

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} + \log_2 8$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$2^{2 \times \frac{1}{2}} + \log_2 2^3$$
$$= 2 + 3$$

2. $\int_0^1 (2x+3)dx$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

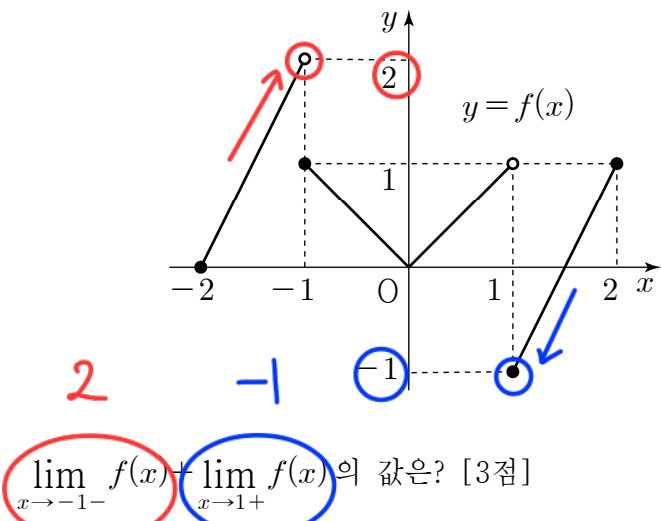
$$[x^2 + 3x]_0^1 = 4$$

3. 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 에 대하여 $f'(1) = 0$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$f'(x) = 2x - a$$
$$f'(1) = 2 - a = 0$$
$$a = 2$$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

귀납적으로 정의된 수열은 대입, 나열, 관찰이 기본

5. 부등식 $5^{2x-7} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는?

[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$5^{2x-7} \leq 5^{-x+2}$$

$$2x-7 \leq -x+2$$

$$3x \leq 9$$

$$x \leq 3$$

$$x = 1, 2, 3$$

6. $\cos(-\theta) + \sin(\pi + \theta) = \frac{3}{5}$ 일 때, $\sin\theta \cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{7}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$ ⑤ $\frac{9}{25}$

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{3}{5}$$

↓ 제곱

$$1 - 2\cos\theta \sin\theta = \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta \cos\theta = \frac{8}{25}$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 5 - \frac{10}{a_n} & (a_n \text{ 이 정수인 경우}) \\ -2a_n + 3 & (a_n \text{ 이 정수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_9 + a_{12}$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$$a_1 = 10 \quad \text{정수 } \circ$$

$$a_2 = 5 - 1 = 4 \quad \circ$$

$$a_3 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \times$$

$$a_4 = -5 + 3 = -2 \quad \circ$$

$$a_5 = 5 + 5 = 10 = a_1$$

주기 4

$$a_9 + a_{12} = a_1 + a_4 = 10 - 2 = 8$$

8. 첫째항이 a ($a > 0$) 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
 $2a = S_2 + S_3$, $r^2 = 64a^2$ 일 때, a_5 의 값은? [3점]
- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$2a = (a+ar) + (a+ar+ar^2)$

$r^2 + 2r = 0,$

$r = 0$ 또는 $r = -2$

$64a^2 = r^2 > 0$ 이므로 $r = -2,$

$a^2 = \frac{1}{16}, a = \frac{1}{4} (\because a > 0)$

$a_5 = ar^4 = \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4$

9. 2 이상의 두 자연수 a, n 에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 n 의 최댓값을 $f(a)$ 라 하자.
 $f(4) + f(27)$ 의 값은? [4점]
- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$a^{\frac{3}{n}}$

$a = 4, \quad 4^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}}$

$n = 1, 2, 3, 6, \quad f(4) = 6$

$a = 27, \quad 27^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}}$

$n = 1, 3, 9 \quad f(27) = 9$

10. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$3\cos^2 x + 5\sin x - 1 = 0$

의 모든 해의 합은? [4점]

