로, 함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g}{f+g} = \frac{1}{k}$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{g}{f+g} = \frac{1}{k} \text{에서 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f+g}{g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(1 + \frac{f}{g}\right) = k \text{ 이므로 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g} = k-1$$



풀이 2 : <활꼴을 무시할 수 있는 근거 제시>

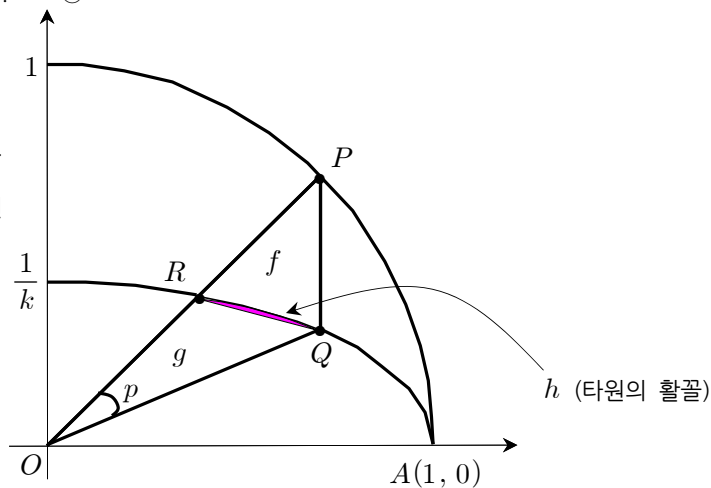


$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{h(\theta)}{\frac{1}{2} \sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\theta - \sin \theta)}{\frac{1}{2} \sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} - 1 \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)} - 1 \right) = 0 \text{ 이고}$$

왼쪽 그래프의 y 좌표를 축소한 타원에서 나타나는 삼각형과 활꼴의 축소도형 또한 왼쪽 도형의 $\frac{1}{k}$ 배이므로 타원의 활꼴에 대해서도 마찬가지로의 성질이 나타난다. ... ①

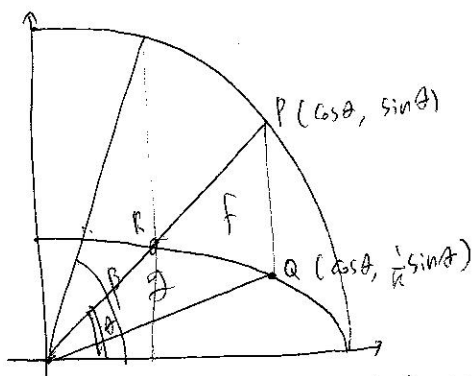
오른쪽 그림처럼 각도를 $\theta - \alpha = p$ 라 하자.

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 이면 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 이므로 $p \rightarrow 0$ 이 된다.



$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{f}{g} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f}{g} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f+h-h}{g-h+h} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{f+h}{g-h} - \frac{h}{g-h}}{1 + \frac{h}{g-h}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{\triangle RQP}{\triangle OQR} - \frac{h}{g-h}}{1 + \frac{h}{g-h}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} - \frac{h}{g-h}}{1 + \frac{h}{g-h}} = \frac{\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{h}{g-h}}{\lim_{p \rightarrow 0} (1) + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{h}{g-h}} = \frac{\left(\frac{1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \right) - 0}{1 + 0} \quad (\because \text{①}) = k - 1 \end{aligned}$$

$\langle 1-3 \rangle$



$$g = OAR - OAG = \frac{1}{2k} \beta - \frac{1}{2k} \theta = \frac{1}{2k} (\beta - \theta)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{f+g}{g} - 1 \right) \dots \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{f+g}{g} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin \theta \cos \theta}{\frac{1}{2k} (\beta - \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\beta - \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right)}{\left(\frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (k-1) \frac{\sin \theta \cos \theta \times \left\{ \frac{1 + \tan \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} \right\}}{\left\{ \frac{\beta - \theta}{\tan(\beta - \theta)} \right\}} \end{aligned}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2 \theta \times \{1 + k \tan^2 \theta\}}{\left\{ \frac{p-\theta}{\tan(p-\theta)} \right\}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2 \theta + k \sin^2 \theta}{\frac{p-\theta}{\tan(p-\theta)}} = k$$

$$\therefore \text{On } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f}{g} = k +$$

150 ... 적분과 통계