

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

5지선다형

23. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 θ 에 대하여 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\sec \theta$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\sin^2 \theta = \frac{1}{5}, \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x \sin^2 2x \, dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$\sin 2x = t$
 $2\cos 2x \, dx = dt$
 $\int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

25. 자연수 r 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7 \times r^n} = 1$ 이 성립하도록 하는 모든 r 의 값의 합은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

① $1 \leq r \leq 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r \left(\frac{r}{3}\right)^n}{1 + 7 \left(\frac{r}{3}\right)^n} = 1 \quad r = 1, 2$$

② $r = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 3 \cdot 3^n}{3^n + 7 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n}{8 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \quad (\times)$$

③ $r \geq 4$

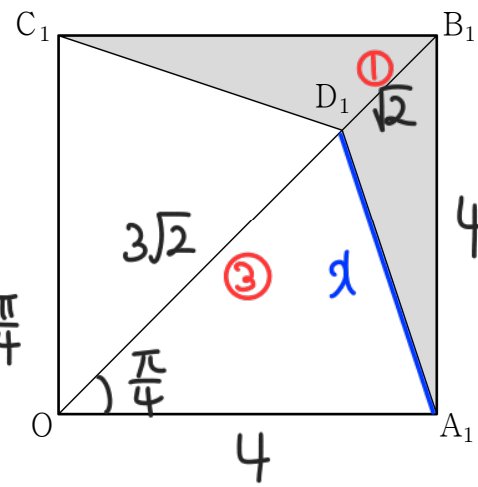
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n + r}{\left(\frac{3}{r}\right)^n + 7} = \frac{r}{7} = 1, \quad r = 7$$

$\therefore r = 1, 2, 7$

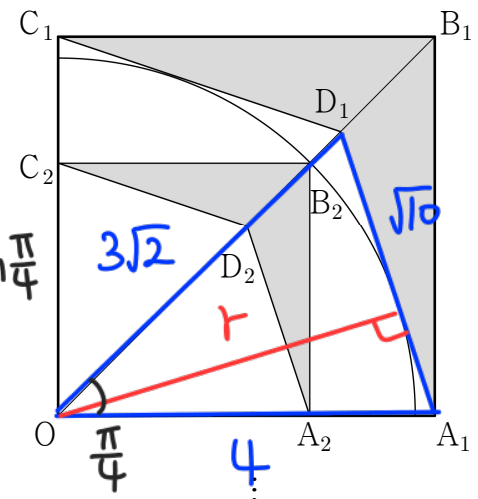
26. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 의 대각선 OB_1 을 3:1로 내분하는 점을 D_1 이라 하고, 네 선분 A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 로 둘러싸인 ∇ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 중심이 O 이고 두 직선 A_1D_1 , C_1D_1 에 동시에 접하는 원과 선분 OB_1 이 만나는 점을 B_2 라 하자. 선분 OB_2 를 대각선으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 를 그리고 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 ∇ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 + 16 \\ &- 2 \times 3\sqrt{2} \times 4 \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 10 \\ x &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times r \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \sin \frac{\pi}{4} \\ \therefore r &= \frac{12}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \Delta OAB_1 \times \frac{1}{4} \\ &= 2 \times 8 \times \frac{1}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{다음은 비} &= \frac{OB_2}{OB_1} \\ &= \frac{12}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

- ① $\frac{70}{11}$ ② $\frac{75}{11}$ ③ $\frac{80}{11}$ ④ $\frac{80}{9}$ ⑤ $\frac{85}{9}$

$$\frac{S_1}{1 - \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{4}{1 - \frac{9}{20}} = \frac{80}{11}$$

27. 곡선 $y = xe^{-2x}$ 의 변곡점을 A라 하자. 곡선 $y = xe^{-2x}$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① e^{-2} ② $3e^{-2}$ ③ 1 ④ e^2 ⑤ $3e^2$