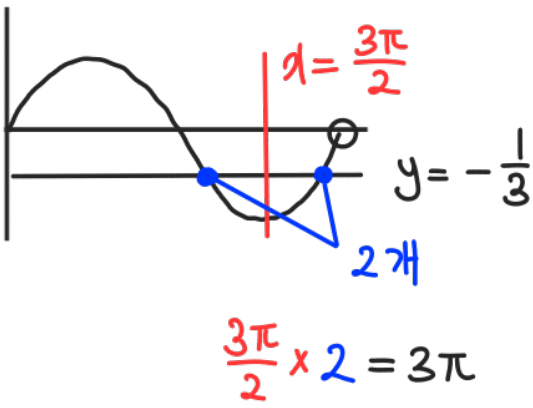
- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

$3(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 1 = 0$

$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$

$(3\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = -\frac{1}{3}$

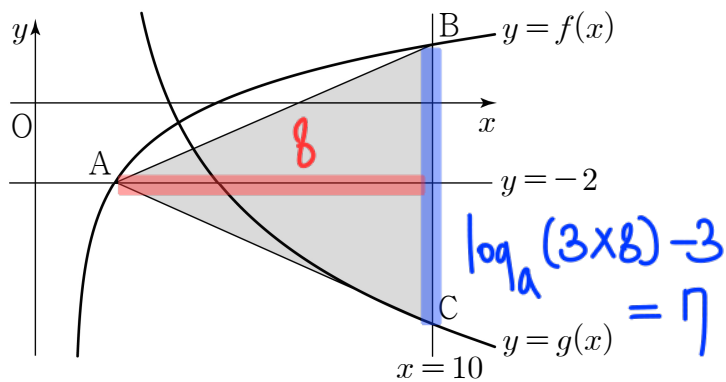


11. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 두 함수

$$f(x) = \frac{1}{2} \log_a(x-1) - 2, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{a}}(x-2) + 1$$

이 있다. 직선 $y = -2$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x = 10$ 과 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10} 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27



$$A(\underline{2}, -2)$$

$$B(\underline{10}, \frac{1}{2} \log_a 9 - 2), \quad C(10, \log_{\frac{1}{a}} 6 + 1)$$

//

$$\log_a 3 - 2 \qquad = -3 \log_a 2 + 1$$

$$28 = \frac{1}{2} \times 8 \times 7$$

$$\log_a 24 - 3 = 7$$

$$\log_a 24 = 10$$

$$24 = a^{10}$$

12. 다항함수 $f(x)$ 는 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 5} = 2$ 를 만족시키고,

함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & (x \neq 3) \\ 1 & (x = 3) \end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} \quad \text{극한값 존재하려면 } f(3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = f(3)g(3) = 0 \quad \text{함숫값}$$

$$f(3) = f'(3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = 2(x-3)^2$$

$$f(1) = 8$$

13. 첫째항이 1 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)S_{n+1} = \log_2(n+2) + \sum_{k=1}^n S_k \cdots (*)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^n ka_k$ 를 구하는 과정이다.

주어진 식 (*)에 의하여

$$nS_n = \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \cdots \textcircled{1}$$

이다. (*)에서 $\textcircled{1}$ 을 빼서 정리하면

$$(n+1)S_{n+1} - nS_n$$
$$= \log_2(n+2) - \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^n S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2)$$

이므로 $(n+1)S_{n+1} - nS_n = \log_2 \frac{n+2}{n+1}$

$$(\boxed{가}) \times a_{n+1} = \log_2 \frac{n+2}{n+1} \quad (n \geq 2)$$

이다.

$a_1 = 1 = \log_2 2$ 이고,
 $2S_2 = \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1$ 이므로
모든 자연수 n 에 대하여
 $na_n = \boxed{(나)}$ $\log_2 \frac{n+1}{n}$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \boxed{(다)} - \log_2 \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}$$
$$= \log_2(n+1)$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $f(8) - g(8) + h(8)$ 의 값은? [4점]

$\log_2(n+1)$ ✓

① ✓ 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$$9 - \log_2 \frac{9}{8} + \log_2 9$$
$$= 9 + \log_2 8 = 12$$

14. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3t^2 - 6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

————— <보 기> —————

ㄱ. 시각 $t=2$ 에서 점 P 의 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P 가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P 의 위치는 -4 이다.
ㄷ. 점 P 가 시각 $t=0$ 일 때부터 가속도가 12 가 될 때까지 움직인 거리는 8 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ✓ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① $v(t) = 3t(t-2)$

② $0 + \int_0^2 v(t) dt = [t^3 - 3t^2]_0^2 = -4$

③ $a(t) = v'(t) = 6t - 6 = 12, t = 3$

$$\int_0^3 |v(t)| dt = -\int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt$$
$$= 4 + [t^3 - 3t^2]_2^3$$
$$= 4 + 0 - (-4)$$
$$= 8$$

5 / 20

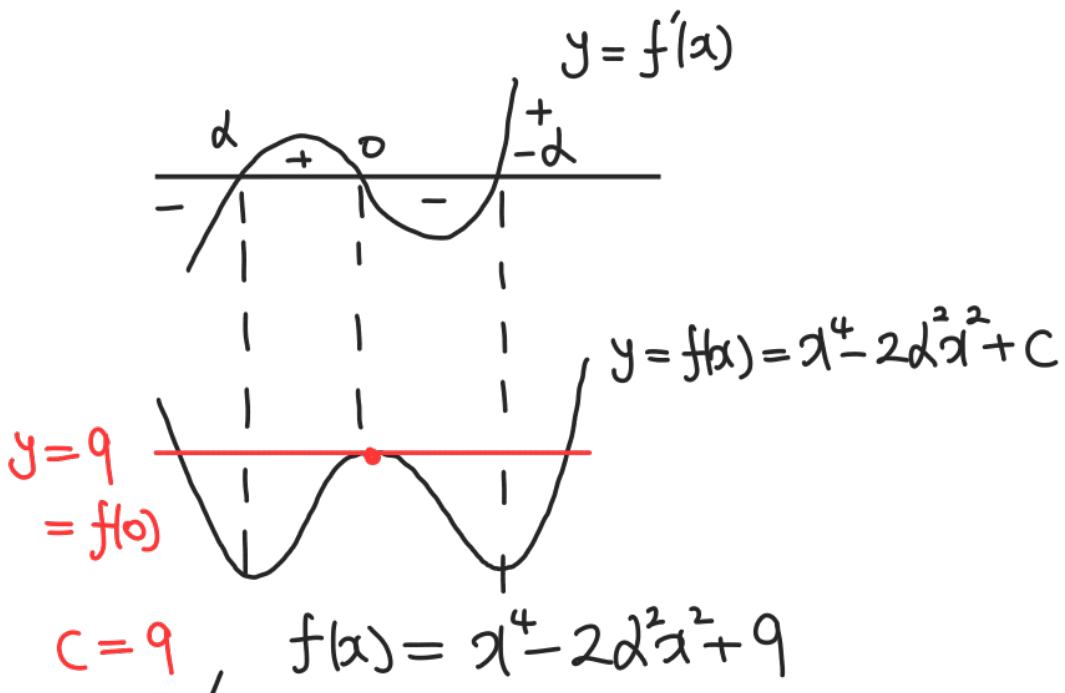
15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근 $\alpha, 0, \beta$ ($\alpha < 0 < \beta$)가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다. $\beta = -\alpha$

(가) 방정식 $f(x)=9$ 는 서로 다른 세 실근을 가진다.
(나) $f(\alpha) = -16$

함수 $g(x) = |f'(x)| - f'(x)$ 에 대하여 $\int_0^{10} g(x) dx$ 의 값은?
[4점]

- ① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

$$f'(x) = 4x(x-\alpha)(x+\alpha) = 4x^3 - 4\alpha^2 x$$



$$f(\alpha) = 9 - \alpha^4 = -16$$

$$\alpha^2 = 5, \alpha = -\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{10} g(x) dx &= \int_0^{\sqrt{5}} g(x) dx + \int_{\sqrt{5}}^{10} g(x) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{5}} -2f'(x) dx + \int_{\sqrt{5}}^{10} 0 dx \\ &= -2f(\sqrt{5}) + 2f(0) \\ &= 32 + 18 \\ &= 50 \end{aligned}$$