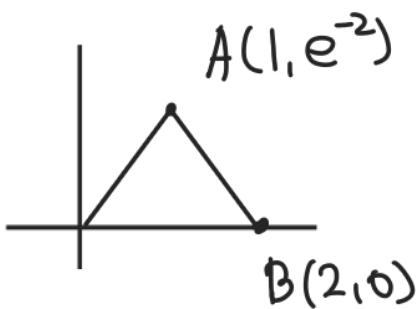
$$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$$

$$f''(x) = (4x-4)e^{-2x} \rightarrow A(1, e^{-2})$$

$$f'(1) = -e^{-2}$$

$$y = -e^{-2}(x-1) + e^{-2}$$

$$= -e^{-2}x + 2e^{-2} \rightarrow B(2, 0)$$



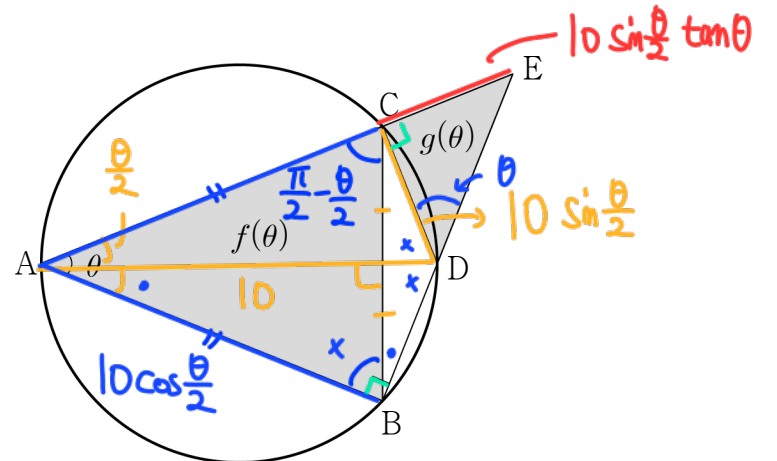
$$\frac{1}{2} \times 2 \times e^{-2} = e^{-2}$$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고,

$AB = AC$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC = \theta$ 라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를

$g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

[4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 10 \sin \frac{\theta}{2} \tan \theta \times 10 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= 50 \sin^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times (10 \cos \frac{\theta}{2})^2 \sin \theta$$

$$= 50 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta$$

$$\frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} = \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta} \right)^2 \times \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

단답형

29. 함수 $f(x) = x^3 - x$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x) = ax^3 + x^2 + bx + 1$ 이 있다. 함수 $g(x)$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ g^{-1})(x) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ \frac{1}{\pi} \sin \pi x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

$$f(x) = x(x-1)(x+1), f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x), 0 = f(g^{-1}(1)) = f(0)$$

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x), 0 = f(g^{-1}(0))$$

$$g^{-1}(0) = 0, 1, -1$$

($g^{-1}(1) = 0$).

$$h'(x) = \begin{cases} f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) & (x < 0, x > 1) \\ \cos \pi x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$x=1, f'(0) \times \frac{1}{g'(0)} = -1$$

$$g'(0) = 1 > 0$$

$\rightarrow g(x)$ 는 증가함수

$$\therefore g^{-1}(0) = -1, g(-1) = 0 = -a + 1, a = 1$$

($g^{-1}(0) = 1, g(1) = 0$ 이면 $g(0) = 1$, 증가 X)

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g(a+b) = g(2) = 15$$

15

16/20

30. 두 자연수 a, b 에 대하여 이차함수 $f(x) = ax^2 + b$ 가 있다. 함수 $g(x)$ 를

$$a, b \text{ 자연수 } f(x) > 0.$$

$$g(x) = \ln f(x) - \frac{1}{10} \{f(x) - 1\}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 직선 $y = |g(t)|$ 와 함수 $y = |g(x)|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $g(x), h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 7 이다.

$\int_0^a e^x f(x) dx = me^a - 19$ 일 때, 자연수 m 의 값을 구하시오.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$x=0 \text{ 에서 } g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{10} \right)$$