단답형

16. 두 상수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + a}{x + 1} = b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\text{분모} \rightarrow 0, \text{분자} \rightarrow 0, \therefore a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3) = 2 = b$$

$$a+b = 5 \quad \boxed{5}$$

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$ 이고 $f(1) = 5$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

$$f(1) = C = 5$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 + 12 - 8 + C \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\boxed{17}$$

18. 함수 $f(x)=x^3+ax$ 에서 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(a)$ 의 값과 같게 되도록 하는 양수 a 에 대하여 $3a^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(a)$$
$$(27+3a)-(1+a) = 2(3a^2+a)$$
$$6a^2 = 26$$
$$3a^2 = 13 \quad \boxed{13}$$

19. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4} = 2, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = 8$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

(분모) $\rightarrow 0$, (분자) $\rightarrow 0$, $\therefore f(2)=4, g(2)=-1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} f'(2) = 2, f'(2) = 8$$

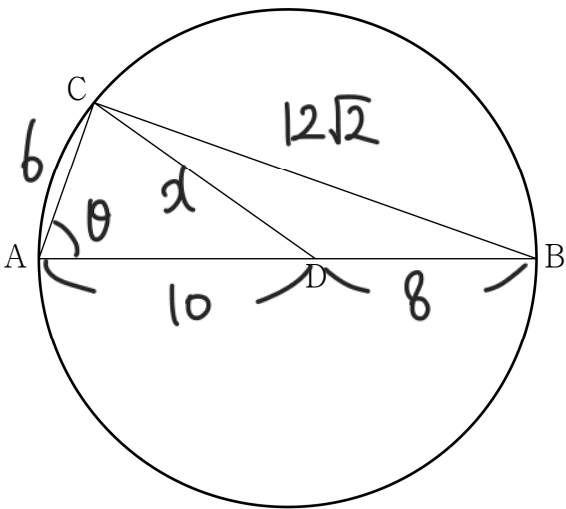
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 8,$$

$$h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$
$$= 8 \times (-1) + 4 \times 8$$
$$= 24 \quad \boxed{24}$$

20. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC} = 12\sqrt{2}, \cos(\angle CAB) = \frac{1}{3} \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이다. 선분 AB를 5:4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S 이다. $\frac{S}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]



$$\frac{12\sqrt{2}}{\sin \theta} = 2R, R = 9 \quad \overline{AB} = 18$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cos \theta$$
$$= 18 \times \frac{1}{3} = 6$$

$$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos \theta$$
$$= 136 - 40 = 96$$
$$x = 4\sqrt{6}$$

$$\frac{x}{\sin \theta} = 2r = 4\sqrt{6} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{3}$$

$$r = 3\sqrt{3}$$
$$S = \pi r^2 = 27 \quad \boxed{27}$$

21. 공차가 d 이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$\hookrightarrow d > 0$$

(가) $a_1 \leq d$

(나) 어떤 자연수 k ($k \geq 3$) 에 대하여

세 항 a_2, a_k, a_{3k-1} 이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \leq a_{16} \leq 100$ 일 때, a_{20} 의 값을 구하시오. [4점]

$$(a_1 + (k-1)d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + (3k-2)d)$$

$$2(k-1)da_1 + (k-1)^2d^2 = (3k-1)da_1 + (3k-2)d^2$$

$$(k^2 - 5k + 3)d = (k+1)a_1$$

$$a_1 = \frac{k^2 - 5k + 3}{k+1}d \leq d$$

$$k^2 - 5k + 3 \leq k+1$$

$$(k-3)^2 \leq 7$$

$$k = 3, 4, \textcircled{5}$$

$$a_1 = -\frac{3}{4}d, -\frac{1}{5}d, \textcircled{\frac{1}{2}d} \text{ : 자연수}$$

음수 d : 짝수

$$a_{16} = a_1 + 15d = \frac{1}{2}d + 15d = \frac{31}{2}d$$

$$90 \leq \frac{31}{2}d \leq 100, \quad d = 6$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = \frac{1}{2}d + 19d$$

$$= 3 + 114$$

$$= 117$$

117

22. 삼차함수 $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$ 에 대하여

$x \geq -3$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 는

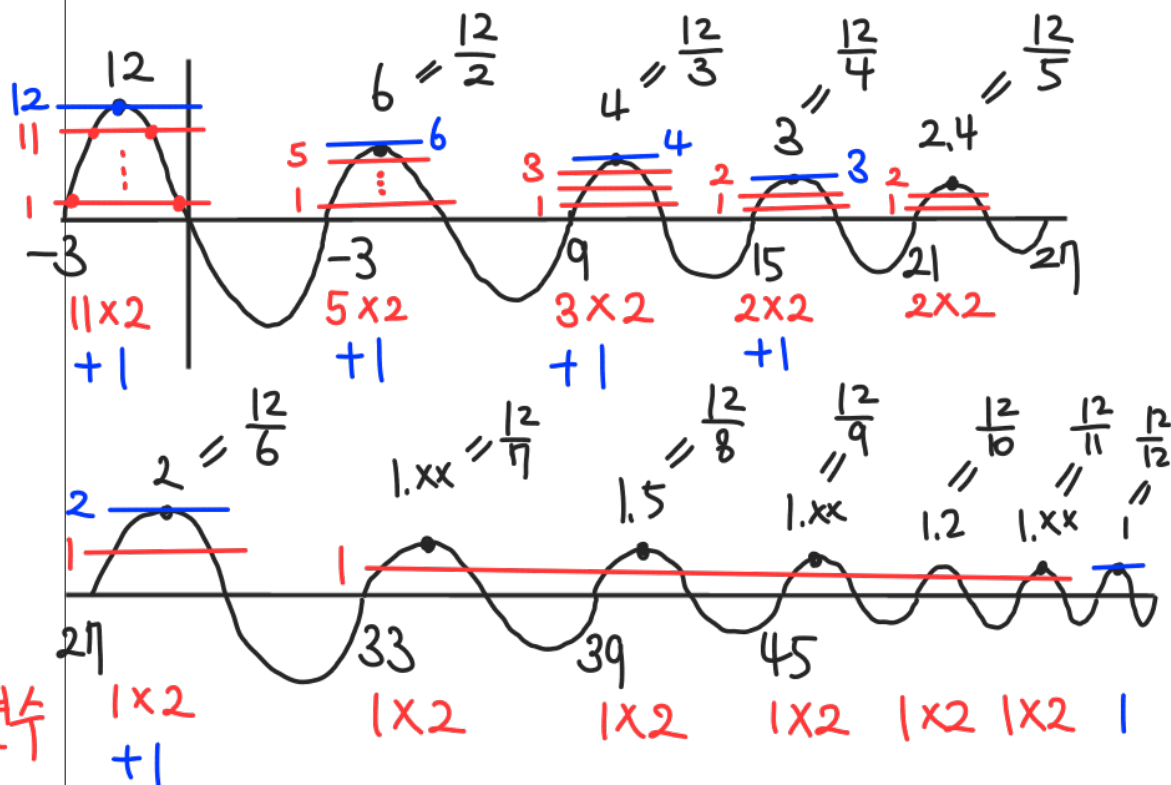
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (-3 \leq x < 3) \\ \frac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \leq x < 6k+3) \end{cases}$$

(단, k 는 모든 자연수)

이다. 자연수 n 에 대하여 직선 $y=n$ 과 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{12} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(3x^2 - 9) \sim \text{극대 } (-\sqrt{3}, 12)$$



$$(1+5+3+2+2+1+1+1+1+1+1) \times 2 + 6$$

$$= 29 \times 2 + 6$$

$$= 64$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.